Différentiabilité des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

I) Dérivée suivant un vecteur (dérivée directionnelle)

Soit une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{v} = (a,b)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un pt de D_f. On dit que f admet une dérivée suivant $\vec{v} = (a,b)$ au pt (x_0,y_0) :

1) si f définie au $V(x_0,y_0)$.

2) ~~lim~~ $$f'_{\vec{v}}(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0,y_0)+t(a,b)) - f(x_0,y_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+ta, y_0+tb) - f(x_0,y_0)}{t}.$$

__Exemple :__ $f(x,y) = x+y$; $(x_0,y_0) = (1,1)$
$\vec{v} = (-1,-1)$.

1) f est définie au $V(1,1)$.

2) $$f'_{\vec{v}}(-1,-1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(1-t, 1-t) - f(1,1)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1-t)+(1-t)-2}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-2t}{t} = -2$$

__Remarque :__ Si le vecteur $\vec{v}$ est de norme 1 ($\|\vec{v}\| = 1$)

on dit que la dérivée $f'_{\vec{v}}(x_0,y_0)$ est la dérivée directionnelle de f en (x_0,y_0) suivant $\vec{v}$.

cas particulier :

soit la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$. $\vec{e_1} = (1,0)$, $\vec{e_2} = (0,1)$

$$f'_{\vec{e_1}}(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0,y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$f'_{\vec{e_2}}(x_0,y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0,y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$: est appelé dérivée partielle par rapport à x au pt (x_0,y_0).

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$: est appelée dérivée partielle par rapport à y au pt (x_0,y_0).

Remarque 1 : une fonction non continue peut admettre des dérivées partielles.

Exemple : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

f n'est pas continue et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Remarque 2 : Une fonction continue peut ne pas avoir des dérivées partielles.

Remarque 3 : les opérations de dérivabilité continues pour les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ restent valable pour le cas ~~des~~ ~~[illegible]~~ des dérivées partielles.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x,y)\right) \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}(x,y)\right).$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} f(x,y)\right).$$

- de même on définit les dérivées mixtes comme suit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y).$$

<u>Remarque</u> : ces dérivées partielles mixtes sont en général sont différentes.

<u>Théorème de Leibnitz</u> : si c'est dérivées partielles mixtes sont continues, elles sont alors égales.

<u>Définition (différentiabilité)</u> : Soit f une fonction définie sur $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in D_f$. On dit que f est differentiable au pt (x_0, y_0) si :

1) f est définie au voisinage de (x_0, y_0).

2) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

Remarque : pour parler de la différentiabilité il faut f admet des dérivées partielles.

Autre écriture :

Posons $x - x_0 = h$, $y - y_0 = k$, donc on a :

$(h, k) \to (0,0)$ lorsque $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

f différentiable

$\Updownarrow$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\sqrt{k^2+h^2}} = 0$$

Définition : f est différentiable au pt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si les 2 conditions suivantes sont satisfaites :

1) f est définie au $V(x_0, y_0)$

2) s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que :

- $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$
- $f(x_0 + h, y_0 + k) = L_{(x_0,y_0)}(h, k) + \|(h, k)\|_2 \, \varepsilon_{(x_0,y_0)}(h, k)$.

avec : $L(h, k) = ah + bk$

$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Définition : On différentielle de f au pt (x_0, y_0) l'application linéaire : $\underset{(x_0,y_0)}{L}(h,k)$ on note :

$$\underset{(x_0,y_0)}{df}(h,k) = \underset{(x_0,y_0)}{L}(h,k) = h \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Remarque : On écrit en général la différentielle L de f en un pt (x_0,y_0) sous la forme :

$$\underset{(x_0,y_0)}{L}(h,k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \underset{(x_0,y_0)}{df}(h,k).$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{(x_0,y_0)}{df}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot dy$$

$$\Updownarrow$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Théorème : toute fonction différentiable au pt (x_0,y_0) est continue au pt (x_0,y_0).

Résultat : si f et g sont 2 fonctions différentiables au pt $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$:

1) $f \pm g$ l'est avec $d(f \pm g) = df \pm dg$.

2) $f \cdot g$ l'est avec $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$.

3) λf l'est avec $d(\lambda f) = \lambda\, df$.

4) $\frac{f}{g}$ l'est avec $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f\, dg}{g^2}$

→ par ailleur si f est differentiable au pt (x_0, y_0) et g est dérivable au pt $f(x_0, y_0)$ alors :

$g \circ f$ est differentiable au pt (x_0, y_0) avec :

$$d(g \circ f) = dg\left(f(x_0, y_0)\right) \cdot df(x_0, y_0).$$

Theorème : Si une fonction f admet des dérivées partielles continues, au pt (x_0, y_0) alors est differentiable au pt (x_0, y_0). L'inverse est généralement faux.

Définition : une fonction ~~est~~ est dite de classe $C^1_{(\Omega)}$ sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si il est differentiable avec des dérivées partielles continues.