Université ZIANE Achour - Djelfa
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique
2eme année Licence Physique (SC) **Matière : Maths 3**

SERIE N°04 : INITIATION AUX EQUATIONS AUX DIRIVEES PARTIELLES

Exercice n°1 :

Considérons l'application $\vec{u} \to \|\vec{u}\|_2 = \sqrt{(\vec{u})^2}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$.

a) Soit t un élément de $\mathbb{R}$ .En considérons le signe du polynôme $(t\vec{u}+\vec{v})^2$ de degré 2 en t établir l'intégrale de Cauchy-Schwarz-Bouniakowski :

$$|\vec{u}.\vec{v}| \le \|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2$$

b) Montrer que l'application $\vec{u} \to \|\vec{u}\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. (c'est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$).

c) Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ .les boules (fermées) de centre O et de rayon $r\rangle 0$ pour chacune des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$.

Exercice n°2 (Rappel):

Etudier l'existence des limites suivantes :

1) $l_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x+y}$, $l_2 = \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$, $l_3 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$, $l_4 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y}{x^2-y^2}$.

2) $l_5 = \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$.

Exercice n°3 (Rappel) :

Déterminer les limites :

1) $l_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $l_2 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}$, $l_3 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $l_4 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^3+xy}{x^4+y^2}$.

2) $l_5 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^4+y^4}$, $l_6 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$, $l_7 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(xy)}{y^2}$, $l_8 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x}{\cos y - \text{ch}x}$.

Exercice n°4 (Rappel):

Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1) $f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2) $f_3(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\dfrac{x}{y} & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$, $f_4(x,y)=\begin{cases} ye^{\arctan\frac{y}{x}} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$, $f_5(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4y}{x^4+y^6} & \text{si}(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Exercice n°5 (Rappel):

Déterminer le domaine de définition, ensuite étudier la continuité et prolongement par continuité des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y)=\frac{\sin x-\sin y}{x-y} \quad , \quad f_2(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{xy}.$$

Exercice n°6 (Rappel):

Etudier la continuité de la fonction f, l'existence des dérivées partielles et leur continuité.

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y)=\begin{cases} x \text{ si } |x|\succ|y| \\ y \text{ si } |x|\prec|y| \\ 0 \text{ si } |x|=|y| \end{cases}\end{aligned}$$

Exercice n°7:

Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y)=f(x+y),\ h(x,y)=f(x^2+y^2),\ k(x,y)=f(xy).$$

Exercice n°8:

Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition :

$$f(x,y)=x^2e^{xy},\ g(x,y,z)=x^2y^3\sqrt{z}\ ,h(x,y)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Exercice n°9:

Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) de la fonction : $f(x,y)=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$ en$(2,1)$.

Exercice n°10:

Calculer les différentielles des fonctions suivantes en un point arbitraire du domaine de définition :

$$f(x,y)=\sin^2 x+\cos^2 y,\ f(x,y)=\ln\left(1+\frac{x}{y}\right).$$

Exercice n°11:

Calculer $df(1,1)$, si $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$.