Universitaire ZIANE Achour de Djelfa
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Physique
2ème année Licence Physique TC
Matière : Analyse3 (Séries et Equations Différentielles)

Djelfa le, 19/01/2020

Durée de l'Examen : 01H30

Exercice n°1: [06 points] : Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{a)} \int \frac{dx}{x^2+x+1}, \ \textbf{b)} \int \frac{dx}{x^2-x-2}, \ \textbf{c)} \int \frac{dx}{x \ln x}, \ \textbf{d)} \int \frac{(\ln x)^q \, dx}{x}, \ q \in \mathbb{Q}$$

2 2 1 1

Exercice n°2 [03 points]:

Résoudre l'équation différentielle suivante : ***(E)*** : $y'' + y' + y = \frac{1}{2}$. 3

Exercice n°3 [05 points]:

1) Soit un domaine ***D*** de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, x^2 + y^2 \leq \rho^2, \rho \succ 0 \right\}$$

a) Dessiner le domaine ***D*** dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. 0,5

b) Le domaine ***D*** est-il une boule ouverte ou fermée. Définir la norme utilisée. 0,5 0,5

2) Calculer les intégrales doubles (***I*** et ***J***) sur le domaine ***D*** :

$$I = \iint_D dx\,dy \quad , \quad J = \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\,dy$$

1 0,5

3) Déduire la surface du disque. 1

4) Déduire le moment d'inertie de ce disque (**considéré plein et homogène**) par rapport à l'origine *O*. 1

Exercice n°4 [06 points]:

A) Etudier la nature des séries numériques suivantes :

1) a) $\sum \frac{1}{n^2}$, b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, c) $\sum \left(\frac{n+3}{4n+1} \right)$.

0,5 0,5 0,5

2) a) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, b) $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$, c) $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^3+1}$.

0,5 0,5 0,5

B) Soit la série numérique suivante : $\sum u_n = \sum \frac{2^n}{n!}$.

1) Etudier la nature de cette série numérique. 0,5

2) Déduire que vaut la limite : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2^n}{n!} \right)$. 0,25

3) Déduire nature des séries suivantes : $\sum \frac{(-2)^n}{n!}$, $\sum \frac{n!}{2^n}$. 0,5

0,25

4) Calculer **le rayon** et **le domaine de convergence** de la série : $\sum \frac{(-2x)^n}{n!}$.

1 0,5

Bon courage

Corrigé type Maths3 L2-Physique AU 2019/2020

Exo N° 1 Calcul d'intégrale.

a) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$, posons $P_2(x) = x^2+x+1$, l'équation $P_2(x)=0$ ne possède de solution dans $\mathbb{R}$ (car : $\Delta = 1^2-4(1)(1) = -3 < 0$).

$$P_2(x) = x^2+x+1 = x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

$$P_2(x) = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right].$$

$$= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]. \quad 1$$

Posons le changement de variable $t = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ 0,5

$$dt = \frac{2}{\sqrt{3}}dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]} = \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{t^2+1}.$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{Arctg}(t) + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

1

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C_1;\ C_1 \in \mathbb{R}}$$ 0,5

(b) $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$; Posons $P_2(x) = x^2-x-2$, résolvons l'équation

$P_2(x)=0$; $\Delta = (-1)^2-4(-2)(1) = 1+8=9$.

$x_1 = \frac{+1+\sqrt{9}}{2} = \frac{+1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$. 0,25

$x_2 = \frac{+1-\sqrt{9}}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ 0,25

$P_2(x) = (x^2-x-2) = 1(x-2)(x+1) = (x-2)(x+1)$. 0,25

$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$. 0,25

$= \frac{a(x+1)+b(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{ax+a+bx-2b}{(x-2)(x+1)}$

$= \frac{(a+b)x+(a-2b)}{(x-2)(x+1)}$; par identification

$\begin{cases} a+b=0 \\ a-2b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-b \\ -b-2b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-b \\ -3b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}$ 0,25 0,25

donc $\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{(\frac{1}{3})}{x-2} + \frac{(-\frac{1}{3})}{x+1}$. 0,25

$\int \frac{dx}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-2} + \left(-\frac{1}{3}\right)\int\frac{dx}{x+1} = \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1|$; $C_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C_2 \,;\, C_2 \in \mathbb{R}}$$ 0,25

c) $\int \frac{dx}{x\,Ln(x)} = \int \left(\frac{1}{x}\right)(Ln\,x)^{-1}\,dx = Ln|Ln(x)| + C_3$, $C_3 \in \mathbb{R}$

0,5 0,5

d) $\int \frac{(Ln(x))^q}{x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}\right)(Ln\,x)^q\,dx = \begin{cases} \frac{(Ln\,x)^{q+1}}{q+1} + C_4' & \text{si } q \neq -1 \\ Ln|Ln(x)| + C_4'' & \text{si } q = -1 \end{cases}$ $q \in \mathbb{Q}$.

0,5

si $q = 0$ $\int \frac{dx}{x} = Ln|x| + C_4'''$. 0,5

Exo N°2 : Résoudre l'équation $(E) : y'' + y' + y = \frac{1}{2}$.

→ l'équation homogène (E_0) : $y'' + y' + y = 0$.

l'équation caractéristique de (E) : $r^2 + r + 1 = 0$ 0,25

$\Delta = 1^2 - 4(1)(1) = -3 = 3i^2$; $\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{3}\,i$ 0,25

0,25 0,25

$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $r_2 = \overline{r_1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

La solution de (E_0) : $y_H = e^{-\frac{x}{2}}\left[c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$.

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. 0,5

→ Solution de l'équation (E) : solution particulière :

On remarque que $y_p = \frac{1}{2}$ est une solution particulière de (E)

0,5

Vérification : $y_p'' + y_p' + y_p = \left(\frac{1}{2}\right)'' + \left(\frac{1}{2}\right)' + \frac{1}{2} = 0 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

donc la solution de l'équation $(E) : y'' + y' + y = \frac{1}{2}$ est

$$\boxed{y = y_H + y_p = e^{-\frac{x}{2}}\left[c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + \frac{1}{2}}$$

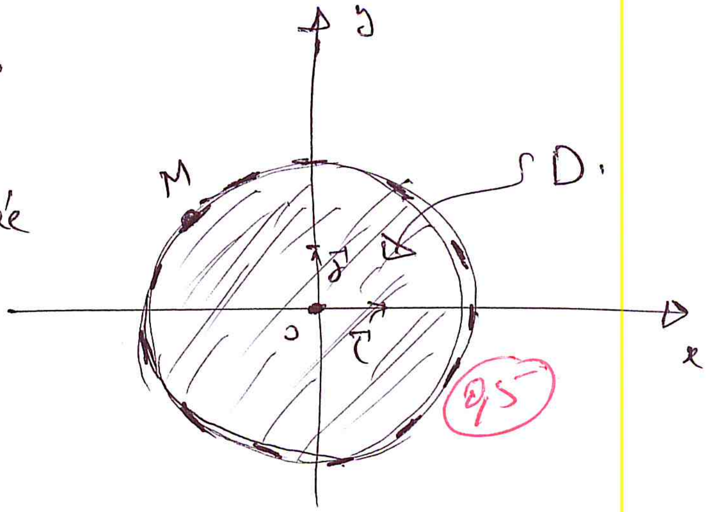
1

Exo N°3 :

1) a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq \rho^2, \rho>0\}$.

D : disque ~~avec~~ frontière.

b) D est une boule ~~ouverte~~ fermée $(x^2+y^2 \leq \rho)$ 0,5



$$\|\vec{OM}\|^2 = x^2+y^2$$

$$\|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \|\vec{OM}\|_2 \quad \text{(Norme) 2.}$$

0,5

$$\left.\begin{array}{l} \|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x,y) \longmapsto \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\} \text{Norme } 2$$

2) Calcul de I et J :

changement de variable (coordonnées polaires).

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

0,25 0,25

$$I = \iint_D dx\,dy = \iint_\Delta |J(r,\theta)|\,dr\,d\theta \quad , \quad J_{(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$J_{(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$\boxed{J_{(r,\theta)} = r.} \quad 0{,}25$$

$$I = \iint_D dx\,dy = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\rho} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\rho} r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\rho^2}{2}\cdot 2\pi$$

$I = \pi \rho^2$. 0,25

2) $J = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_\Delta (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\,|J_{(r,\theta)}|\,dr\,d\theta$. 0,25

$= \iint_\Delta r^2 . r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\rho} r^3\,dr = 2\pi . \frac{\rho^4}{4}$.

$$\boxed{J = \frac{\pi \rho^4}{2}}$$ 0,25

3) Deduction de surface du disque :

l'élément de surface $ds = dx\,dy$ 0,25 $\Rightarrow S = \iint_D ds = \iint_D dx\,dy$ 0,25

$S = \iint_D dx\,dy = I = \pi \rho^2$ 0,5

4) Deduction du moment d'inertie du disque par rapport à ((disque plein et homogène)

définition $I_{/O} = \int r^2\,dm$. 0,25 $\quad r^2 = \vec{r}^2 = x^2+y^2$

$dm = \sigma\,ds$, σ : masse surfacique.

$I_{/O} = \int r^2\,dm = \int r^2 \sigma\,ds = \iint_D (x^2+y^2)\,\sigma\,dx\,dy = \iint_D \sigma\,(x^2+y^2)\,dx\,dy$ 0,25

disque homogène ~~$\sigma = \frac{ds}{dm} = cte = \frac{S}{M} = \frac{\pi\rho^2}{M}$~~ ; M : masse du disque.

$\sigma = \frac{dm}{ds} = cte = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi \rho^2}$ 0,25

$$I_{/O} = \iint_D \sigma (x^2+y^2)\,dx\,dy = \sigma \underbrace{\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy}_{J} = \sigma \cdot \frac{\pi \rho^4}{2}$$

$$I_{/O} = \sigma \cdot \frac{\pi \rho^4}{2} = \frac{\pi \rho^4}{2} \cdot \left(\frac{M}{\pi \rho^2}\right) = \frac{1}{2} M \rho^2$$

$$\boxed{I_{/O} = \frac{1}{2} M \rho^2}$$

0,25

EXO N° 4 :

A) Nature des series.

1.a) $\sum \frac{1}{n^2} \equiv \sum \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ (serie de Reiman $\alpha > 1$)
serie converge. 0,5

1.b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum u_n$

$u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \overset{\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n.n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$ Diverge 0,5

donc la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge.

1.c) $\sum \frac{n+3}{4n+1} = \sum u_n$; $u_n = \frac{n+3}{4n+1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+3}{4n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{3})}{\cancel{n}(4+\frac{1}{n})} = \frac{1+0}{4+0} = \frac{1}{4}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow \sum u_n = \sum \frac{n+3}{4n+1}$ diverge. 0,5

2.a) $\sum\limits_{n>0} \frac{(-1)}{n} = \sum u_n$, $u_n = (-1)^n \frac{1}{n} = (-1)^n v_n$, $v_n = \frac{1}{n}$
$(u_n)_n$ une suite alternée.

$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n \to \infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \end{array} \right\} \overset{\text{theorème}}{\underset{\text{d'Able}}{\Rightarrow}} \sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV 0,5

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suite décroissante

2.b) $\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum u_n$; $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $|u_n| = \frac{1}{n^2}$.

$\sum |u_n| = \sum \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n^2}$ CV. 0,5

2.c) $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^3+1} = \sum_{n\geq 0} u_n$; $u_n = (-1)^n \frac{\sin(n)}{n^3+1}$.

$$|u_n| = \frac{|\sin(n)|}{n^3+1}$$

$$|\sin(n)| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\sin(n)|}{n^3+1} \leq \frac{1}{n^3+1}.$$

On a aussi $n^3+1 \geq n^3 \Rightarrow \frac{1}{n^3+1} \leq \frac{1}{n^3}$.

donc $|u_n| = \frac{\sin(n)}{n^3+1} \leq \frac{1}{n^3+1} \leq \frac{1}{n^3}$.

On a : $\left\{ \begin{array}{l} |u_n| \leq \frac{1}{n^3} \\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^3} \text{ CV} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n>0} |u_n|$ CV $\Rightarrow \sum_{n>0} u_n$ CV 0,5

c'est à dire $\sum \frac{(-1)^n \sin(n)}{n^3+1}$ C.V.

B) $\sum u_n = \sum \frac{2^n}{n!}$

1) Nature de serie $\sum u_n$:

calculons : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = ?$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2.2^n}{(n+1).n!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n!}$ CV 0,5

2) <u>Déduction de la limite</u> $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right) = ?$

comme la serie $\sum u_n = \sum \frac{2^n}{n!}$ c.v. $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$. 0,25

③ a) <u>déduction de nature de la serie</u> $\sum \frac{(-2)^n}{n!}$

$$\sum \frac{(-2)^n}{n!} = \sum (-1)^n \frac{2^n}{n!} = \sum (-1)^n u_n.$$

$$|(-1)^n u_n| = \frac{2^n}{n!}$$

la serie $\sum |(-1)^n u_n| = \sum \frac{2^n}{n!}$ c.v.

comme $\sum |(-1)^n u_n|$ cv. $\Rightarrow \sum (-1)^n u_n$ cv

c'est à dire $\sum \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$ cv. 0,25

ⓑ <u>déduction de la nature de la serie</u> $\sum \frac{n!}{2^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{2^n}{n!}\right)} = \frac{1}{0} = +\infty.$$ 0,25

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{n!}{2^n} \text{ div.}$$ 0,25

④ – <u>calcul du rayon de convergence de la serie</u> $\sum \frac{(-2x)^n}{n!}$

$$\sum \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n = \sum a_n x^n \quad \text{avec } a_n = (-1)^n \frac{2^n}{n!}$$

donc $\sum \frac{(-2x)^n}{n!}$ est une série ~~alternée~~ entière. 0,5

Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n+1} = 0$. 0,25

$R = \frac{1}{0} = +\infty$ (rayon de convergence). 0,25

Domaine de convergence : $D =]-R, +R[$

$D =]-\infty, +\infty[$. 0,5