Université ZIANE Achour - Djelfa
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Chimie
Niveau : L2 Chimie SC.

Date : 15/04/2017, Durée 1H30

Rattrapage de la matière : Mathématiques Appliquées

Exercice N°1 (06 points) :

Calculer les primitives suivantes :

$$I_1 = \int \left(\sin(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} \right) dx \ , \ I_2 = \int \frac{(\ln x)^3}{x} dx \ , \ I_3 = \int \frac{1}{x\,(\ln x)^3} dx \ ,$$

$$I_4 = \int \frac{2\cos x}{(\sin x)^n} dx \ \ (n \succ 1), \ I_5 = \int (3x^2+1)(x^3+x+2)^{q+1} dx \ , \ q \in Q \ .$$

Exercice N°2 (06 points) :

Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{1}{n-1}, n \geq 2, \qquad \sum \frac{1}{\ln(n)}, n \geq 2, \qquad \sum \left(\frac{1}{n^3} \right), n \geq 1, \qquad \sum \left(\frac{2n+1}{7n+5} \right)^n$$

Exercice N°3 (08 points) :

1) Soit un domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq R^2, R \succ 0 \},$$

   a) Dessiner le domaine D dans un repère orthonormé.
   b) Le domaine D est-il une boule ouverte ou fermée. Définir la norme utilisée.

2) Calculer l'intégrale double (I) sur le domaine D :

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \ .$$

3) Déduire le moment d'inertie d'un disque plein homogène par rapport à son centre de masse « O ».

Bon courage

Corrigé type Rattrapage
L2 - chimie TC

Exo N° 1 (6 points) calcul de primitives:

1) $I_1 = \int \left(\sin(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}\right) dx$

On sait que $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et

$tg'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

Donc: $I_1 = -\cos(x) + tg(x) + C_1$. 1

2) $I_2 = \int \frac{(Ln\, x)^3}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x}\right)(Ln(x))^3 dx$

$= \frac{(Ln(x))^4}{4} + C_2 = \frac{Ln^4(x)}{4} + C_2$ 1

3) $I_3 = \int \frac{dx}{x(Ln(x))^3} = \int \left(\frac{1}{x}\right)(Ln(x))^{-3} dx$

$= \frac{(Ln(x))^{-3+1}}{-3+1} + C_3 = \frac{(Ln(x))^{-2}}{-2} + C_3$

$= -\frac{1}{2} \frac{1}{Ln^2(x)} + C_3$ 1

4) $I_4 = \int \frac{2\cos x}{(\sin x)^n} dx$ $(n>1)$ $= \int 2\cos x \cdot (\sin x)^{-n} dx$ $(n \neq +1)$, $n \in \mathbb{N}$.

$= 2\int (\cos x)(\sin x)^{-n} dx = 2 \cdot \frac{(\sin x)^{-n+1}}{-n+1} + C_4$ 1

1

5) $I_5 = \int (3x^2+1)(x^3+x+2)^{q+1}\,dx \;;\; q \in \mathbb{Q}.$

$$= \begin{cases} \dfrac{(x^3+x+2)^{(q+1)+1}}{(q+1)+1} + C_5' & \text{si } q+1 \neq -1 \\ & (q=-2) \quad 1 \\ \mathrm{Ln}\,|x^3+x+2| + C_5'' & \text{si } q+1=-1 \\ & (q=-2) \quad 1 \end{cases}$$

<u>exo N° 2</u> <u>(6 points)</u> : <u>Nature des series</u> .

1) $\sum u_n = \sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n-1}$

on $\forall\, n \geq 2$: $n > n-1 \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n-1}$

comme la serie $\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum \dfrac{1}{n}\right) \text{ DIV} \\ \quad \text{et} \\ \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{n-1}\right)$ DIV 1,5

2) $\sum u_n = \sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{\mathrm{Ln}(n)}$.

on $\forall\, n \geq 2$: $n > \mathrm{Ln}(n) \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{\mathrm{Ln}(n)}$

comme la serie $\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum \dfrac{1}{n}\right) \text{ DIV} \\ \quad \text{et} \\ \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{\mathrm{Ln}(n)} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{\mathrm{Ln}(n)}\right)$ DIV. 1,5

3) $\sum u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}$.

on a $\forall n \geq 1$: $n^3 \geq n^2 \Rightarrow \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$

comme la serie $\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right) \text{C.V} \\ \text{et } \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2} \end{array} \right\} \Rightarrow$ la serie

$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3}\right)$ C.V aussi. 1,5

4) $\sum u_n = \sum \left(\frac{2n+1}{7n+5}\right)^n$

calculons la limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{7n+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n}\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{7+\frac{5}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{7+\frac{5}{n}}\right) = \frac{2}{7} < 1$$

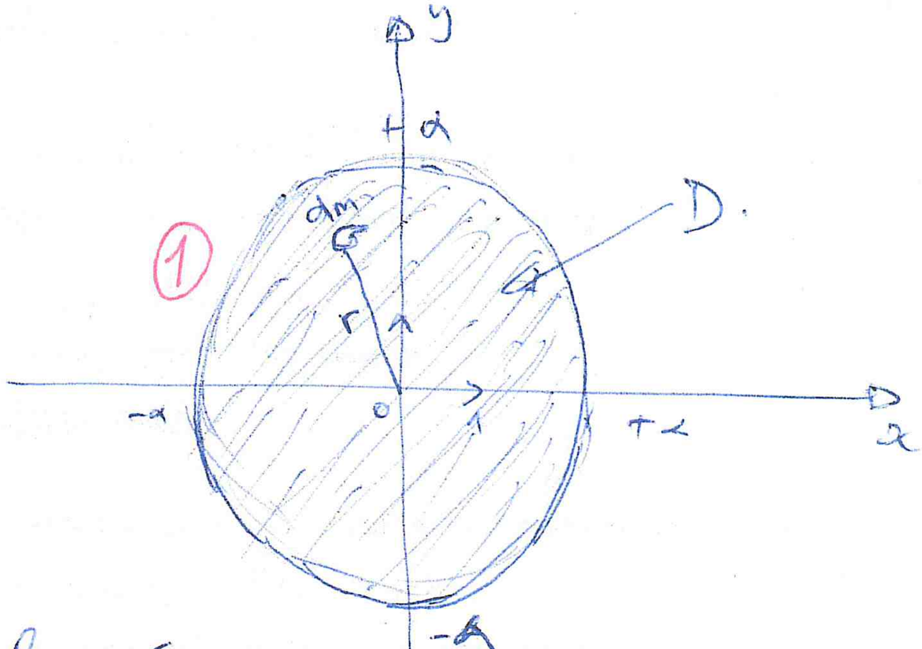
donc la serie $\left(\sum \frac{2n+1}{7n+2}\right)$ C.V 1,5

Exo N°3 . ~~(en disposition Exo N°4)~~

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq \alpha^2 \,,\, \alpha > 0\}$.

a)

1



b) D : est une boule fermée de rayon (α). 1

$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$(x,y) \longmapsto \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|(x,y)\|_2 < \alpha\}$.

$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} < \alpha \Rightarrow x^2+y^2 < \alpha^2$.

$\rightarrow$ Norme utilisée donc est la norme 2. 1

2) Calcul de l'intégrale : $I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

changement de variable $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 1 (coordonnées polaires)

4

$\begin{cases} r \in [0, \alpha[\\ \theta \in [0, 2\pi[\end{cases}$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) = r\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} = r$$ 1

$$dx\,dy = |J|\,dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta$$ 0,5

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{D'} (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \iint_{D'} r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta = \iint_{D'} r^3\,dr\,d\theta.$$

$$D' = \left\{(r,\theta) \,/\, \begin{array}{l} r \in [0,\alpha[\\ \theta \in [0,2\pi[\end{array}\right\}$$

$$I = \int_0^{\alpha} r^3\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\alpha} \left.\theta\right|_0^{2\pi} = \frac{\alpha^4}{4}\cdot 2\pi$$

$$\boxed{I = \frac{\pi\alpha^4}{2}}.$$ 1,5

3) Deduction de moment d'inertie d'un disque plein homogène par rapport à son axe de rotation en O (centre de masse).

5

$I_{/O} = \int r^2 dm$ avec $r^2 = x^2+y^2$ et $dm = \sigma\, ds$

σ : masse surfacique.

$\sigma = \frac{dm}{ds} = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi\alpha^2}$ 0,5 (car matériaux homogène)

$$I_{/O} = \int (x^2+y^2)\,\sigma\, ds = \sigma \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \sigma \cdot \frac{\pi\alpha^4}{2}$$

$$I_{/O} = \left(\frac{M}{\pi\alpha^2}\right)\cdot\frac{\pi\alpha^4}{2} = \frac{1}{2}M\alpha^2 \; ; \; \boxed{I_{/O} = \frac{1}{2}M\alpha^2}$$

0,5

Exo N°4 (au choix avec Exo n°3)

on l'équation (E_0) : $y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2$

1/ Détermination de α / $y=\alpha x$ solution de (E_0).

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = \alpha - \frac{\alpha x}{x} - (\alpha x)^2 = -9x^2$$

$$= -\alpha^2 x^2 = -9x^2 \Rightarrow \alpha^2 = 9$$

2

$$\Rightarrow \alpha = 3 \text{ car } \alpha \in]0,+\infty[.$$

~~2) Mon~~

donc $y_0(x) = 3x$ solution particulière de (E_0).

2) Montrons que : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E_0) en (E_1) / $z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z(x) = 1$.

calculons : $y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} - 3 + \frac{1}{x\,z(x)} + -9x^2 + \frac{6x}{z(x)} - z^2(x) = -9x^2$

5