Université ZIANE Achour - Djelfa
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Chimie
Niveau : L2 Chimie SC. **Date : 28/05/2018, Durée 01H30**

Examen de Rattrapage de la matière : Mathématiques Appliquées

Exercice N°1 (06 points) :

Calculer les primitives suivantes :

$$I_1=\int\left[\cos^2(x)-\sin^2(x)\right]dx\ ,\ I_2=\int\frac{1}{x\,(\ln x)^{3p}}dx\ ,\ p\in\mathbb{Z},\ I_3=\int\frac{2\cos x}{(\sin x)^n}dx\ \ (n\succ 1),\ I_4=\int 5xe^{2x^2}dx\ .$$

1,5 1,5 1,5 1,5

Exercice N°2 (06 points) :

Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum\frac{1}{n-1},n\geq 2,\quad \sum\frac{n}{\ln(n)},n\geq 2,\quad \sum\frac{n^p}{\ln(n)},n\geq 2,p\in\mathbb{N},\quad \sum\left(\frac{1}{n^3}\right),n\geq 1,\quad \sum\frac{2n+1}{7n+5},\quad \sum\left(\frac{2n+1}{7n+5}\right)^n$$

1 1 1 1 1 1

Exercice N°3 (08 points) :

1) Soit un domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\leq r^2, r\succ 0\right\},$$

   a) Dessiner le domaine D dans un repère orthonormé. 2

   b) Le domaine D est-il une boule ouverte ou fermée. Définir la norme utilisée. 1 1

2) Calculer l'intégrale double (I) sur le domaine D :

$$I=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy\ . \quad 2$$

3) Déduire le moment d'inertie ($I=\iint_D \vec{r}^{\,2}dm$) d'un **disque plein et homogène** par rapport à son centre de masse « O ». (NB : $\vec{r}$ est le vecteur position d'une masse élémentaire dm sur le disque). 2

Bon courage

Corrigé type - Rattrapage (L2-Chimie)

Mathématique Appliquée - A.U : 2017/2018

Exo N° 1 (Calcul d'intégrales simples) :

1) $I_1 = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx = \int \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + C_1$. 1,5

2) $I_2 = \int \frac{1}{x(\ln x)^{3p}} dx$; $p \in \mathbb{Z}$.

0,5 a) $p = 0$: $I_2 = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_2$

0,5 b) $-3p = -1 \Rightarrow p = \frac{1}{3}$: $I_2 = \int \left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^{-3p} dx = \int \left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^{-1} dx$

$= \ln|\ln(x)| + C_2'$

0,5 c) $-3p \neq -1 \Rightarrow p \neq \frac{1}{3}$: $I_2 = \int \left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^{-3p} dx = \frac{(\ln x)^{-3p+1}}{-3p+1} + C_2''$

3) $I_3 = \int \frac{2\cos x}{(\sin x)^n}$; $(n > 1)$.

$I_3 = \int (2\cos x)(\sin x)^{-n} dx = 2\int (\cos x)(\sin x)^{-n} dx$; $-n \neq -1$ $(n \neq 1)$

$= 2 \frac{(\sin x)^{-n+1}}{-n+1} + C_3$. 1,5

4) $I_4 = \int 5x e^{2x^2} dx = 5\int (x e^{x^2}) e^{x^2} dx = \frac{5}{2} \int (2x e^{x^2}) e^{x^2} dx$

$= \frac{5}{2} \int (2x e^{x^2}) [e^{x^2}]^1 dx = \frac{5}{2} \frac{[e^{x^2}]^{1+1}}{1+1} + C_4 = \frac{5}{2} \frac{(e^{x^2})^2}{2}$

$= \frac{5}{4} \cdot e^{2x^2} + C_4$. 1,5

EXO N°2 : (Etude de la nature des serie numerique)

1) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n-1}$; $u_n = \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n} \Rightarrow$ La serie $\left(\sum u_n \quad D.V\right)$ 1

2) $\sum \frac{n}{Ln(n)}$; $n \geq 2$; $u_n = \frac{n}{Ln(n)}$; On a $\forall n \geq 2$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{Ln(n)} = +\infty \neq 0 \Rightarrow \left(\sum u_n \ D.V\right).$$ 1

3) $\sum \frac{n^p}{Ln(n)}$; $n \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$; $u_n = \frac{n^p}{Ln(n)}$

a) $p = 0$; $u_n = \frac{1}{Ln(n)}$

0,5

on a $\forall n \geq 2 \quad n \geq Ln(n) \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{Ln(n)}$

donc on a $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{Ln(n)} \\ \text{La serie } \sum \frac{1}{n} \ (D.V) \end{array}\right\} \Rightarrow$ la serie $\left(\sum u_n = \sum \frac{1}{Ln(n)} \ D.V\right)$

b) $p \neq 0$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{Ln(n)} = +\infty \neq 0$ donc la serie

0,5

$$\left(\sum u_n = \sum \frac{n^p}{Ln(n)} \quad D.V\right).$$

4) $\sum \frac{1}{n^3}$; $n \geq 1$: $\left(\frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n^\alpha} \text{ avec } \alpha > 1\right)$

Donc la serie $\left(\sum u_n = \sum \frac{1}{n^3} . \ CV\right)$ 1

5) $\sum \frac{2n+1}{7n+5}$, $u_n = \frac{2n+1}{7n+5}$.

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{7n+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n}\left(\frac{2+1/n}{7+5/n}\right) = \frac{2+0}{7+0} = \frac{2}{7}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{2}{7} \neq 0 \Rightarrow \left(\sum U_n = \sum \frac{2n+1}{7n+5} \text{ D.V}\right)$$

1

6) $\sum\left(\frac{2n+1}{7n+5}\right)^n$; $U_n = \left(\frac{2n+1}{7n+5}\right)^n$

1

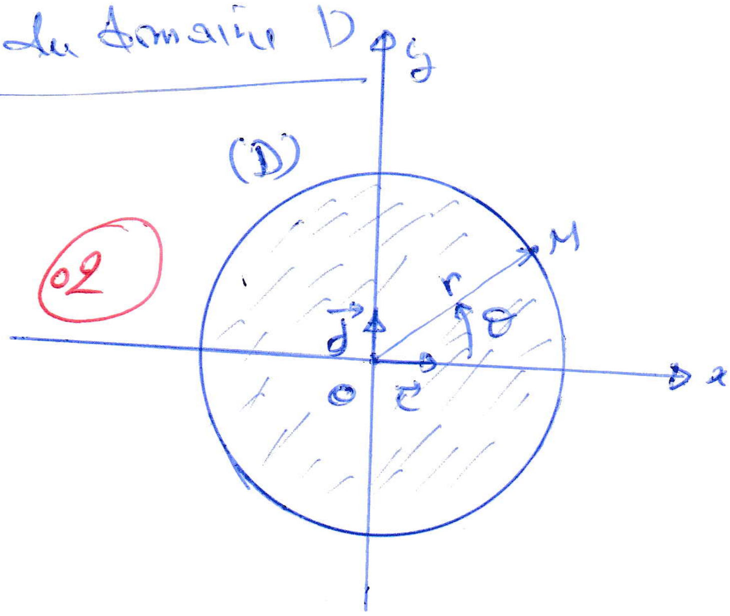
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{7n+7} = \frac{2}{7} < 1.$$

Donc la Serie $\left(\sum U_n = \sum\left(\frac{2n+1}{7n+5}\right)^n \text{ C.V}\right)$

Ex° 3 (Intégrales doubles).

1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2 ; r > 0\}$.

a) représentation graphique du domaine D



02

b) *) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2 ; r > 0\}$; Soit $M = (x, y)$.

donc $\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\|\vec{OM}\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. (Norme 2).

$D = \{M(x,y) / \|\vec{OM}\|_2 < r\}$: (Domaine fermé boule fermée).

1

**) Norme 2 $= \|\cdot\|_2$.

$$\begin{cases} \|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \longmapsto \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$ application

1

2) $I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2\} \curvearrowright D' = \begin{cases} r \in [0, r[\\ \theta \in [0, 2\pi[\end{cases}$

0,5

et $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Donc $I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

$= \iint_{D'} (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\, |J|\, dr\, d\theta$ 0,5

(4)

$$I=\iint_{D'} r^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}|J|\,dr\,d\theta=\iint_{D'} r^2|J|\,dr\,d\theta$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$J=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}$$ 0,5

$$=r$$

Donc : $$I=\iint_{D'}|J|\,r^2\,dr\,d\theta=\iint_{D'} r^3\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^r\int_0^{2\pi} r^3\,dr\,d\theta=\int_0^r r^3\,dr\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^r\left[\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{r^4}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi r^4}{2}.$$

$$\boxed{I=\frac{\pi r^4}{2}}$$ 0,5

3) Deduction du moment d'inertie d'un disque plein et homogène.

Soit ρ : densité surfacique du disque : $\rho=\frac{dm}{ds}=\frac{dm}{dx.dy}$.

donc $dm=\rho.dx.dy$. 0,5

$$I_{/O}=\iint_D \vec{r}^{\,2}dm=\iint_D (x^2+y^2)\,dm=\iint_D (x^2+y^2)\rho\,dx\,dy$$

$$I_{/O}=\rho\left[\iint_D (x^2+y^2)\,dx.dy\right]=\rho.I$$ 0,5

le moment d'inertie $I_{/o} = \rho \cdot I = \rho \cdot \frac{\pi \cdot r^4}{2}$.

Supposons que M est la masse du disque et S sa surface

$$\rho = \frac{dm}{ds} = \frac{M}{S}$$ (Disque homogène) : même propriété au tous point du disque.

$$\rho = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi r^2}$$ 0,5

Donc : $I_{/o} = \rho \cdot \frac{\pi r^4}{2} = \frac{M}{\pi r^2} \cdot \frac{\pi r^4}{2} = \frac{1}{2} M r^2$ 0,5