

PARTIE 1 : PLASTICITE

1	INTRODUCTION	4
2	CALCUL NON LINEAIRES.....	4
2.1	MODELES DE COMPORTEMENTS NON LINEAIRES.....	4
2.1.1	<i>Modèles globaux.....</i>	4
2.1.2	<i>Modèles locaux.....</i>	5
2.1.3	<i>Modèles semi-globaux.....</i>	5
2.2	ANALYSE NON LINEAIRE DES SECTIONS EN BETON ARME.....	5
2.2.1	<i>Lois de comportement des matériaux.....</i>	6
2.2.2	<i>Lois de comportement des sections.....</i>	7
2.3	ROTULES PLASTIQUES	9
2.3.1	<i>Définition de la rotule plastique.....</i>	9
2.3.2	<i>Détermination de la longueur plastique.....</i>	11
2.3.3	<i>Calcul de la rotation de ruine.....</i>	14
2.4	COURBE DE CAPACITE	15
3	CHARGES DE RUINE ET MECANISMES DE RUINE POUR DES ELEMENTS DE STRUCTURES ET DES PORTIQUES SIMPLES.....	16
3.1	DEFINITION DES MECANISMES DE RUINE	16
3.2	COMPORTEMENT D'UN ELEMENT STRUCTUREL SIMPLEMENT APPUYE EN FLEXION SIMPLE.	16
3.2.1	<i>Élément en charpente métallique.....</i>	16
3.2.2	<i>Élément en béton armé.....</i>	17
3.3	COMPORTEMENT D'UN PORTIQUE SIMPLE SOUS L'ACTION DE CHARGES CONCENTREES VERTICALES ET HORIZONTALES CROISSANTES	20
	<i>Fig. 16 : Portique simple à une travée et un étage.</i>	20
3.3.1	<i>Traitement du portique.....</i>	20
3.4	THEOREMES FONDAMENTAUX DE L'ANALYSE PLASTIQUE DES STRUCTURES	23
3.4.1	<i>Introduction.....</i>	23
3.5	METHODES UTILISEES POUR LE CALCUL DES CHARGES DE RUINE POUR DES ELEMENTS STRUCTURAUX OU STRUCTURES SIMPLES.	24
3.5.1	<i>Introduction.....</i>	24
3.5.2	<i>Calcul de la charge de ruine par la méthode du moment libre.....</i>	24
3.5.3	<i>Calcul de la charge de ruine par la méthode des travaux virtuels.....</i>	24
3.5.4	<i>Exemples d'application.....</i>	25
3.6	DETERMINATION DE CHARGES DE RUINE ET MECANISME DE RUINE D'UN PORTIQUE SIMPLE	26
3.6.1	<i>Introduction.....</i>	26
3.6.2	<i>Beam mechanism.....</i>	27
3.6.3	<i>Sway mechanism.....</i>	28
3.6.4	<i>Combined mechanism.....</i>	28
3.6.5	<i>Conclusion.....</i>	29

PARTIE 2 : ENDOMMAGEMENT ET LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

4	ENDOMMAGEMENT ET LA MECANIQUE DE LA RUPTURE.....	31
4.1	INTRODUCTION	31
4.2	MODELISATION DE LA FISSURE	34
4.3	LES MODES DE PROPAGATION DES FISSURES.....	35
4.4	LA PROPAGATION DE LA FISSURE SELON LE TYPE DE MATERIAU	36
4.5	DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS A LA MECANIQUE DE LA RUPTURE	36
4.5.1	<i>Le champ de contraintes en pointe de fissure.....</i>	36
4.5.2	<i>Facteurs d'intensité de contrainte.....</i>	37

4.5.3	<i>Approche locale et facteurs d'intensité de contraintes</i>	37
4.6	IDENTIFICATION LA TENACITE DES MATERIAUX FRAGILES	40
4.6.1	<i>La pré-fissuration des éprouvettes par essais sandwich</i>	41
4.6.2	<i>La mesure de la ténacité par essais de flexion 3 points</i>	42
4.7	EVALUATION DU F.I.C.....	43
4.7.1	<i>Extrapolation des déplacements</i>	43
4.8	LES CRITERES DE RUPTURE DUCTILE	46
4.8.1	<i>Le CTOD ou Crack Tip Opening Displacement</i> ,.....	46
4.8.2	<i>Intégrale de contour « Intégrale J »</i>	47
4.8.3	<i>Intégrale d'interaction</i>	50
4.8.4	<i>Conclusion</i>	53

PARTIE 1 : PLASTICITE

1 INTRODUCTION

Les éléments de structures ou structures en génie civil peuvent être isostatiques ou hyperstatiques. Le traitement des structures hyperstatiques est laborieux et fait appel à des méthodes complexes et difficiles à utiliser manuellement. L'apport ces dernière années de l'outil informatique a facilité grandement cette opération. Les éléments de structures ou structures sont en général calculés à l'ELU et vérifiés à l'ELS. Mais aucun code ne spécifie les charges de ruine ou les mécanismes de ruine (manière de déformation d'une structure sous une combinaison de charges extérieures). Ceci ne peut avoir lieu qu'en laboratoire ou après un séisme sévère (structures ou éléments de structures poussés à l'extrême). La charge de ruine est de facto différente de la charge à l'ELU. L'objectif primordial de l'étude plastique des structures est de répondre à cette attente. C'est-à-dire la détermination de vraies charges de ruine et des vrais mécanismes de ruine, leur connaissance donne une idée précise sur la vraie marge de sécurité d'un élément de l'ouvrage ou de l'ouvrage lui-même

L'analyse plastique des structures hyperstatique consiste à considérer qu'au fur et à mesure que la charge augmente il y a apparition de rotules plastiques à chaque fois que le moment dans une section donnée atteint la valeur du moment plastique. Ce dernier est indépendant du chargement ou de sa nature. Il est une caractéristique de la section elle même et ne dépend que des caractéristiques géométriques et mécaniques de celle-ci (cf. annexe A). Évidemment si r rotules plastiques se forment au total, la structure devient un système isostatique (r étant le degré d'hyperstaticité) elle se transforme en un mécanisme immédiatement avec la naissance ou création ou développement de la (r+1)nième rotule plastique.

2 CALCUL NON LINEAIRES

2.1 MODELES DE COMPORTEMENTS NON LINEAIRES

2.1.1 Modèles globaux

Les modèles globaux reproduisent le comportement d'un élément de structure complet comme une poutre, un poteau, un mur ou même un étage complet de la structure. Les lois de comportement globales relient une déformation généralisée comme la courbure, l'allongement ou la distorsion (ϕ , ξ , γ) à sa contrainte généralisée associée (M, N, T). Elles traduisent le comportement non linéaire cyclique des sections qui bien que très variable en fonction de la géométrie, des matériaux de leurs caractéristiques mécaniques, présente généralement (AFPS, 2006) [1] :

- un comportement linéaire pour les faibles amplitudes de déplacement;
- une diminution de raideur induite par la fissuration du béton;
- une limitation de l'effort maximal correspondant à l'apparition des non linéarités au-delà d'un certain seuil de déplacement (plastification des aciers, adoucissement en compression du béton);
- des boucles d'hystérésis traduisant une dissipation d'énergie.

2.1.2 Modèles locaux

A ce niveau de modélisation, chaque matériau (maçonnerie, béton, armature, joint de mortier etc.) peut être représenté. L'association de ces lois permet donc de prédire le comportement d'un élément de structure mais la lourdeur des calculs limite leur utilisation à des structures ou des chargements simples. Néanmoins l'utilisation de ce niveau de modélisation pour identifier les paramètres des modèles globaux peut s'avérer utile pour l'étude de structures complètes sous chargement sismique (AFPS, 2006)[2].

2.1.3 Modèles semi-globaux

Plus économe en temps de calculs que la modélisation fine ou locale, la modélisation semi-globale permet d'accéder à la loi de comportement globale d'un élément, relation entre la déformation axial, de cisaillement ou la courbure et les contraintes généralisées associées, effort normal, tranchant ou moment fléchissant, à partir d'une description géométrique de la section basée sur des éléments bidimensionnels et des lois de comportement uniaxiales décrites précédemment type de modèle dit modèle à fibre ou modèle multicouche est basée sur une description géométrique à deux dimensions d'une section de poutre supposée se comporter sur le plan cinématique suivant les différentes théories de poutre (poutre de Bernoulli sans déformation de cisaillement et poutre de Timoshenko avec déformation de cisaillement). La cinématique de type poutre est associée à des lois de comportement uniaxiales locales permettant de déterminer les contraintes axiales puis en intégrant sur chaque section les efforts généralisés (moments, efforts normaux et efforts tranchants) (AFPS, 2006) [2].

2.2 ANALYSE NON LINEAIRE DES SECTIONS EN BETON ARME

Toute étude des sections d'un élément structural nécessite la connaissance d'au moins :

- la géométrie de la section.
- les matériaux constitutifs.

Les sections étudiées dans cette partie sont toutes réalisées en béton armé. Ce matériau composite est constitué de deux éléments aux caractéristiques différentes :

- Le béton présente des résistances à la compression assez élevées, de l'ordre de 25 à 60 MPa, mais sa résistance à la traction est faible, de l'ordre de 1/10 de sa résistance en compression. De plus, le béton a un comportement fragile.
- L'acier présente une très bonne résistance à la traction (et aussi à la compression pour des élancements faibles), de l'ordre de 500 MPa. De plus, son comportement est ductile, avec des déformations très importantes avant rupture (de l'ordre de la dizaine de %).

Pour pallier à la faible résistance du béton en traction et à sa fragilité, on lui associe des armatures en acier : c'est le béton armé.

2.2.1 Lois de comportement des matériaux

Nous présentons ci-dessous les lois de comportement des matériaux composant le béton armé :

- Béton (model de Mander)

Le béton peut se trouver sous deux états de contraintes différents :

- le premier nommé « non confiné » (matériaux ne se trouvant pas à l'intérieur du volume sujet à l'emprise des armatures : étriers, barres longitudinales, figure 1(B)), correspondant à un état uniaxial.
- le second nommé « confiné » (matériaux se trouvant dans le volume d'emprise des aciers, figure 1(C)), correspondant à un état d'étreinte triaxiale (Luis A. Montejo, Mervyn J. Kowalsky, 2007) [3].

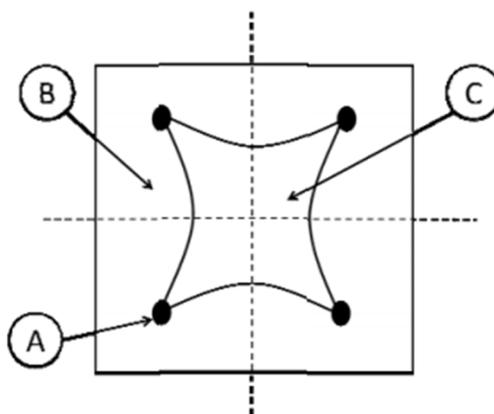


Fig. 1 Disposition des différents matériaux d'une section carrée (Source : Olivier GERMAIN, 2006)[4]

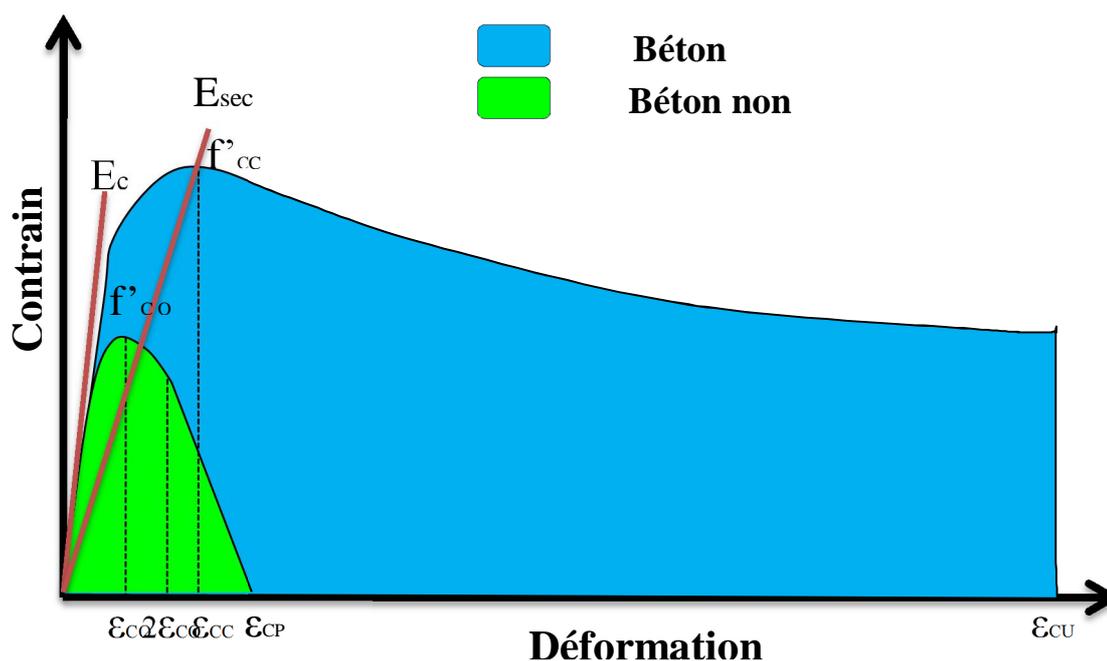


Fig. 2 Model de Mander pour le béton confiné et non confiné (Source : Luis A. Montejo, Mervyn J. Kowalsky, 2007) [3].

- Acier (model de King)

Travaillant aussi bien en traction qu'en compression en fonction des sollicitations, représentées sur la Figure 2 (A).



Fig. 3 Diagramme « contrainte – déformation » de l'acier
(Source : Luis A.Montejo, Dr Mervyn J.Kowalsky, 2007) [3].

Ce diagramme se scinde en deux ou trois phases distinctes:

- 1) la partie élastique linéaire, caractérisée par le module d'élasticité de Young (E [N/mm²]) et par la limite d'écoulement aussi appelée limite d'élasticité (f_y [N/mm²]);
- 2) la partie plastique quasiment horizontale, située à un niveau de contrainte équivalent à celui de la limite élastique. Tous les aciers n'ont pas cette particularité;
- 3) la partie de raffermissement caractérisée par une augmentation de la force jusqu'au maximum (f_{su} [N/mm²]). Au maximum de force, on observe l'apparition de la striction qui s'accompagne d'une diminution de charge jusqu'à l'obtention de la rupture (Olivier GERMAIN, 2006) [4].

2.2.2 Lois de comportement des sections

Plusieurs lois de comportement utilisées dans l'analyse non linéaire des sections en béton armé comme la relation moment-courbure et la courbe d'interaction M-N.

Dans notre travail, nous avons utilisé la loi de comportement moment-courbure.

- Moment-courbure

La loi moment-courbure établit la relation entre la courbure et le moment de flexion d'une section en béton armé « donnée » à effort normal constant fixé. Elle permet de décrire le comportement mécanique des sections d'un élément structural travaille en flexion.

La loi moment-courbure d'une section dépend de ses caractéristiques géométriques, des caractéristiques mécaniques des matériaux qui la composent (béton, acier...) mais aussi du ferrailage longitudinal, transversal (le taux de ferrailage...) et de l'effort normal de la

section. On considère l'hypothèse d'Euler-Bernoulli qui suppose que les sections planes restent planes après déformation.

Une analyse de section en béton armé montre 3 états principaux (figure 4):

- fissuration du béton après une brève phase élastique (non fissuré),
- plastification des aciers, après ouverture des fissures,
- l'état ultime et après la ruine de la section qui se traduit par l'écrasement du béton en compression, la rupture des aciers en traction.

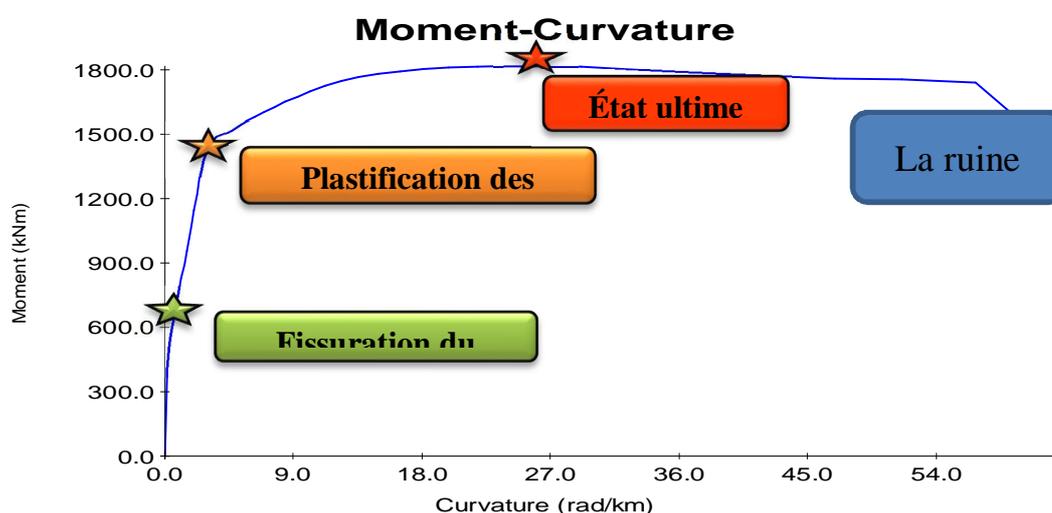


Fig. 4 Diagramme moment-courbure.

Dans la phase élastique, les sollicitations sont petites et on peut admettre que le comportement de l'acier et du béton est encore linéaire élastique : $M = EI \times \varphi$ Avec M le moment de flexion, E le module de Young homogénéisé, I l'inertie de la section et φ la courbure.

- Courbe d'interaction M-N

Les courbes d'interaction M-N sont des outils souvent utilisés comme aide au dimensionnement. Ces courbes sont souvent utilisées pour déterminer ou de vérifier aisément, une section de géométrie et d'armature donnée, la capacité portante de la section (Olivier GERMAIN, 2006) [4]. Les courbes sont tracées à partir des équations d'équilibre de la section et définissent la zone où l'équilibre de la section est possible et la zone non autorisée. Nous pouvons définir trois zones de comportement différent (Figure 5) :

- zone 1 : effort normal prédominant et moment faible;
- zone 2 : la flexion composée;
- zone 3 : la flexion prédomine.

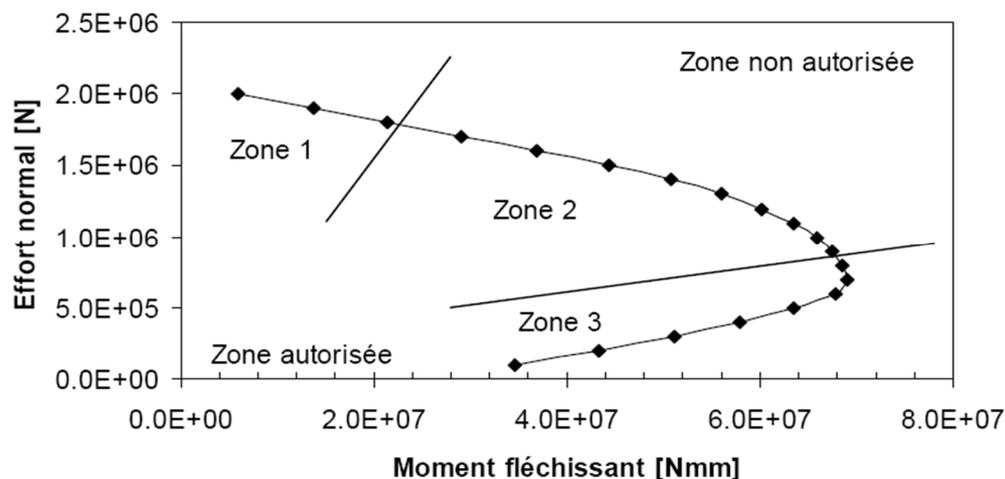


Fig.5 : Courbe d'interaction M-N (Source : Olivier GERMAIN, 2006).[4]

2.3 Rotules plastiques

2.3.1 Définition de la rotule plastique

Ce sont les zones d'un élément de structure (fûts, poutres, poteaux, voiles,...) subissant des déformations irréversibles et capables de dissiper l'énergie sous sollicitations alternées, au delà d'un seuil de sollicitation elle se comporte comme une articulation autorisant la rotation des autres parties de l'élément.

La figure 6 illustre les rotules plastiques au niveau des piles des ponts provoqués par le séisme de Northridge 1994.

On désigne par rotule plastique la dimension fictive qui permet le calcul simplifié des déformations d'un élément de construction en cours de plastification. Toute rotule plastique est caractérisée par sa position, ses rotations (a et b) et la valeur de la longueur plastique L_p qui dépend de plusieurs facteurs à savoir: le niveau de l'effort axial, le niveau de la contrainte de cisaillement dans les rotules plastiques, les propriétés mécaniques des armatures transversales et longitudinales, la résistance du béton et le confinement des sections surtout au niveau des zones plastiques.



Fig. 6 Rotules plastiques des piles des ponts(Source : Moehle, J.P., Eberhard, M.O, 2000) [5].

L'emplacement d'une rotule plastique dans un élément structural est défini par sa longueur (L_p), pour mieux comprendre cette dernière a prend comme exemple un modèle simplifié de poteau console.

La longueur de la zone plastifiée lorsque la courbure ultime est atteinte en pied de poteau, peut être calculée à l'aide d'une loi moment-courbure simplifiée trilineaire : la rigidité fissurée est prise comme rigidité initiale et un écrouissage est considéré après la plastification.

Notons que ;

E_p : Pente de la relation moment-courbure après plastification;

M_y : Moment de plastification;

ϕ_y : Courbure de plastification;

ϕ_u : Courbure ultime.

Le moment ultime M_u est relié aux caractéristiques précédentes à l'aide de la relation suivante:

$$M_u = M_y + E_p (\phi_u - \phi_y) \tag{1}$$

Pour un poteau encasté en pied et soumis à un effort horizontal en tête, la répartition de moment est linéaire en fonction de la hauteur (Fig. 7 (b)) alors que la répartition de courbure est bilinéaire (Fig. 7 (c)). Lorsque le moment ultime est atteint à la base du poteau, la hauteur de la zone plastifiée H_p vaut :

$$H_p = L \left(\frac{\phi_y}{\phi_u} \right) = \frac{(M_y)}{(E_p \phi_u - M_y)} \tag{2}$$

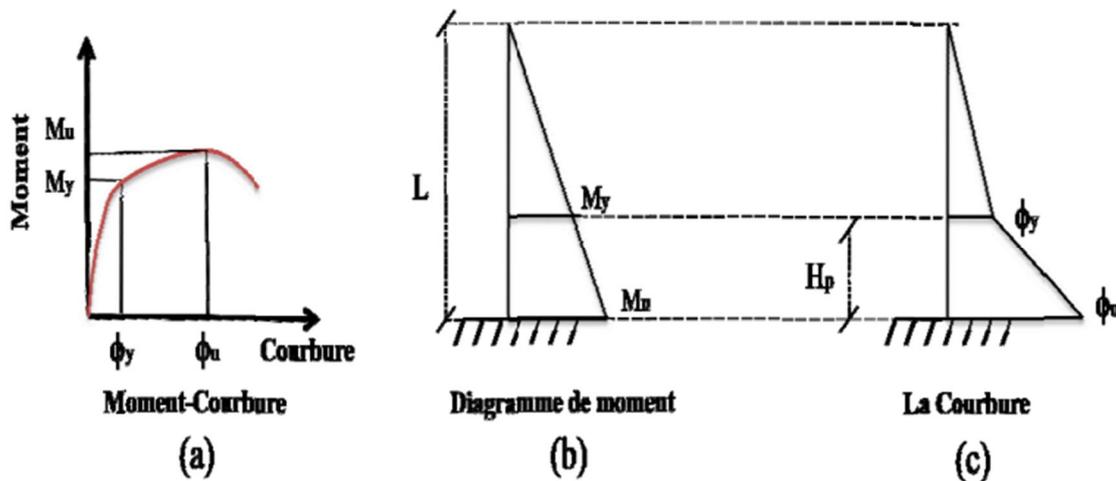


Fig. 7 Répartition de moment et de courbure sur la hauteur d'un poteau.

Cette relation montre très bien qu'en l'absence d'écroutissement après plastification ($E_P = 0$), la hauteur de la zone plastifiée (et donc la rotation plastique de ruine) est nulle.

Avec ce modèle très simplifié, nous pouvons décomposer le déplacement (ou la rotation) en tête en une partie provenant de la déformée élastique du poteau et une partie provenant de la rotation plastique de la rotule .

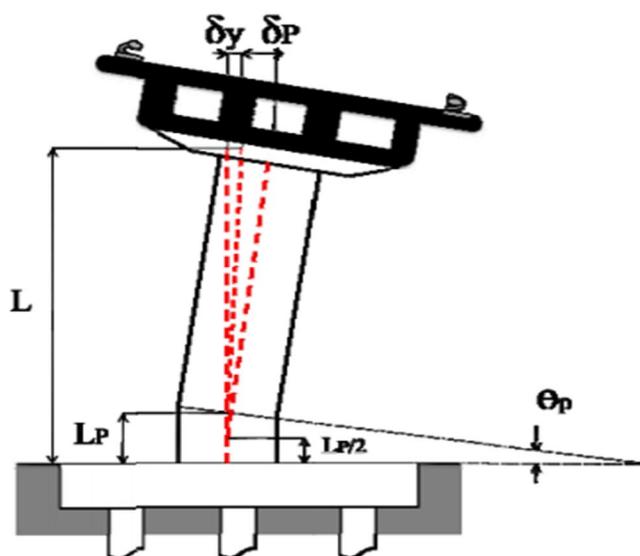


Fig. 8 Modèle de rotule plastique concentrée.

Priestley (1997) et Paulay (1992) [6] utilisent la notion de longueur de rotule plastique pour définir une rotation de ruine, cette longueur L_P étant définie comme la longueur permettant de retrouver la rotation de ruine plastique expérimentale θ_P si elle est multipliée par une courbure plastique ultime (Figure 8).

Soit :

$$\theta_P = (\varphi_u - \varphi_y) \cdot L_P \quad (3)$$

Il faut noter qu'avec cette définition, la longueur de rotule plastique L_P vaut, si elle est calculée analytiquement, la moitié de la hauteur plastifiée H_p calculée précédemment.

2.3.2 Détermination de la longueur plastique:

Le déplacement d'un élément structural peut être relié à sa courbure à travers le concept de rotule plastique qui apparaît lors de la déformation inélastique de cet élément. Cette déformation se manifeste sur une longueur plastique notée L_p à l'approche de la section critique où le moment de flexion dépasse le moment de plastification. Plusieurs auteurs ont donné des expressions pour le calcul de la longueur plastique en se basant sur des

recherches expérimentales avec plusieurs paramètres mis en jeu à savoir : la position du point d'inflexion Z, la hauteur utile de la section transversale d et le diamètre des armatures longitudinales db.

L'évaluation du déplacement total d'une structure en béton armé travaillant dans le domaine plastique peut se faire comme suit:

$$\Delta = \Delta + \Delta = \dots + \dots \quad (- 0.5 \dots) \tag{4}$$

En simplifiant l'équation précédente, Park et Paulay obtiennent une relation entre la ductilité de déplacement $\mu\Delta$ et la ductilité de courbure $\mu\phi$ [6]:

$$\Delta = 1 + 3 \dots - 1 \dots (1 - 0.5 \dots) \tag{5}$$

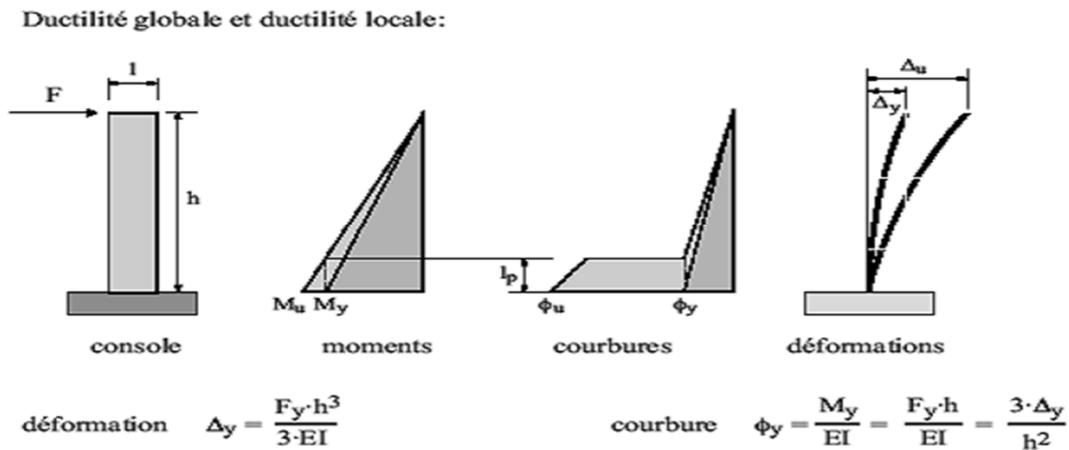


Fig. 9 Définition de la longueur plastique.

Plusieurs expressions de la longueur plastique ont été élaborées expérimentalement par plusieurs auteurs. Parmi ces derniers, on cite Mattock qui a conduit 37 essais sur des poutres en béton armé et a examiné l'effet de divers paramètres à savoir: contrainte de compression du béton f_c qui a été variée de 28 à 41 Mpa, la hauteur utile de la poutre d variant de 25 à 50 cm, le rapport z/d, la limite élastique des aciers f_y et le ratio des armatures longitudinales p_l . Comme résultats, il a constaté que la longueur plastique croît avec l'augmentation du rapport z/d et proposa par la suite une formule pour le calcul de la longueur plastique: [7]

$$L_p = 5 \cdot d + d^{0.5} (Z/d) \tag{6}$$

Cette expression a été ensuite révisée par le même auteur pour aboutir enfin à une expression plus simple pour l'estimation de L_p .

$$L_p = 5 \cdot d + 0.05 Z \tag{7}$$

Similairement aux travaux menés par Mattock, Corely entama lui aussi des essais sur des poutres en béton armé soumises à des charges concentrées. Le confinement et la dimension de la section de la poutre étaient ses paramètres. En résultat, il conclut que la longueur plastique est fonction de la géométrie de la poutre et que la dimension de cette poutre n'a pas une influence significative sur la capacité de rotation de cette dernière et proposa par la suite l'expression suivante [7] ;

$$L_p = 0.25.d + 0.075z \quad (8)$$

De leur part, Park et al [8] ont entamé une évaluation de la longueur plastique ayant comme paramètre l'application d'un effort axial croissant (variant de $0.2f_c A_g$ à $0.6f_c A_g$). Ils conclurent que la longueur plastique n'est pas influencée par la variation de l'effort axial mais prend plutôt une valeur approximative égal à $0.42h$ où h est la hauteur totale de l'élément. Pour cette raison ils suggèrent une expression empirique pour la détermination de la longueur plastique: $L_p = 0.4h$ pour les poteaux en béton armé.

Priestley et Park quant à eux proposèrent l'équation suivante pour la détermination de la longueur plastique:[8]

$$L_p = 0.08.z + 6. d_b \quad (9)$$

Dans cette équation, un nouveau paramètre apparaît, c'est le diamètre des armatures longitudinales d_b pour tenir compte de l'infiltration des déformations au niveau des nœuds ou des fondations alors que la flexion des poteaux est considérée par le premier terme de l'équation. Paulay et Priestley révisent l'expression donnée précédemment tout en tenant compte du taux d'armature de flexion et donnent la nouvelle expression comme suit [6]:

$$L_p = 0.08 \times L + 0.022 \times f_y \times d_b \quad (10)$$

où ;

f_y : Contrainte de plastification des aciers;

d_b : Diamètre des barres de flexion.

L : et de la longueur d'acier plastifié dans l'ancrage.

Dans le calcul ultérieur de la longueur plastique, c'est l'expression de Paulay et Priestley qui va être prise en compte vu qu'elle tient compte de l'écrouissage de la section à l'encastrement et de l'extension de l'allongement plastique due aux fissures inclinées de flexion accompagnée d'effort tranchant caractérisé par le facteur $0.08z$, de la pénétration de la plastification dans l'élément caractérisé par le facteur $0.022.f_y.d_b$. [6]

2.3.3 Calcul de la rotation de ruine

La ruine par flexion des structures en béton armé montre au niveau local des éléments endommagés trois phases principales: la fissuration du béton (de la section), la plastification des aciers et enfin la ruine de la section.

Pour mieux illustrer ce phénomène, une relation moment courbure doit être établi. La détermination de la courbure ultime (de plastification) peut être faite selon plusieurs méthodes améliorées pour tenir compte du glissement acier-béton et de l'effort tranchant qui incline les fissures et fait augmenter la longueur des rotules plastiques.

La relation moment-rotation d'un élément travail à la flexion peut être calculée à partir de la courbe idéalisée de moment-courbure (trilinéaire). Les valeurs du moment-rotation au fissuration de béton, plastification des aciers, et à l'état ultime sont présentées dans les formules suivante (Shunsuke, 1974)[9]:

Fissuration de béton (cracking 'c') :

$$= \frac{M_c}{EI_0} \quad (11)$$

où ;

θ_c : Rotation due à la fissuration.

L : Longueur de l'élément (sans compter les zones rigides).

M_c : Moment de fissuration.

EI_0 : La rigidité initiale.

Plastification des aciers (yielding 'Y'), on a ;

$$= \theta_c + \theta_y \quad (12)$$

où ;

θ_y : Rotation de plastification

M_y : Moment de plastification

θ_c : Courbure de plastification

θ_c : Courbure de fissuration

$$= \frac{M_y}{EI_0} + \theta_c$$

L'état ultime (ultimate 'U'), on a ;

$$= \frac{(\theta_c)(L)(\theta_c)}{6} + 2 \theta_c \quad (13)$$

avec ;

$$= \theta_u \quad \text{: Rotation ultime.}$$

= — : Moment ultime.

$$= \frac{-}{-}$$

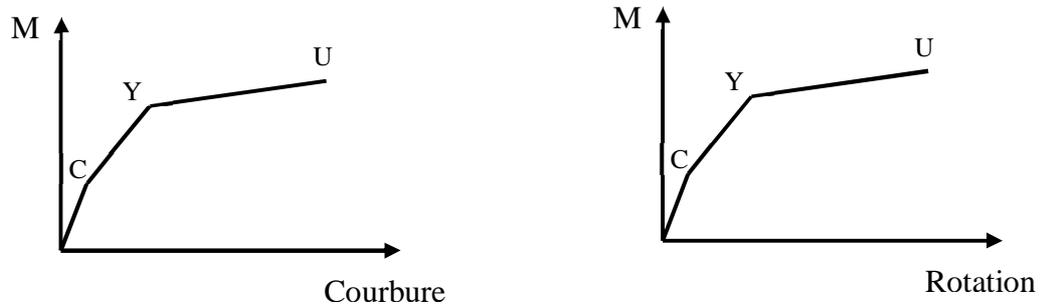


Fig. 10 Relation M-courbure, et M-rotation.

2.4 Courbe de capacité

Cette courbe constitue une caractéristique intrinsèque de la structure du point de vue de l'effet des actions horizontales de nature statique ou dynamique. Elle fournit une estimation des mécanismes de plastification attendus et de la distribution de l'endommagement progressif, en fonction de l'intensité des forces et des déplacements horizontaux (Figure 11).

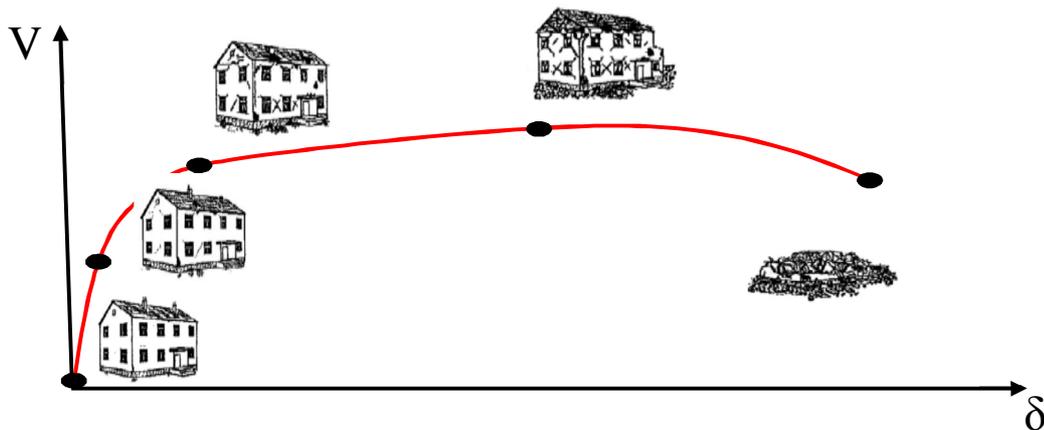


Fig. 11 Niveaux d'endommagement.

D'après la Figure 11 on remarque que la courbe est composée de quatre segments, chaque segment correspond à un niveau d'endommagement.

Le premier niveau correspond au comportement élastique de la structure et représente le niveau de conception parasismique habituel. Il indique par conséquent un état d'endommagement superficiel (ou bien de non endommagement).

Le deuxième niveau d'endommagement correspond à un niveau de dommage contrôlé. La stabilité de la structure n'est pas en danger, mais toutefois un endommagement mineur est susceptible de se développer.

Le troisième niveau représente un état d'endommagement avancé, sa stabilité étant en danger. Au-delà de ce niveau, la structure est susceptible à l'effondrement, ne présentant aucune capacité de résistance.

3 CHARGES DE RUINE ET MECANISMES DE RUINE POUR DES ELEMENTS DE STRUCTURES ET DES PORTIQUES SIMPLES.

3.1 Définition des mécanismes de ruine

Plusieurs mécanismes de ruine peuvent apparaître lors du déroulement des séquences de rotulation de la structure. Ces mécanismes sont en nombre de trois et sont définis comme suit:

Mécanisme 1: Caractérisé par l'apparition des rotules plastiques en premier lieu au niveau des poteaux pouvant donner naissance à un niveau soft, ce mécanisme engendre une rupture précoce de la structure.

Mécanisme 2: Considéré comme mécanisme généreux, il est caractérisé par l'apparition des rotules plastiques au niveau des poutres et à la base de la structure permettant son mouvement avec le sol lors d'un séisme et une meilleure dissipation d'énergie.

Mécanisme 3: C'est le mécanisme mixte caractérisé par l'apparition des rotules plastiques au niveau des poutres et des poteaux en même temps.

3.2 Comportement d'un élément structural simplement appuyé en flexion simple.

3.2.1 Élément en charpente métallique

Soit une poutre en charpente métallique, chargée au milieu de sa portée par une force concentrée, P , figure.12-a. Dans un premier temps, la répartition des contraintes au niveau de la section médiane (section critique) est linéaire. C'est la phase élastique du comportement du matériau, si on augmente la charge, les contraintes ne sont plus proportionnelles aux déformations et les fibres extrêmes se plastifient graduellement de haut en haut et de haut en bas figure.12-c, la section se plastifie entièrement quand le moment fléchissant de cette dernière atteint le moment plastique M_p , et une rotule plastique se forme au niveau de cette section critique. A cet effet, la poutre est constituée de deux éléments rigides reliés par une articulation figure 12-d. On dit qu'il y a plastification totale de la section et la poutre se transforme en un mécanisme figure 12-b. Il est facile de trouver la charge de ruine, P_c , de la poutre et ce en égalant le moment maximum dû à la charge appliquée au moment plastique M_p .

$$= - \quad \text{d'où ;} \quad = \text{---}$$

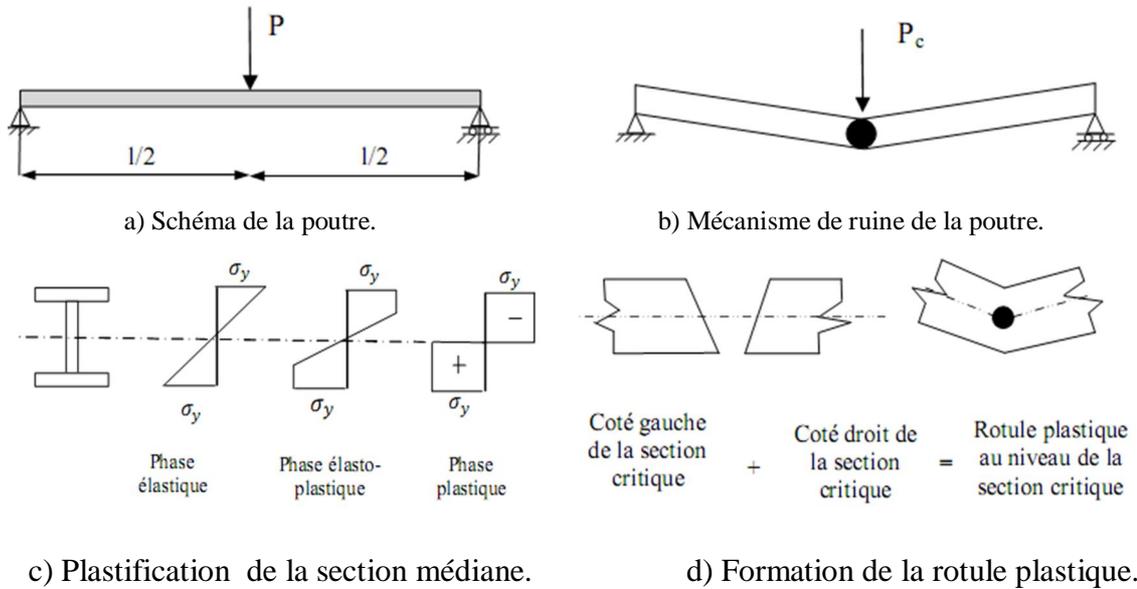


Fig.12 : Comportement d'une poutre en charpente métallique sous charge croissante

3.2.2 Élément en béton armé

Contrairement à la charpente métallique, le béton armé est caractérisé par son hétérogénéité, sa faiblesse en traction et au phénomène de fissures. Pour cela, le comportement d'une poutre en béton armé reposant sur deux appuis simple soumise à une charge concentrée, P, figure.13, progressive croissant de zéro jusqu'à la rupture, passe par les différentes étapes suivantes

a- 1 ème étape

Pour les petites valeurs de, P, n'entraînant pas des fissurations dans le béton tendu, dans cette étape toutes les sections de la poutre se comportent élastiquement. La rigidité en flexion est donnée par la relation : $K = E_c I$, E_c : Module d'élasticité du béton, I : Moment d'inertie de la section totale rendue homogène.

Les déformations répondent sensiblement aux lois de la résistance des matériaux, étant donné que la rigidité est constante sur la longueur de la poutre, la courbure de la déformée est directement proportionnelle au moment fléchissant, Figure.13-b. $\gamma_e = M / E_c I$ tel que M désigne le moment fléchissant de la poutre.

b- 2 ème étape

Dans la seconde étape, les valeurs de P entraînent la fissuration du béton tendu dans les sections les plus sollicitées figure.13-e, mais on peut encore considérer que la poutre se comporte élastiquement jusqu'à une certaine charge (P_e), Figure.15. Dans cette étape la rigidité chute brusquement au fur et à mesure de l'apparition des fissures, cependant il est difficile d'attribuer une valeur au facteur de rigidité K. En effet, le module d'élasticité E_c

varie avec le temps (phénomène de fluage) et le moment d'inertie est, lui, très approximatif, car : Dans la seconde étape, les valeurs de P entraînent la fissuration du béton tendu dans les sections les plus sollicitées figure.12-e, mais on peut encore considérer que la poutre se comporte élastiquement jusqu'à une certaine charge (P_e), figure.15. Dans cette étape la rigidité chute brusquement au fur et à mesure de l'apparition des fissures, cependant il est difficile d'attribuer une valeur au facteur de rigidité K . En effet, le module d'élasticité E_c varie avec le temps (phénomène de fluage) et le moment d'inertie est, lui, très approximatif, avec les constatations suivantes ;

- Le long de la poutre toutes les sections ne sont pas fissurées et notamment vers les appuis où le moment fléchissant tend vers zéro ;
- Dans les parties fissurées, le béton compris entre deux fissures successives est plus ou moins pris en compte et la profondeur des fissures varie d'une section à l'autre ;
- Le coefficient d'équivalence acier / béton « $n = E_s / E_c$ » est supposé constant alors que sa valeur varie du fait que E_c varie dans le temps , En fin, l'armature n'a pas la même section tout le long de la poutre

c- 3^{ème} étape

Si la charge continue à augmenter, l'armature s'allonge et le béton commence à se raccourcir. Les fibres comprimées de la section la plus sollicitée se plastifient et leurs raccourcissements continuent à augmenter jusqu'à une valeur limite égale à ϵ_{cu} au niveau de cette section critique. Lorsque sa contrainte de rupture est atteinte, le béton équilibre encore la composante de compression du couple de flexion et comme l'armature tendue n'a pas atteint un allongement de rupture et peut équilibrer la composante de traction, le moment extérieur de flexion est équilibré dans cette section où la rotation est très importante, on dit qu'il y a eu formation d'une rotule plastique figure.13-d.

Au chargement, la poutre présente une courbure permanente figure.13.c, et la section est considérée comme fragile vis-à-vis des chargements répétés et surtout alternés. En effet, sous des actions réversibles et répétées (actions cycliques), il y a un affaiblissement de la rigidité qui provient en particulier de la chute de la contrainte d'adhérence consécutive à la détérioration du béton. La figure.13 représente les trois étapes par un diagramme momentcourbure (M, χ), le diagramme charge-déplacement (P, δ) est représenté sur la Figure 15 suivante ;

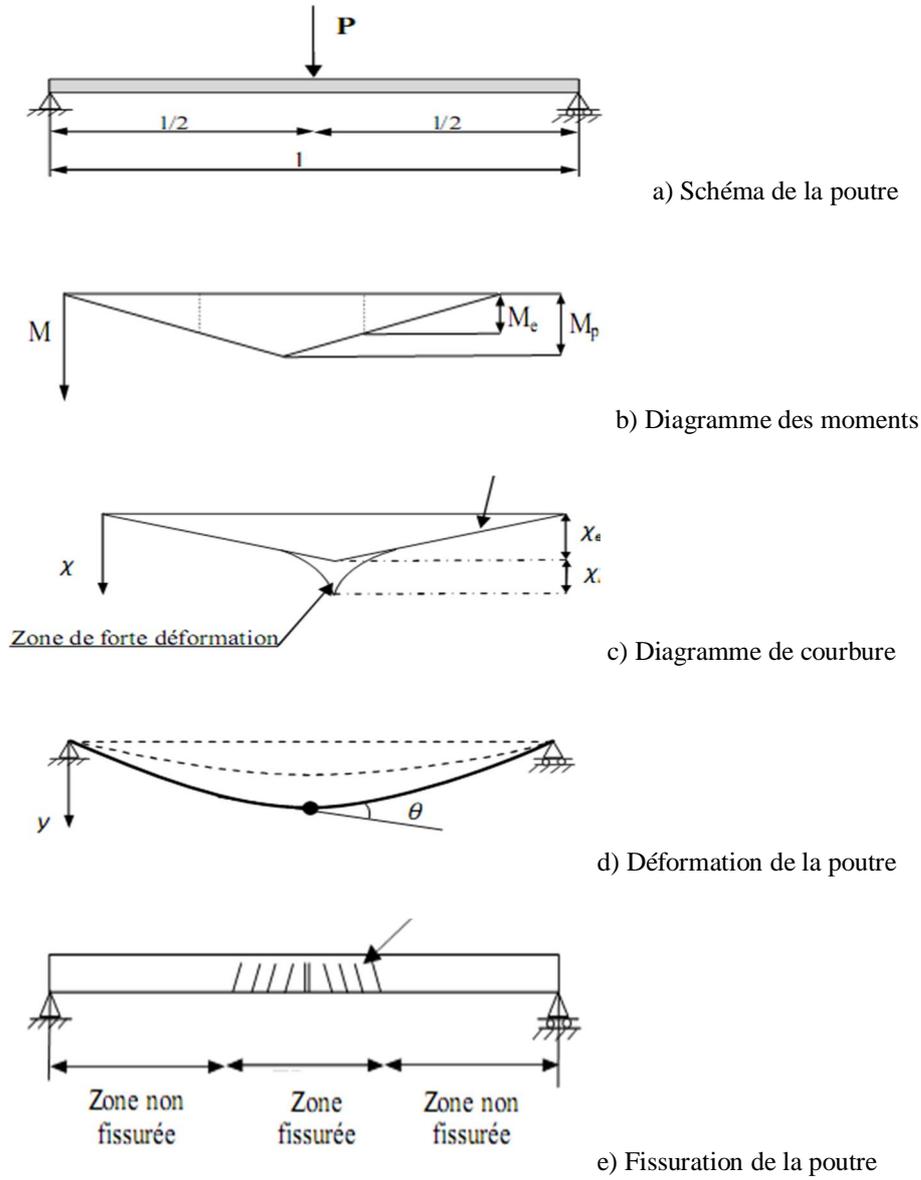


Fig. 13 : Comportement d'une poutre en Béton armé sous charge croissante.

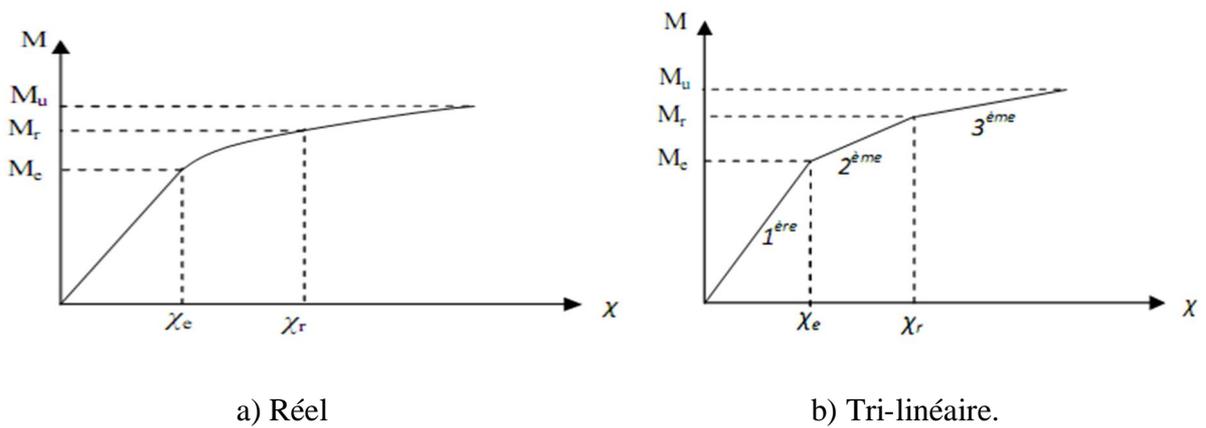


Fig. 14 Diagramme moment-courbure pour la poutre en béton armé.

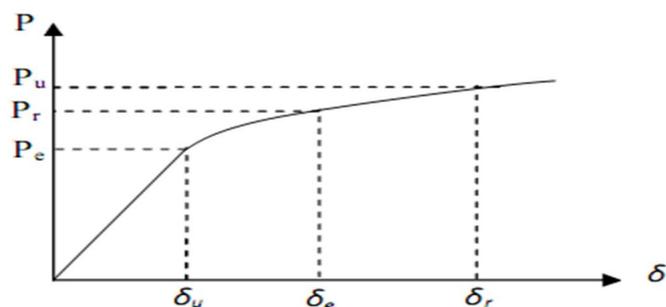


Fig .15 Diagramme charge-déplacement.

3.3 Comportement d'un portique simple sous l'action de charges concentrées verticales et horizontales croissantes

Pour mieux comprendre le comportement des portiques hyperstatiques soumis à des combinaisons de charge horizontale et verticale croissante jusqu'à la ruine, il a été jugé utile de considérer carrément un exemple d'un portique simple et d'étudier son comportement à savoir la naissance successive des rotules plastiques au niveau des sections critiques, et bien sûr illustrer quelques théorèmes importants et essentiels de l'analyse plastique des structures. Les caractéristiques géométriques et mécaniques du portique simple et les points d'application des charges concentrées verticales, λV , et horizontales, λH , et les sections critiques de A à E, sont représentés dans la figure.16.

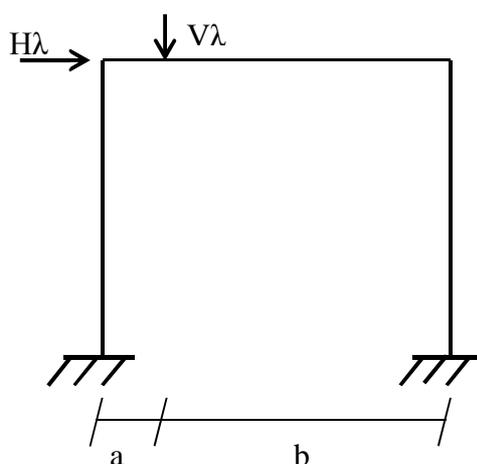


Fig. 16 : Portique simple à une travée et un étage.

3.3.1 Traitement du portique

Le portique représenté dans la figure.16 supporte les charges concentrées verticales λV et horizontales λH , où λ est le facteur de charge. Il est supposé initialement que $V=H=1$ KN, le comportement du portique quand λ est augmenté, est résumé dans la figure.16. Au début de ce processus, le comportement du portique est élastique (c'est-à-dire le comportement

des sections critiques est élastique), et une analyse élastique donne un diagramme des moments fléchissant représenté dans l'étape N°1. Quand $\lambda=38.91$ le plus grand moment fléchissant se trouve au niveau de l'encastrement droit (point E), ce dernier devient égal au moment plastique et une rotule plastique se forme au niveau de cette section critique. Evidemment, la structure entière en dehors de la section, E, est encore élastique et le demeure quand la valeur du facteur de charge, λ , est au-dessus de 38.91. La section, E, se comporte comme une rotule plastique, de ce fait ; peut pivoter librement. Le moment fléchissant au point E doit rester égal au moment plastique.

	Portique sous charges Unitaires (kN)	DMF sous charges Unitaires (kN.m)	DMT (kN.m)
Etape N°1		<p>$\lambda=38.91$</p>	<p>● Rotule plastique</p>
Etape N°2	<p>○ : Rotule mécanique</p>	<p>$\lambda=45.91$</p>	
Etape N°3		<p>$\lambda=46.58$</p>	
Etape N°4		<p>$\lambda=49.9$</p>	

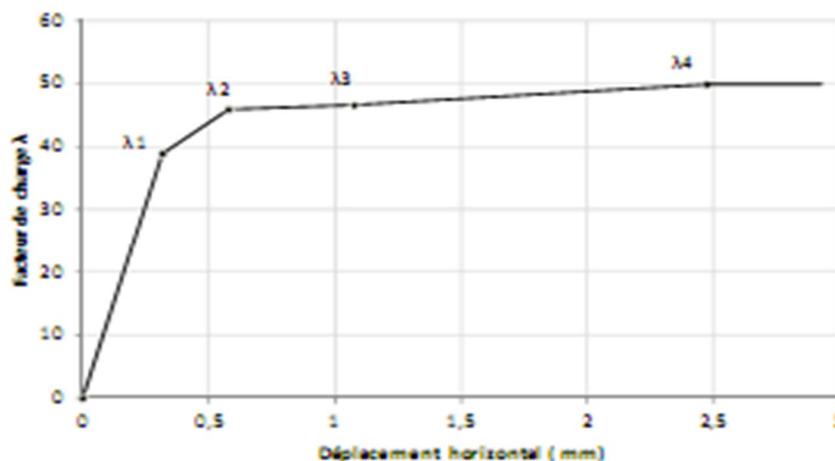


Fig. 17 Courbe facteur de charge λ en fonction du déplacement horizontal du portique simple.

3.4 Théorèmes fondamentaux de l'analyse plastique des structures

3.4.1 Introduction

L'analyse plastique des structures a pour objet de calculer la charge réelle de ruine d'une partie des structures ou de structures et les mécanismes de ruine correspondants. La détermination du facteur de charge de ruine, λ_c , ainsi que les mécanismes de ruine des structures dépend essentiellement de la satisfaction des trois conditions du vrai mécanisme de ruine à savoir la condition d'équilibre, la condition d'écoulement et la condition de mécanisme. La figure.18 présente les trois conditions, où les flèches indiquent les conditions qui ont été satisfaites.

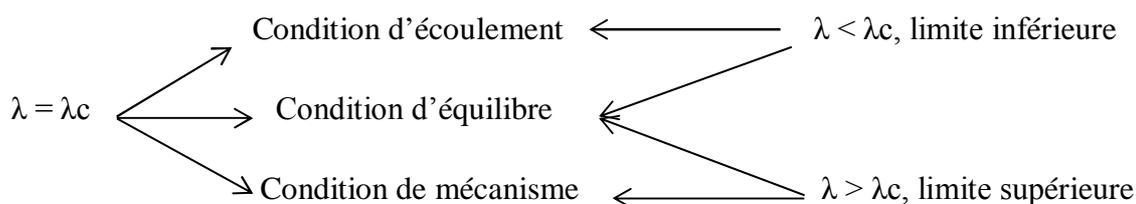


Fig. 18 Condition du vrai mécanisme de ruine en fonction de λ .

- Théorème de la limite inférieure** Si, dans une structure soumise à un chargement défini par un facteur de charge positif, λ , une distribution des moments fléchissant satisfaisant les conditions d'équilibre et d'écoulement peut être trouvée, ensuite λ est moins que, ou égal au facteur de charge de ruine λ_c . Dans ce cas la valeur de λ est une limite inférieure pour λ_c .
- Théorème de la limite supérieure** Dans ce cas la distribution des moments fléchissant dans les structures ne vérifie que les conditions d'équilibre et de mécanisme, le facteur de charge correspondant, λ , est supérieur ou égal au facteur de charge de ruine, λ_c , la valeur de ce facteur est une limite supérieure pour λ_c .

- c- Théorème de la l'unicité Si une structure est sujette à un chargement défini par un facteur de charge positif, λ , et une distribution des moments fléchissant qui satisfait les trois conditions peut être trouvée, alors $\lambda = \lambda_c$. Il est impossible d'obtenir toute autre distribution des moments fléchissant pour n'importe quelle autre valeur de λ qui satisfait les trois conditions simultanément.

3.5 Méthodes utilisées pour le calcul des charges de ruine pour des éléments structuraux ou structures simples.

3.5.1 Introduction

Il a été annoncé précédemment que la ruine d'une structure se produit par la formation d'un nombre suffisant de rotules plastiques aux endroits des sections critiques (plastifiées), ceci engendre une diminution de la rigidité accompagnée à chaque fois d'une redistribution des efforts internes, jusqu'à ce que la structure devienne hypostatique. A ce stade le mécanisme de ruine est atteint et la charge devient la charge de ruine. Cette charge est évidemment différente de la charge à l'E.L.U. et la différence représente la vraie marge de sécurité pour la structure.

Les outils théoriques nécessaires pour cette détermination sont le théorème du moment libre et des moments de réaction et la méthode basée sur les travaux virtuels.

3.5.2 Calcul de la charge de ruine par la méthode du moment libre

Il est possible de déterminer le mécanisme de ruine des éléments structuraux ou structures simples et de tracer leurs diagramme des moments fléchissant à la ruine par la méthode du moment libre et de réaction et ce sans passer par aucune analyse. Une fois le diagramme des moments est déterminé, on peut vérifier la satisfaction des trois conditions du vrai mécanisme de ruine et calculer facilement la charge de ruine. Cette méthode est basé sur le principe de :

$$\mathbf{Mp1} \quad + \quad \mathbf{Mp2} \quad = \quad \mathbf{Mp3} \quad (14)$$

Moment fléchissant réel au point d'application de la charge	Moment fléchissant de réaction au point d'application de la charge	Moment fléchissant libre au point d'application de la charge
---	--	--

La charge de ruine peut être déterminée facilement de cette relation vu que le moment fléchissant libre au point d'application de la charge, $Mp3$, est en fonction de cette dernière.

3.5.3 Calcul de la charge de ruine par la méthode des travaux virtuels

La charge de ruine peut être déterminée par une deuxième méthode, cette dernière basée sur le principe des déplacements virtuels, Le travail produit par l'effort extérieur, F , doit

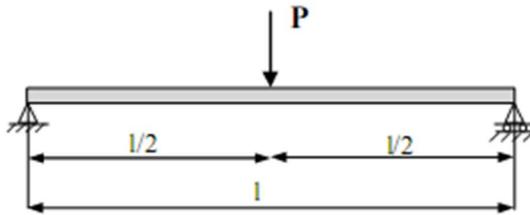
être égal au travail produit par l'effort intérieur, c'est-à-dire au travail du moment M_p . La charge de ruine produit un déplacement virtuel δ et un travail extérieur défini par le produit $F \cdot \delta$, le moment plastique M_p produit une rotation virtuelle θ , Le travail virtuel intérieur est $M_p \cdot \theta$, la charge de ruine des éléments structuraux ou structures simples peut s'obtenir à partir de l'égalité suivante :

$$\sum P_i \cdot \delta_i = \sum M_{pi} \cdot \theta_i \tag{15}$$

3.5.4 Exemples d'application

i)- Poutre simplement appuyée par la Méthode du moment libre.

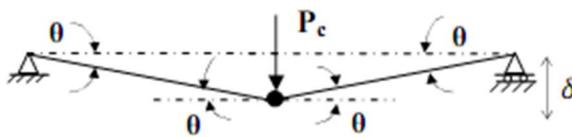
La charge de ruine d'une poutre simplement appuyée soumise à une charge concentrée au milieu de sa portée Figure 19-a peut être déterminée par cette méthode, le degré d'hyperstaticité de cette dernière est $r = 0$. Le nombre de rotules nécessaires pour qu'elle devienne un mécanisme est : $n = r + 1 = 1$.



a) Schéma de la poutre



b) Diagramme du moment fléchissant



c) Mécanisme de ruine

Fig. 19 Poutre simplement appuyée.

La ruine de cette poutre aura lieu lorsqu'une rotule plastique se produit au niveau du point d'application de charge (section critique) où le moment fléchissant est égal au moment plastique. On connaît l'allure des moments fléchissant réels au point d'application de la charge lors de la ruine, M_p . Le moment fléchissant libre au point d'application de la charge prend la valeur de $P \cdot l/4$ figure. 19-b, dans ce cas (poutre isostatique), le moment fléchissant de réaction au point d'application de la charge est nul d'où la relation (15) Devient :

$$= - , \quad = -$$

ii) Poutre simplement appuyée par la Méthode des travaux virtuels

La charge de ruine de cette poutre isostatique peut être déterminée par la méthode des travaux virtuels, Le travail produit par l'effort extérieur, P_c doit être égal au travail produit par l'effort intérieur, M_p . La géométrie de la structure Figure 19-c, nous permet d'écrire l'équation :

L'égalité des travaux virtuels, lors de la ruine nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
 * &= .2 \\
 * - &= .2
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

d'où ; = —

3.6 Détermination de charges de ruine et mécanisme de ruine d'un portique simple

3.6.1 Introduction

Le présent paragraphe a pour objet la détermination des charges de ruine et les mécanismes de ruine d'un portique simple composé d'une travée et un niveau Figure 20. Ce portique est trois fois hyperstatique, il ne devient un mécanisme qu'après la formation de quatre rotules plastiques. A cet effet les charges de ruine et les mécanismes de ruine de ce portique sont déterminés par une série de combinaisons des mécanismes élémentaires et ce à cause de la complexité de ce dernier Comparativement aux poutres doublement encastrees. Cette méthode est basée sur le principe des déplacements virtuels, elle consiste à combiner les différents mécanismes élémentaires de ruine, m , ($m = p - r$, où p représente le nombre de sections critiques) jusqu'à l'obtention du plus petit facteur de charge, λ_c . Le mécanisme et la charge de ruine de chaque combinaison sont obtenus à partir de l'égalité du travail produit par les charges extérieures $\sum F_i \cdot \delta$ et le travail produit par les efforts intérieurs $\sum M_p \cdot \theta$ (ce travail est obtenu par rotation des différentes rotules plastiques)

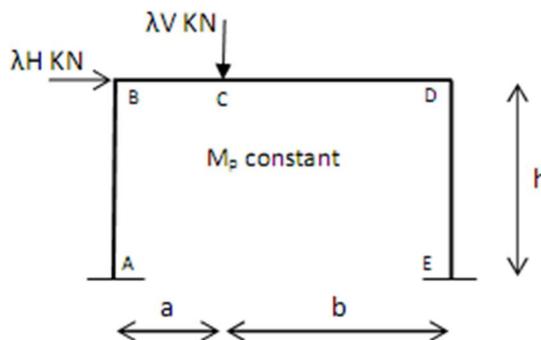


Fig. 20 Portique simple à une travée et un étage.

Les possibles déformées du portique sont représentées dans les figures 20 et dépendent essentiellement de la valeur des deux charges λV et λH . Le portique se transforme en un mécanisme de panneau ou « Sway mechanism » si la charge horizontale est prépondérante, si la charge verticale est prépondérante, il se produit un mécanisme de poutre ou “Beam mechanism” ou un mécanisme combiné “Combined mechanism” avec la participation des deux charges.

La combinaison des charges verticales λV et horizontales λH provoque la formation de deux ($m = p - r = 5 - 3 = 2$, où p représente le nombre de sections critiques) mécanismes élémentaires et un troisième avec la combinaison des deux.

3.6.2 Beam mechanism

Dans ce cas, la ruine de la structure est causée par la charge concentrée verticale λV , le mécanisme et l'emplacement des rotules sont représentés dans la figure.21. La géométrie de la structure nous permet d'écrire l'équation :

$$\delta = a \theta = b \phi \quad \text{d'ou} \quad = - \tag{17}$$

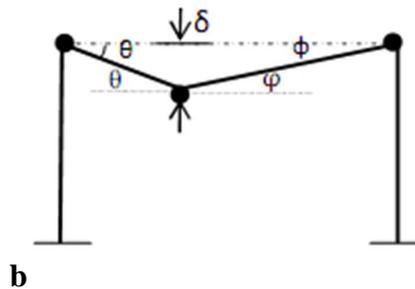


Fig. 21 Beam mechanism.

La charge concentrée verticale provoque la formation des trois rotules plastiques, ainsi que le déplacement virtuel δ , le travail extérieur est égal au produit $\lambda V \cdot \delta$, le travail intérieur est égal à la somme des produits du moment plastique fois les rotations virtuelles $\sum M_p \cdot \theta_i$.

$$\lambda V c \cdot a \theta = M_p \cdot \theta + M_p \cdot - + M_p (\theta + -) \tag{18}$$

$$\lambda V c = \frac{2}{b} M_p$$

Pour une charge unitaire de $V=1\text{KN}$, $a=5\text{m}$ et $b=10\text{m}$ donc $\lambda=60$

3.6.3 Sway mechanism

L'effort horizontal λH transforme la structure en un mécanisme de panneau ou étage ou "Sway mechanism", suite à la naissance de quatre rotules plastiques au droit des sections critiques figure.22. La géométrie de la structure nous permet d'écrire l'équation: $\Delta = h\theta$

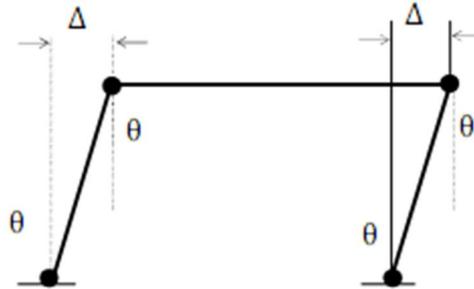


Fig. 22 Sway mechanism.

Avec le même principe des déplacements virtuels, on peut calculer facilement le facteur de charge de ruine de ce mécanisme :

$$\lambda \Delta = 4$$

$$\lambda h = 4 \tag{19}$$

$$\lambda = \frac{4}{h}$$

pour une charge unitaire de $H = 1\text{KN}$, et $h = 5\text{m}$, on obtient $\lambda = 80$.

3.6.4 Combined mechanism

Le mécanisme représenté dans la figure.23 produit par la combinaison des deux charges concentrées verticale λV et horizontale λH , ces dernières provoquent des déformations du portique dans les deux sens avec naissance de quatre rotules plastiques. Le facteur de charge peut être calculé à partir :

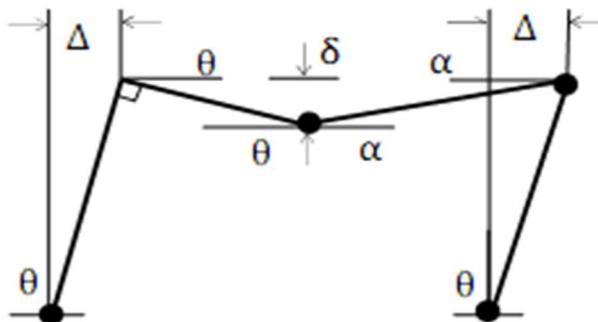


Fig. 23 Combined mechanism.

$$\lambda V_c \Delta = -M_p + 4M_p \theta - 2M_p \theta \quad (20)$$

External work ,beam mechanism	External work ,sway mechanism	internal work ,beam mechanism	internal work ,beam mechanism	internal work at hing which disappears mechanism
-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------	---

$$\lambda V_c \cdot a \theta + \lambda \cdot h = -M_p + 4M_p \cdot \theta - 2M_p \cdot \theta \quad (21)$$

$$\lambda V_c \cdot a + \lambda \cdot h = (- + 2 M_p) \quad (22)$$

Pour H=V=1 KN, a=5m, b=10m et h=5m λ =50.

3.6.5 Conclusion

Il est constaté que la détermination du mécanisme et de la charge de ruine des éléments de structures ou structures simples par les différentes méthodes annoncées précédemment, a conduit aux mêmes résultats, mais il faut dire qu'en dehors de ces structures simples, et chaque fois que le degré d'hyperstaticité augmente, la détermination des vrais mécanismes de ruine par la méthode cinématique devient laborieuse car elle exige une série de combinaisons entre les différents mécanismes élémentaires en incluant le mécanisme de joint « joint rotation mechanism » afin de minimiser la valeur du facteur de charge, λ. Cette méthode peut être très longue sans garantie d'obtention du vrai mécanisme de ruine. La méthode dite pas à pas peut être salutaire et peut faire éviter le risque d'erreurs et la lourdeur de la première. Elle est facile d'utilisation grâce à la disponibilité de logiciels entre autres le SAP2000. Pour cela, on a opté pour cette dernière pour l'étude et la détermination des mécanismes et les charges de ruine dans le reste du présent travail. Concernant le choix du portique témoin il a été jugé utile de prendre le plus simple portique possible après celui du « single bay single storey ».

PARTIE 2 : ENDOMMAGEMENT

4 ENDOMMAGEMENT ET LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

4.1 Introduction

Le dimensionnement et le calcul des pièces et des structures consistent à déterminer leurs limites de fonctionnement et ne pas dépasser leurs capacités de résistance. Cette étude est fondée sur la théorie d'élasticité et la résistance des matériaux avec l'hypothèse d'un milieu élastique homogène et isotrope [9, 10].

Mais on observe souvent des ruptures brutales à conséquences graves à cause de l'existence des défauts (vides, fissures, microfissures, cavités etc...), cependant les calculs habituels de la mécanique des milieux continus ne peuvent pas prévoir la rupture puisqu'ils supposent l'absence de tous défaut d'où le développement de la mécanique de la rupture définit comme étant la science étudiant les structures avec ses défauts. Elle est caractérisée par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties de part et d'autre d'une surface géométrique appelée fissure créée par endommagement sous l'effet d'une sollicitation ou par défaut d'élaboration lors de la mise en forme. Elle permet également de contrôler l'évolution de la fissure [11, 12].

Toutes les pièces mécaniques contiennent des fissures, même si cela ne se voit pas à l'œil nu. Ces fissures peuvent croître lentement ou brutalement, le dernier étant souvent synonyme de rupture; la prévision de ces phénomènes est donc un enjeu essentiel pour le dimensionnement. La branche de la mécanique qui permet de modéliser la fissuration s'appelle la mécanique de la rupture. Nous en présentons ici quelques concepts, et notamment la notion de ténacité, qui caractérise la résistance d'un matériau à l'avancement des fissures et peut être mesurée par des essais de fissuration

L'utilisation de nouveaux matériaux ductiles (acier et autres alliages métalliques) pour des chargements en traction conduisit cependant à quelques problèmes; des ruptures se produisaient parfois pour des niveaux de charges bien inférieurs à la limite d'élasticité. On a dans un premier temps essayé d'éviter ces risques de ruptures en surdimensionnant les structures, mais la nécessité d'alléger de plus en plus les structures et de réduire les coûts conduisit au développement des recherches sur la mécanique de la rupture. [13].

Les chercheurs étaient alors incapables d'expliquer le phénomène de rupture brusque sous des sollicitations bien inférieures à celles de la limite d'élasticité. Si Griffith [14] est souvent cité comme le premier chercheur à avoir introduit la mécanique de la rupture (en tant que science), ces travaux restent basés sur des études antérieures. On peut notamment citer le travail de Wienghardt [15], paru en 1907 et récemment traduit en anglais [13], dans lequel l'existence de la singularité du champ des contraintes en pointe de fissure dans un matériau élastique linéaire fut reconnue.

A partir de ces résultats, Griffith [14] s'est intéressé en 1920 au problème de la rupture, dans un milieu élastique fissuré, d'un point de vue énergétique. Il a ainsi mis en évidence une variable appelée plus tard taux de restitution d'énergie caractérisant la rupture "G", et dont la valeur critique est une caractéristique du matériau. Vinrent ensuite les premiers développements théoriques d'analyse des champs de contraintes et de déformations au voisinage d'une fissure en élasticité.

Griffith établit une relation directe entre la taille du défaut et la contrainte de rupture. S'appuyant sur les travaux d'Inglis [16], Griffith appliqua l'analyse des contraintes autour d'un trou elliptique à la propagation instable d'une fissure; il formule ainsi à partir du premier principe de la thermodynamique, une théorie de la rupture. Selon cette théorie, un défaut devient instable et conduit à la rupture lorsque la variation d'énergie liée à une propagation du défaut atteint l'énergie spécifique du matériau. Cette théorie prédit correctement la relation entre la contrainte de rupture et la taille du défaut dans les matériaux fragiles. Dans les matériaux ductiles et notamment les alliages métalliques, l'avancée d'un défaut s'accompagne d'une importante dissipation d'énergie due à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure et la théorie de Griffith qui ne considère que l'énergie de création de surface ne peut en rendre compte. Ces études, menées notamment par Irwin [17] en 1957, ont permis de définir les facteurs d'intensité de contraintes, caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit.

Il a fallu attendre les travaux d'Irwin (1948) [17] qui proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles.

Irwin considéra que les outils fondamentaux pour étudier la rupture existaient et proposa une extension de l'approche de Griffith aux matériaux ductiles en y incluant le terme de dissipation d'énergie due à l'écoulement plastique près des extrémités d'une fissure. Il développa ensuite en 1956 le concept de taux de restitution d'énergie à partir toujours de la théorie de Griffith mais sous une forme facilement exploitable par les concepteurs de structures. En 1957, s'appuyant sur les travaux de Westergaard qui analysa les champs de déplacements et de contraintes élastiques près de l'extrémité d'une fissure sous chargement donné, Irwin montra que les déplacements et les contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure peuvent être décrits à l'aide d'un paramètre unique qui était relié au taux de restitution d'énergie ; ce paramètre issu de la mécanique linéaire de la rupture, est le facteur d'intensité des contraintes (FIC) [18].

Les nouveaux concepts de la mécanique de la rupture furent ensuite utilisés pour montrer que la plupart des ruptures dans les fuselages d'avions étaient dues à des fissures de fatigue qui atteignaient une taille critique. Ces fissures prenaient naissance près des hublots dans les coins qui constituent des zones de forte concentration des contraintes. Les ruptures qui se produisaient dans les essieux d'engins roulants ou encore dans les rotors des turbines à vapeur furent aussi expliquées grâce à l'application de ces nouveaux concepts. Le concept de FIC fut également utilisé par Paris pour décrire la propagation des fissures de fatigue et

progressivement les courbes de propagation des fissures de fatigue proposées par ces auteurs remplacèrent les courbes d'endurance pour une meilleure prédiction des durées de vie des structures.

Entre 1960 et 1980, la mécanique de la rupture connaît un grand succès scientifique, avec notamment l'apparition de la mécanique non linéaire de la rupture qui a permis de mieux prendre en compte le comportement plastique des matériaux. De nombreux travaux sont publiés à cette période ; on peut citer par exemple ceux de Rice [19] qui introduisent la notion d'intégrales indépendantes du contour telles que l'intégrale J, dont les propriétés ont permis de caractériser la ténacité d'un matériau lorsque la plasticité n'est plus confinée à la pointe de fissure. C'est également à cette période que les premiers travaux concernant la mécanique de la rupture dans les matériaux multicouches sont réalisés.

La période entre 1960 et 1980 vit une intensification des recherches sur la rupture avec deux écoles qui s'affrontaient. D'une part les tenants de l'approche utilisant la mécanique linéaire de la rupture et ceux qui s'intéressaient essentiellement à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure. La mécanique linéaire de la rupture cesse d'être valable lorsqu'une plastification importante précède la rupture. Pour tenir compte de l'effet de cette plastification sur les champs de contraintes et de déplacements à l'extrémité d'une fissure, plusieurs auteurs (Irwin, Dugdale et Barenblatt ...) proposèrent ce qu'on appelle une correction de la zone plastique ; la taille de la fissure est alors augmentée de cette zone plastique pour retrouver les champs de contraintes élastiques décrits par le FIC [20].

Wells, un des représentants de la deuxième école, proposa en 1961 le déplacement à fond de la fissure - ou CTOD «Crack Tip Opening Displacement» [21] - comme paramètre alternatif à la mécanique linéaire de la rupture ou plus précisément au concept de FIC, lorsque la plastification devient importante comme c'est le cas dans les matériaux très ductiles. Plus tard, Hutchinson, Rice et Rosengren (HRR) développèrent un nouveau paramètre appelé intégrale J pour mieux décrire la répartition des contraintes dans les zones plastifiées (Champ HRR). Begley et Landes caractérisèrent la ténacité à l'aide du paramètre J et développèrent une procédure standard pour l'utilisation de cette intégrale dans des cas pratiques. La conception de structure par l'approche de la mécanique de la rupture prend donc en compte trois variables : les contraintes appliquées, la géométrie du défaut et de la pièce, la ténacité du matériau. Dans la plupart des cas, comme on connaît les contraintes appliquées et la ténacité du matériau considéré, la mécanique de la rupture permet d'évaluer la taille critique de défaut dans la structure [22]. Si le comportement de la structure est élastique linéaire, on parle alors de mécanique linéaire de la rupture.

La rupture d'une pièce mécanique peut s'interpréter par une interruption de la continuité de la pièce. Dans ce cas, l'application de la mécanique des milieux continus se heurte à une singularité due à la présence de fissures dans la pièce. La mécanique de la rupture n'est autre que l'application de la mécanique des milieux continus et de la loi de comportement du matériau à un corps, avec les conditions aux limites relatives à la présence géométrique de la fissure. Elle conduit à développer un critère de ruine prenant en considération les fissures

existant au sein du matériau, et est fondée sur une analyse élastique du champ des contraintes en petites déformations.

L'étude de la résistance statique d'un matériau comportant une ou plusieurs fissures démontre qu'au voisinage d'une fissure la limite d'élasticité du matériau peut être largement dépassée, et les déformations plastiques localisées sont inévitables (Inglis, 1913) [16]. Pour tous les matériaux courants, on peut distinguer dans un milieu fissuré trois zones successives :

Zone d'élaboration : Cette zone se trouve autour de la pointe de la fissure au cours de la propagation. Cette zone a généralement des dimensions de l'ordre de quelques cristaux. Le caractère discontinu des processus physiques de la rupture dans cette zone rend son étude très difficile, car la frontière entre le microscopique et le macroscopique reste mal définie. Toute analyse de la rupture par une modélisation continue dans cette zone ne peut donc être qu'approximative.

Zone singulière : Cette zone est définie comme une zone dans laquelle les champs mécaniques sont continus et possèdent une certaine structure "autonome", caractéristique de la seule fissure. La dimension de cette singularité est en $1/\sqrt{r}$, r étant compris entre un rayon dit plastique, en dessous duquel les contraintes dépasseraient la limite d'élasticité et un rayon au-dessous duquel l'analyse mathématique deviendrait incorrecte.

Zone extérieure : Cette zone se situe au-delà des deux précédentes, où les champs mécaniques lointains se raccordent avec le chargement et les conditions aux limites. L'application de la mécanique linéaire de la rupture nécessite alors la condition que la zone non élastique 1 soit être confinée. La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties appelées lèvres de fissure. Cette séparation se caractérise par une discontinuité au sens des déplacements.

4.2 Modélisation de la fissure

Une fissure est une petite fente dans un solide. Cette fente peut apparaître à la surface de la pièce (fissure superficielle), se trouver complètement à l'intérieur et être donc invisible depuis l'extérieur (fissure interne), ou traverser complètement la pièce (fissure traversante). Ces trois cas de figure sont schématisés sur la Figure 24.

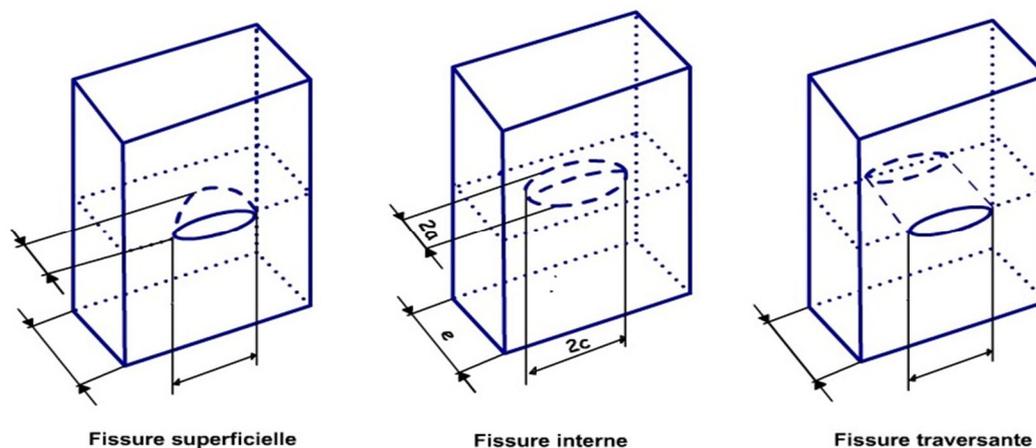


Fig. 24 Les différents types de fissures.

Pour modéliser les fissures, on suppose souvent que leur géométrie est simple :

- Leur forme est elliptique, semi-elliptique ou en forme de coin ;
- Les deux faces de la fissure sont planes, parallèles et écartées d'une distance très petite devant les deux autres dimensions de la fissure. On assimile donc la fissure à son plan moyen ;
- Les deux faces se rejoignent selon un bord anguleux et, en conformité avec l'hypothèse précédente (faces parallèles), forment un angle quasiment nul.

La fissure est donc modélisée par une discontinuité de la matière, plane, « pointue » et d'épaisseur nulle. Lorsque les deux faces ne se touchent pas, on dit que la fissure est ouverte. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus (c'est-à-dire en termes de déplacements et de contraintes), la fissure est alors modélisée en écrivant les conditions aux limites suivantes sur le plan moyen :

- Le vecteur contrainte est nul (car chacune des deux faces est un bord libre), et

Le déplacement peut être discontinu de part et d'autre du plan (et sa discontinuité correspond alors à l'ouverture de la fissure).

4.3 Les modes de propagation des fissures

En considérant que les fissures planes se propagent dans leur propre plan, on montre qu'en ne considérant que les fissures planes se propageant dans leur propre plan que l'état le plus général de propagation se ramène à la superposition de trois modes (figure 25) :

- Mode I (mode par ouverture) : les surfaces de la fissure se déplacent dans des directions opposées et perpendiculairement au plan de fissure ;
- Mode II (glissement de translation) : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction perpendiculaire au front de fissure ;

- Mode III (glissement de rotation) : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de la fissure. On remarque que la rupture plate correspond au mode I par contre, la rupture inclinée aux Modes II et III.

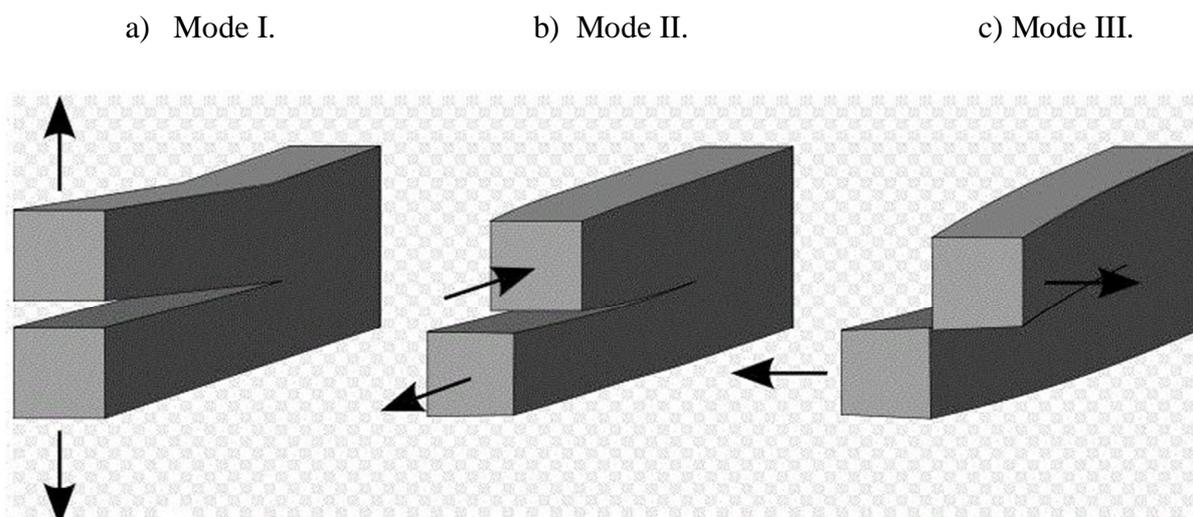


Fig. 25 Modes d'ouvertures des fissures.

4.4 La propagation de la fissure selon le type de matériau

Les deux animations en annexe (« *Annexe : rupture fragile* » et « *Annexe : rupture ductile* » [1]) sont réalisées à partir de photos prises pendant le chargement en traction d'éprouvettes pré-fissurées pour un matériau « fragile » et un matériau « ductile ». Les différences de comportement entre ces types de matériau sont facilement observables :

- Le matériau fragile subit une rupture brutale par la propagation d'une fissure venant « déchirer » l'éprouvette ;
- Le matériau ductile subit une déformation plastique très importante autour de la zone pré-fissurée avant de rompre.

4.5 De la mécanique des milieux continus à la mécanique de la rupture

4.5.1 Le champ de contraintes en pointe de fissure

Pour réaliser des simulations, il est nécessaire de calculer les champs de déplacements et de contraintes dans la structure fissurée et chargée. Ceci peut être réalisé dans le cadre de la mécanique des milieux continus, analytiquement dans certains cas simples, ou par éléments finis pour des géométries compliquées.

La solution analytique en contraintes et en déplacements est donnée « *Solution analytique en pointe de fissure* ». On constate que le champ de contraintes présente une singularité : lorsque l'on se rapproche de la pointe de la fissure, la contrainte maximale tend vers l'infini ! Autrement dit, si l'on suppose que la rupture survient lorsque la contrainte excède un certain seuil (ce qui est globalement vrai dans un certain domaine), alors le modèle prédit que la

structure peut rompre pour un chargement « très petit » ! Cela ne correspond heureusement à aucune observation physique.

Cet écart avec la réalité s'explique par le simplisme du modèle choisi : dans les faits, la fissure n'est pas « pointue » (elle a un rayon de courbure non nul), et une zone plastique se développe autour de la pointe de fissure (le comportement du matériau ne reste donc pas élastique, et ce même pour les matériaux dits « fragiles »). La valeur infinie de la contrainte à la pointe de la fissure est donc hors du domaine de validité du modèle, et n'a pas de réel sens physique.

Le problème est qu'il serait délicat d'utiliser une modélisation plus réaliste : cela demanderait de décrire finement la géométrie de la pointe de la fissure (que l'on ne connaît généralement pas précisément et qui serait délicate à représenter dans un maillage éléments finis), et d'utiliser un modèle de comportement non-linéaire rendant compte de la plasticité locale. Plutôt que de compliquer la modélisation, la mécanique linéaire de la rupture propose de conserver la modélisation ci-dessus, mais en modifiant les quantités d'intérêt : au lieu de s'intéresser à la valeur maximale (infinie donc non pertinente !) de la contrainte, la quantité dimensionnante sera une mesure de l'ensemble du champ de contraintes aux abords de la fissure.

4.5.2 Facteurs d'intensité de contrainte

Le paramètre clé permettant de prédire le comportement d'une fissure sous l'effet d'un chargement est le facteur d'intensité de contrainte, désigné par la variable K . Il représente une mesure de l'intensité du champ de contrainte en bout de fissure (Figure 26), décrit selon un système de coordonnées polaires (r, θ) et les facteurs K_I , K_{II} et K_{III} . Ce champ de contraintes présente une singularité [23].

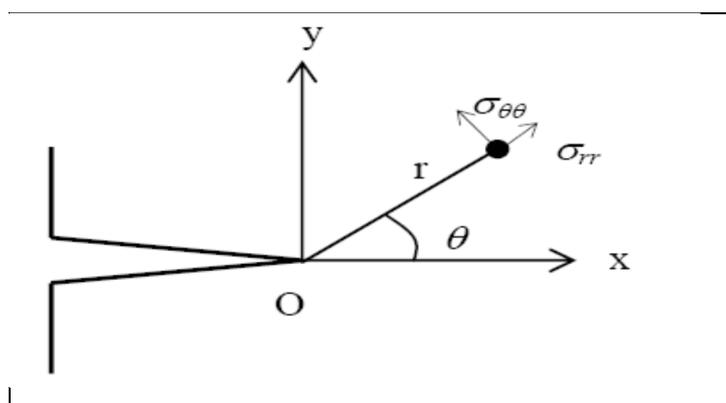


Fig. 26 Repères en coordonnées polaires au point M.

4.5.3 Approche locale et facteurs d'intensité de contraintes

Cette approche consiste à résoudre directement les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus en tenant compte de la discontinuité géométrique occasionnée par la fissure. L'analyse est fondée sur l'hypothèse de l'élasticité linéaire (les zones 2 et 3) et des

petites déformations. Pour définir un facteur caractérisant l'agressivité du champ de contrainte obtenue par application d'une charge sur une pièce fissurée, G.R. Irwin (1957, 1958) a calculé les contraintes et les déplacements au voisinage du fond de fissure. En considérant les modes I et II, les contraintes et les déplacements ne varient que dans le plan. Le calcul peut se simplifier entre les deux mécanismes : déformation plane ou contrainte plane. Les contraintes et les déplacements sont exprimés par les formules ci-après [17]

- **Champs de contraintes voisinage de l'extrémité d'une fissure pour le Mode I.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{r}} \cos \theta \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{r}} \cos \theta \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{xy} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{r}} \cos \theta \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = 0 \\ \nu = 0 \\ \epsilon = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

- **Champs de déplacements au voisinage de l'extrémité d'une fissure pour le Mode I.**

$$\left\{ \begin{array}{l} u = - \frac{\sigma_0}{E} \sqrt{r} \cos \theta \left(\kappa - 1 + 2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ v = - \frac{\sigma_0}{E} \sqrt{r} \sin \theta \left(\kappa + 1 - 2 \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ w = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

- **Champs de contraintes voisinage de l'extrémité d'une fissure pour le Mode II.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{r}} \sin \theta \left(2 + \cos \theta - \cos 3\theta \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{r}} \sin \theta \left(\cos \theta - \cos 3\theta \right) \\ \sigma_{xy} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{r}} \cos \theta \left(1 - \sin \theta - \sin 3\theta \right) \\ \tau_{xy} = \nu \left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} \right) \\ \nu = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

- **Champs de déplacements au voisinage de l'extrémité d'une fissure pour le Mode II.**

$$\left\{ \begin{array}{l} u = - \frac{\sigma_0}{E} \sqrt{r} \sin \theta \left(\kappa + 1 + 2 \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ v = - \frac{\sigma_0}{E} \sqrt{r} \cos \theta \left(\kappa - 1 - 2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ w = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

- **Champs de contraintes voisinage de l'extrémité d'une fissure pour le Mode III.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\theta\theta} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0 \\ \sigma_{r\theta} = \frac{K_{III}}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{\theta r} = \frac{K_{III}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{array} \right. \quad (5)$$

- **Champs de déplacements au voisinage de l'extrémité d'une fissure pour le Mode III.**

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = \frac{K_{III}}{\mu} \sin \frac{\theta}{2} \\ u_{\theta} = \frac{K_{III}}{\mu} \cos \frac{\theta}{2} \end{array} \right. \quad (6)$$

- **Champs de contraintes en coordonnées polaires au voisinage de l'extrémité d'une fissure pour le Mode I.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ \sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ \sigma_{\theta r} = \frac{K_I}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{array} \right. \quad (7)$$

- **Champs de contraintes en coordonnées polaires au voisinage de l'extrémité d'une fissure pour le Mode II.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\theta\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} (-1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ \sigma_{r\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{r}} (-\cos \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ \sigma_{\theta r} = \frac{K_{II}}{\sqrt{r}} (-\sin \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \end{array} \right. \quad (8)$$

Dans les formules précédentes, r est le rayon, θ l'angle polaire, ν le coefficient de Poisson, E le module d'Young, et le coefficient k vaut $3-4\nu$ en déformation plane et $(3-\nu)/(1+\nu)$ en contrainte plane. Les constantes K_I , K_{II} et K_{III} qui dépendent de la géométrie de la fissure et de la répartition des efforts extérieurs s'appellent "facteurs d'intensité de contraintes".

La formulation de l'état des contraintes implique une singularité dans le prolongement de la fissure. Il s'agit d'une règle générale importante de la mécanique de la rupture, selon laquelle les contraintes autour du fond de fissure varient en suivant une relation de la forme : $\sigma = K / \sqrt{r}$ et tendent vers l'infini lorsque r tend vers zéro. Au-delà de la singularité, certaines

composantes du déplacement sont nulles et la discontinuité des autres est déterminée à partir des formules avec $\Theta = \pm K$:

Les facteurs d'intensité de contraintes mesurent la force de la singularité du champ des contraintes à l'extrémité de la fissure. Us sont proportionnels aux discontinuités des déplacements des lèvres de la fissure, Si l'on connaît les expressions des composantes des contraintes ou des déplacements, on peut alors réciproquement déterminer les facteurs d'intensité de contraintes, par exemple [24] ;

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\tau_{11} \sqrt{2 \Pi r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{2(1+\nu)} u_z \sqrt{\frac{\Pi}{2r}} \right) \quad (8)$$

Pour un mode donné i , le facteur d'intensité de contrainte est comme suit ;

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2 \Pi r} \quad (9)$$

Le facteur d'intensité de contrainte est couramment utilisé pour caractériser la singularité du champ de contrainte au voisinage de la tête de la fissure. Une autre alternative permet de calculer ces facteurs. Ces facteurs sont proportionnels à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure.

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\tau_{zz} \sqrt{2 \Pi r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{2(1+\nu)} u_z \sqrt{\frac{\Pi}{2r}} \right) \\ K_2 &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\tau_{zn} \sqrt{2 \Pi r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{2(1+\nu)} u_n \sqrt{\frac{\Pi}{2r}} \right) \\ K_3 &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\tau_{zt} \sqrt{2 \Pi r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{E}{2(1+\nu)} u_t \sqrt{\frac{\Pi}{2r}} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

(U_i) représente la discontinuité de déplacement en tête de fissure dans la direction i .

Note que dans cette étude, c'est cette technique qui est utilisée pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte.

4.6 Identification la ténacité des matériaux fragiles

La ténacité donne la résistance à la rupture brutale d'un matériau fragile : c'est la valeur critique du facteur d'intensité de contrainte en mode I, mode de rupture prépondérant, pour laquelle la fissure se propage. C'est donc une propriété du matériau qui s'exprime en $\sqrt{\text{MPa}\cdot\text{m}}$. Elle varie fortement pour un matériau de composition chimique donnée avec les traitements thermiques.

Le facteur d'intensité de contrainte en mode I vient d'un calcul en élasticité où les contraintes tendent vers l'infini en pointe de fissure. Il est donc fondamental d'évaluer la taille de la zone où ces contraintes dépassent la limite d'élasticité du matériau et de vérifier que cette zone reste petite devant la taille de la fissure et celle des ligaments sains dans le plan de la fissure.

L'objectif de ce paragraphe est de mesurer la ténacité d'un matériau fragile, c'est-à-dire la valeur critique (conduisant à la rupture) du facteur d'intensité des contraintes. Cette mesure est ici réalisée à partir d'essais de flexion 3 points sur des éprouvettes pré-fissurées.

4.6.1 La pré-fissuration des éprouvettes par essais sandwich

La ténacité mesure la résistance à la propagation de fissures existantes ; pour la mesurer, l'éprouvette utilisée doit donc être déjà fissurée. Pour les matériaux dits ductiles, la pré-fissuration peut se faire en sollicitant une éprouvette entaillée de façon cyclique (i.e. en fatigue), ce qui fera se propager une fissure de manière stable. En revanche, dans les matériaux fragiles, la propagation des fissures est un phénomène instable qui mène directement à la ruine de l'éprouvette. Il est donc nécessaire d'utiliser une technique adaptée, permettant de pré-fissurer l'éprouvette mais également de bloquer la propagation de la fissure avant la rupture.

L'essai sandwich est une de ces techniques. Il consiste à placer une éprouvette de matériau fragile, entaillée à la scie, entre deux poutres de matériaux ductiles (par exemple acier ou alliage d'aluminium) ; la rigidité en flexion (EI) des poutres ductiles est choisie supérieure à celle de l'éprouvette fragile. Le tout est sollicité en flexion trois points.

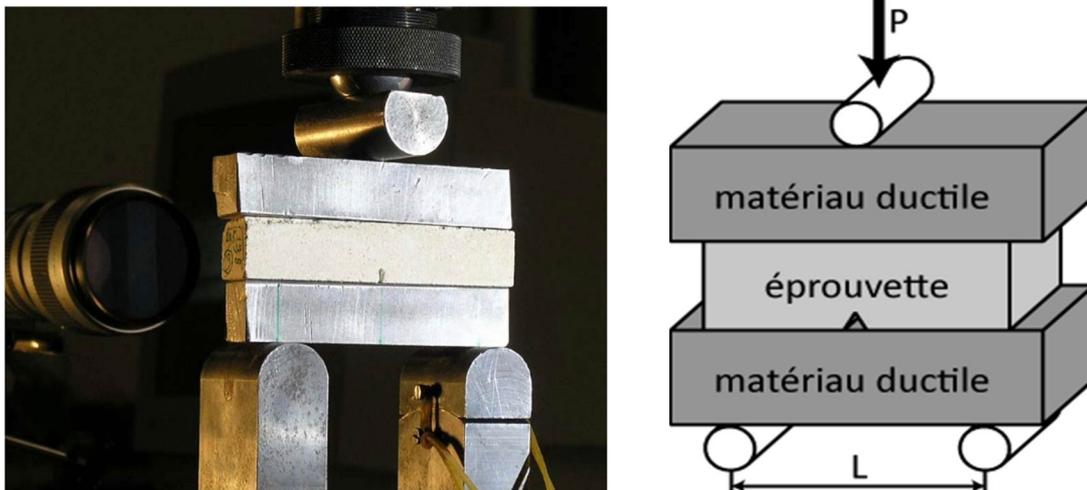


Fig. 27 : Photos et schéma de l'essai sandwich

Au cours de l'essai, une fissure se propage dans l'éprouvette fragile à partir de l'entaille, et sa propagation est rapidement stoppée. Le principe de l'essai est décrit « Annexe : Principe de la pré-fissuration d'une éprouvette par essai sandwich » ; l'idée essentielle est qu'une fois que le front de fissure a traversé la ligne moyenne de l'ensemble, la fissure se retrouve en

compression, ce qui stoppe sa propagation. La localisation de la pré-fissure est alors détectée par corrélation d'images.

4.6.2 La mesure de la ténacité par essais de flexion 3 points

Une fois l'éprouvette pré-fissurée, la ténacité peut maintenant être mesurée. Cette mesure est réalisée à partir d'essais de flexion 3 points (figure 8), menés jusqu'à la rupture.

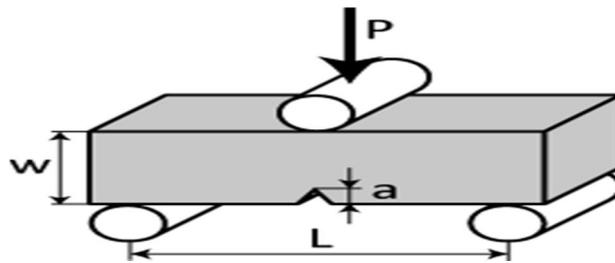


Figure 28 : Essai de flexion 3 points

Plusieurs techniques et moyens de mesure peuvent être utilisés pour identifier la ténacité. Nous en présentons deux.

Utilisation d'abaques pour essais normalisés. Dans le cas général, des abaques permettent de relier l'effort de rupture P_c à la ténacité K_{IC} , connaissant la géométrie de l'éprouvette (les différentes longueurs sont définies sur la figure 10) :

$$K_{IC} = \frac{LP_c}{bw^{3/2}} f(\alpha) \quad (11)$$

Avec ;

$$\alpha = \frac{a}{w}, L = 4w \text{ et } f(\alpha) = \frac{3}{2} \sqrt{\alpha} \frac{1,99 - \alpha(1 - \alpha)(2,15 - 3,93\alpha + 2,7\alpha^2)}{(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^{3/2}} \quad (12)$$

Pour utiliser ces abaques, il faut mesurer l'effort conduisant à la rupture ainsi que les différentes longueurs (la longueur a de la fissure peut être mesurée par corrélation d'images). On en déduit alors la ténacité.

La limite de cette démarche est que les abaques sont généralement issus de simulations par éléments finis réalisées sur des modèles d'éprouvettes fissurées "génériques", pouvant être peu représentatives de la fissure réelle. En particulier, pour les éprouvettes pré-fissurées à l'aide d'essais sandwich, il est difficile de maîtriser la position exacte de la pointe de la fissure. Le risque est alors grand de se trouver hors du domaine de validité des abaques, ce qui peut mener à une identification incorrecte de la ténacité.

Critère de propagation : K_I fonction de la structure et du chargement $\geq K_{IC}$ matériau

Ce critère de propagation est très utilisé en bureau d'études et laboratoire d'essais. Il permet de définir la taille de micro-fissure efficace pour éviter la propagation et donc de définir les contrôles de qualité nécessaires et suffisants. La ténacité est donc une grandeur phénoménologique très pratique associée à la détermination par le calcul du champ de contrainte singulière.

4.7 Evaluation du F.I.C.

Cette section présente en détail les techniques d'évaluation des Facteurs d'Intensité de Contraintes (FIC) selon le principe d'extrapolation des déplacements et celui du taux de relâchement d'énergie potentielle appliqué par l'intégrale J. Ces méthodes ont été choisies soit pour leur facilité d'intégration, leur versatilité ou leur précision [23].

4.7.1 Extrapolation des déplacements

C'est une approche locale de mise en œuvre simple, consiste à exploiter directement les déplacements du nœud le plus proche de la pointe de fissure, en l'injectant à l'expression asymptotique du saut de déplacement à travers la fissure.

Plusieurs techniques d'extrapolation existent et offrent différents avantages tels la rapidité, et la précision. Il est aussi important pour cette méthode, de toujours positionner le système de coordonnées polaires (r, θ) au bout de la fissure et de l'orienter selon son axe afin de valider les équations du champ de déplacements. En d'autres termes, les nœuds juxtaposés définissant les lèvres de la fissure doivent être distribués de façon symétrique par rapport à l'axe des lèvres, afin de déterminer correctement les déplacements des lèvres $U(y)$ et $U(x)$.

4.7.1.1 Cas d'un point

En fait, aucune extrapolation n'est réalisée par cette technique, puisqu'il s'agit de considérer un point très près du bout de la fissure dont le rayon « r » sera suffisamment petit pour être associé au point de singularité. En appliquant les équations du déplacement pour, puis en isolant les FIC, les expressions suivantes sont obtenues [24] ;

$$KI = \frac{\mu}{\sqrt{2r}} [[u_2(\theta = \pi)]] \quad (11)$$

$$KII = \frac{\mu}{\sqrt{2r}} [[u_1(\theta = \pi)]] \quad (12)$$

L'utilisation d'un seul point permet une évaluation très rapide des FIC, mais nécessite un maillage fin pour qu'il y ait suffisamment de nœuds près du bout de la fissure. De plus, il est fréquent d'observer une certaine divergence de la solution numérique près de la singularité [24]. Or, avec cette technique, il est impossible de vérifier si le point d'évaluation choisi est divergent.

Les facteurs d'intensité de contraintes peuvent être déterminés à différentes distances radiales du bout de la fissure par les déplacements numériquement obtenus avec leur expression analytique en termes de FIK. Pour des problèmes de contrainte plane dans le plan (x, y), on a ;

$$\left\{ \begin{aligned} &= \frac{\dots}{(\dots)} \\ &= \frac{\dots}{(\dots)} \\ &= \dots \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Pour des problèmes de déformation plane, on remplace v par ce qui suit ;

$$v = \frac{v}{v} \quad (14)$$

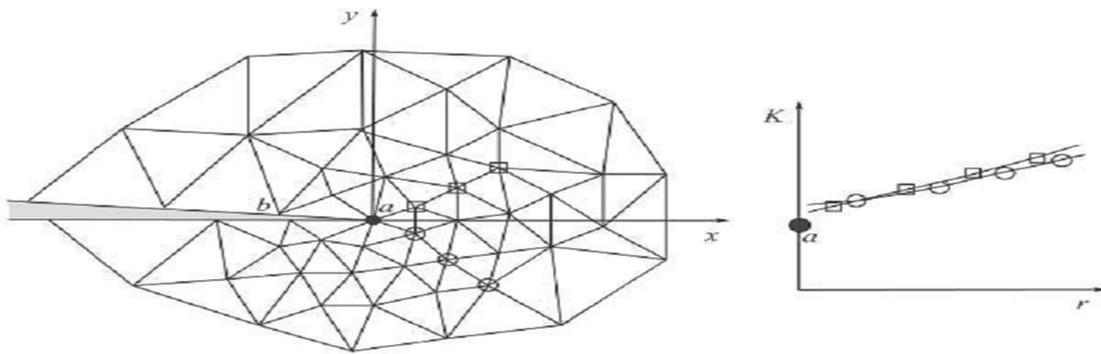


Fig. 29 Extrapolation des déplacements.

4.7.1.2 Cas de deux points

Cette méthode est également très simple. Elle consiste à réaliser une extrapolation linéaire à partir de deux points (cas des nœuds des éléments rattachés au bout de fissure) comme montré sur la Figure 29.

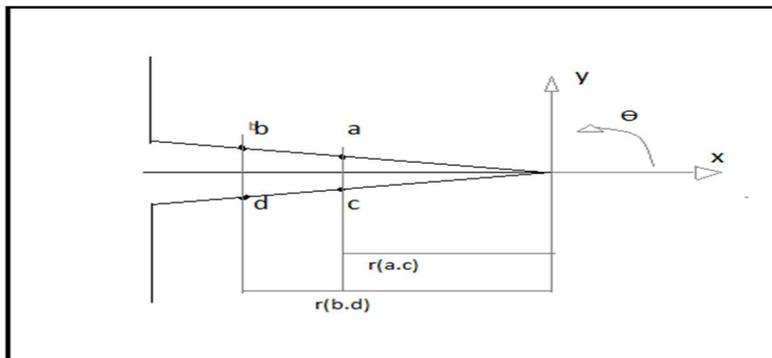


Fig. 30 Extrapolation des déplacements en deux points.

Alors, à partir des informations prises à partir de la Figure 29 et du principe d'extrapolation, les facteurs K_I et K_{II} sont déterminés pour $r = 0$ par la relation suivante [23];

$$= \frac{\mu\sqrt{\dots}}{(\dots)} \left[\frac{(\dots * \dots (\dots))}{\sqrt{\dots}} - \frac{(\dots * \dots (\dots))}{\dots} \right] \tag{15}$$

$$= \frac{\mu\sqrt{\dots}}{(\dots)} \left[\frac{(\dots * \dots (\dots))}{\sqrt{\dots}} - \frac{(\dots * \dots (\dots))}{\dots} \right] \tag{16}$$

Normalement, cette technique est utilisée lorsque le modèle comprend des éléments singuliers où l'extrapolation ne peut se faire qu'à l'intérieur de ceux-ci, afin de tenir compte de la singularité qu'ils induisent.

4.7.1.3 Minimisation de l'erreur

Aliabadi a repris la technique de l'extrapolation sur deux points, mais c'est Fedelinski *et al.* qui l'ont adapté afin d'obtenir une expression minimisant le carré des erreurs entre la relation analytique et le résultat numérique des FIC [24] ;

$$= \frac{\mu\sqrt{\dots}}{(\dots)} \left[\frac{(\sqrt{\dots} * \dots (\dots) \dots * \dots (\dots))}{(\dots)} \right] \tag{17}$$

$$= \frac{\mu\sqrt{\dots}}{(\dots)} \left[\frac{(\sqrt{\dots} * \dots (\dots) \dots * \dots (\dots))}{(\dots)} \right] \tag{18}$$

Il est à constater que très peu d'études ont utilisé cette méthode, mais Fedelinski *et al.* (1995), Aliabadi (1998) ont tout de même prouvé qu'elle pouvait fournir des résultats satisfaisants [24].

Les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} peuvent être déterminés de l'extrapolation de déplacement près du bout de la fissure. Ces facteurs d'intensité contraintes sont exprimés par [23] comme suit ;

$$= \frac{\dots}{(\dots)(\dots)} \dots (4(\dots) - \dots) \tag{19}$$

$$= \frac{\dots}{(\dots)(\dots)} \dots (4(\dots) - \dots) \tag{20}$$

E est le module d'élasticité, ν est le coefficient de Poisson, k est un paramètre élastique défini par $3(4 - \nu)$ pour le cas de contrainte plane et par $\frac{(4 - \nu)}{(1 - \nu)}$ pour le cas de déformation plane, L est la longueur d'élément et, u et v sont les composantes de déplacement dans les directions de x et de y , respectivement. Les indices inférieurs de u et de v représentent leurs positions pour les nœuds des éléments entourant le bout de la fissure [23].

4.8 Les critères de rupture ductile

Les critères de rupture ductile ont été proposés par Wells, Rice en Grande Bretagne et H. D. Bui en France. Ils s'appliquent lorsqu'une consolidation importante des matériaux par l'écroutissage et la déformation plastique accompagne la propagation de fissure. Différents paramètres sont proposés pour l'étude de ces matériaux ductile [21,22]

4.8.1 Le CTOD ou Crack Tip Opening Displacement,

La mécanique linéaire de la rupture (MLR) demeure une approche valable tant que le comportement du matériau est élastique et linéaire, mais aussi lorsque la plastification à fond de fissure reste confinée dans une zone de faible taille par rapport aux dimensions des fissures et de celles de la structure fissurée. Il est quasiment impossible dans beaucoup de matériaux de respecter les deux conditions précédentes et de décrire le comportement avec la MLR. Une approche alternative s'avère nécessaire pour ces matériaux.

La mécanique élasto-plastique de la rupture (MEPR) ou mécanique non linéaire de la rupture (MNL) s'applique aux matériaux ductiles lorsque le comportement reste toutefois indépendant du temps (pas d'effets dynamiques ou de viscosité, absence de fluage...).

Comme pour la MLR, où deux paramètres équivalents (K et G) peuvent être utilisés comme critère de rupture, deux paramètres caractéristiques de la MEPR sont présentés dans ce chapitre. Nous verrons que ces deux paramètres, le déplacement à fond de fissure ou CTOD (Crack Tip Opening Displacement) et l'intégrale de contour notée J sont aussi équivalents entre eux. Ils décrivent tous les deux, les conditions à l'extrémité fissure (champs de contraintes et de déplacements) et peuvent être utilisés comme critère de rupture. Les valeurs critiques de J et du CTOD conduisent à des valeurs de la ténacité des matériaux à peu près indépendantes de la géométrie des structures, même lorsque la plastification à l'extrémité des fissures est importante. On verra également dans quelles conditions on atteint les limites de ces approches à paramètre descriptif unique (J ou CTOD).[20]

Wells observa que l'émoussement de l'extrémité des fissures augmentait avec la ténacité des matériaux. Cela l'a conduit à proposer l'écartement à fond de fissure comme mesure de la ténacité. Ce paramètre est connu aujourd'hui sous le nom de CTOD.

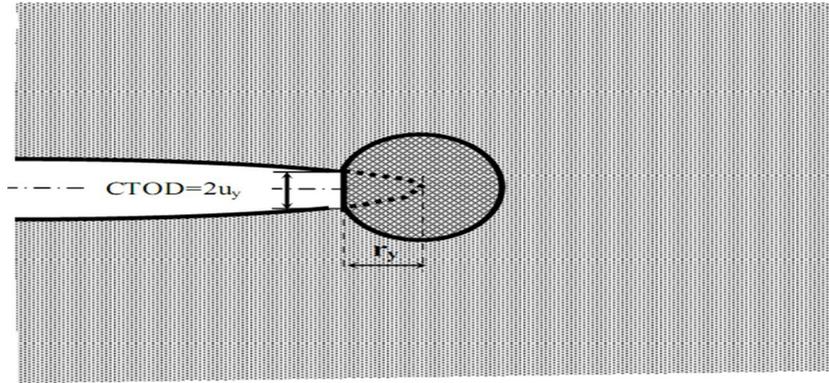


Fig. 31 Estimation du CTOD à partir du déplacement à la distance r_y en amont de l'extrémité d'une fissure de longueur $a + r_y$.

L'analyse proposée par Wells tente de relier le CTOD au FIC K lorsqu'on est en régime de plasticité confinée. Pour examiner cette approche on va considérer une fissure avec une faible zone plastifiée comme indiqué sur la figure 30. Irwin montra qu'une telle fissure se comporte comme si elle était effectivement plus longue du fait de l'écoulement plastique à fond de fissure. On peut alors estimer le CTOD en augmentant la longueur de fissure de r_y , la correction de zone plastifiée. Le CTOD est pris égal à l'ouverture de la fissure à la distance r_y en amont de l'extrémité ; le déplacement à cette distance est estimé à partir de la MLR qui prévoit en mode I.[20]

$$= \frac{\kappa}{\dots} \quad (21)$$

La longueur effective de fissure est $a + r_y$ avec r_y le rayon de zone plastifiée calculé d'après l'approche d'Irwin ;

$$= \dots \quad (22)$$

En combinant les 2 relations précédentes, on trouve ;

$$= 2 \dots \quad (23)$$

4.8.2 Intégrale de contour « Intégrale J »

L'analyse élastique linéaire cerne d'assez près la réalité physique pour les matériaux élastiques fragiles ou peu ductiles, mais elle est insuffisante lorsque les déformations plastiques interviennent dans un volume dont la dimension caractéristique dépasse 5 à 20% de l'aire de la fissure. La connaissance des contraintes et des déformations locales, dans le cas de la plasticité non confinée, nécessite des analyses élasto-plastiques assez complexes. Dans la

pratique, on utilise soit des corrections de zone plastique, soit des paramètres globaux déduits d'une analyse élastique non linéaire. Ce dernier est le cas de l'intégrale de contour [21].

L'intégrale de contour utilisée comme paramètre caractéristique de l'état de contrainte au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans les matériaux dont le comportement est linéaire et non linéaire, a connu un grand succès. Rice (1968) proposa ce paramètre en assimilant le comportement élasto-plastique à un comportement élastique non linéaire [22].

D'importants critères de fissuration en mécanique de la rupture élasto-plastique sont basés sur une certaine intégrale J discutée ci-dessous, plutôt que sur les facteurs d'intensité de contrainte comme c'est le cas en mécanique de la rupture élastique. Cela s'explique par le fait que si les facteurs d'intensité de contrainte déterminent à eux seuls les champs de contrainte et de déplacement asymptotiques pour les problèmes élastiques, ce n'est pas le cas pour les problèmes élasto-plastiques où il faut tenir compte de la dissipation plastique dans une zone entourant le front de fissure. Toutefois, dans cette thèse consacrée aux problèmes élastiques, nous allons nous appuyer sur l'intégrale J pour obtenir les facteurs d'intensité de contrainte en vertu de la relation qui lie ces facteurs à l'intégrale J en mécanique de la rupture élastique [23].

Rice a appliqué la théorie de la déformation pour analyser un solide fissuré. Il a démontré que le taux de restitution d'énergie non linéaire, peut être déterminé à partir d'une intégrale de contour indépendante du contour d'intégration. Hutchinson, Rice et Rose ont ensuite montré que ce paramètre caractérise de façon unique les champs de contraintes et de déformations au voisinage de l'extrémité d'une fissure dans un matériau non linéaire. L'intégrale peut donc être considérée à la fois comme un paramètre d'énergie et un paramètre d'intensité des contraintes, comme en mécanique linéaire de rupture où le FIC et l'énergie de Griffith sont deux paramètres qui décrivent de manière équivalente la répartition des contraintes [14].

Le concept de l'intégrale J a été introduit par Eshelby (1956) et développé par Rice (1968) [26]. L'interprétation physique de cette intégrale sur un contour Γ est qu'elle vaut le taux de diminution de l'énergie potentielle stockée dans le domaine entouré par Γ lorsque la fissure croît. Le paramètre est défini à partir de l'intégrale de contour suivante [27] ;

$$J = \int_{\Gamma} (w - \vec{\sigma} \cdot \vec{u}) ds \quad (24)$$

avec ;

Γ : contour qui entoure la fissure,

w : densité d'énergie de déformation,

$\vec{\sigma}$: vecteur de contrainte

\vec{u} : vecteur de déplacement

ds : élément de contour.

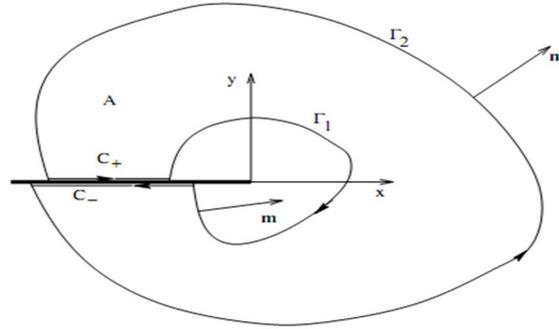


Fig. 32 Contour indépendant de l'intégrale J.

où Γ est un contour d'intégration entourant l'extrémité de la fissure (Figure 32), l l'élément de longueur sur Γ , T_i les composantes du vecteur contrainte et du vecteur déplacement en un point de Γ . La densité d'énergie de déformations W est définie par [24] ;

$$W = \int \dots \tag{25}$$

où ;

σ ϵ sont les composantes des tenseurs de contraintes et de déformations au point courant sur le contour Γ .

L'intégrale de contour dite "Intégrale- J" est un concept de la mécanique de la rupture, qui établit une équivalence entre le taux de restitution d'énergie et les FIC. C'est donc une notion très importante, qui justifie l'utilisation des FIC comme critère de propagation [25].

Dans le cas d'un matériau élastique, l'intégrale-J s'identifie au taux de restitution d'énergie. Nous obtenons ainsi une relation entre l'intégrale J et les facteurs d'intensité de contrainte [22-25].

$$= \dots + \dots + \dots \tag{26}$$

La densité d'énergie de déformations W est définie par :

$$= \frac{1}{2} \sigma_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \sigma_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{27}$$

avec ; $dy = - \partial \eta$

$$\text{et, } r = \dots + \dots \tag{28}$$

On a ainsi la relation suivante ;

$$\dots = \sigma_n + \sigma_n \dots + \sigma_n + \sigma_n \dots \tag{29}$$

$$= \int_{\Gamma} \frac{\sigma_n + \sigma_{n+1} - \sigma_{n-1} - \sigma_{n+2} + \sigma_{n-2} + \sigma_{n+3} - \sigma_{n-3} - \dots}{\sigma_n + \sigma_{n+1} - \sigma_{n-1} - \sigma_{n+2} + \sigma_{n-2} + \sigma_{n+3} - \sigma_{n-3} - \dots} \eta \quad (30)$$

$$J = W | (\xi, \eta) \quad (31)$$

où ; n_g est le nombre des points d'intégration dans un élément, W_g sont les poids des points de Gauss. est la fonction à intégrer et évaluée à chaque point g de Gauss.[26]

$$= \frac{\sigma_n + \sigma_{n+1} - \sigma_{n-1} - \sigma_{n+2} + \sigma_{n-2} + \sigma_{n+3} - \sigma_{n-3} - \dots}{\sigma_n + \sigma_{n+1} - \sigma_{n-1} - \sigma_{n+2} + \sigma_{n-2} + \sigma_{n+3} - \sigma_{n-3} - \dots} \quad (32)$$

4.8.3 Intégrale d'interaction

Nous extrayons les valeurs des trois facteurs d'intensité de contrainte du calcul de l'intégrale J en utilisant la technique des intégrales d'interaction de Yau, Wang et Corten (1980). Nous considérons deux états d'équilibre du corps fissuré. L'état 1 est l'état réel qui satisfait les conditions aux limites et l'état 2 est un état auxiliaire fictif.[28]

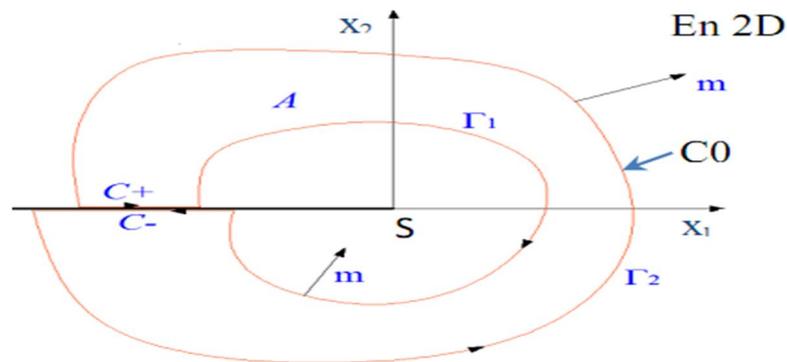


Fig.33 : Contour indépendant de l'intégrale J.

Les facteurs d'intensité des contraintes sont calculés en utilisant les formulaires de domaine des intégrales d'interaction [26]. Pour les problèmes généraux de mode mixte la relation entre la valeur de l'intégrale et les facteurs d'intensité de contrainte est la suivante:

$$= \frac{1}{*} + \frac{1}{*} \quad (33)$$

où ; E^* est défini en termes de paramètre du matériau (module de Young) et ν coefficient de poisson.

Deux états d'un corps fissuré sont considérés : Etat (1) $(\sigma^{(1)}, \varepsilon^{(1)}, u^{(1)})$ correspond à l'état actuel et l'état (2) $(\sigma^{(2)}, \varepsilon^{(2)}, u^{(2)})$ est un état auxiliaire qui sera choisi comme les champs asymptotiques pour les modes I ou II [26].

L'intégrale J est donnée par la formule suivante :

$$J = \int_{\Gamma} [w n - \sigma n \cdot i] d\Gamma \quad (34)$$

où ; w est la densité d'énergie de déformation et i désigne la direction d'ouverture des fissures à la pointe, qui est supposé correspondre à la direction globale de x , notée x .

L'équation (34) peut être réécrite sous une forme plus commode que

$$J = \int_{\Gamma} [w \delta - \sigma \cdot n] n d\Gamma \quad (35)$$

L'intégrale J pour la somme de deux états est :

$$J = \int_{\Gamma} [w^{(1)} + w^{(2)} - \sigma^{(1)} \cdot n - \sigma^{(2)} \cdot n] n d\Gamma \quad (36)$$

Les intégrales pour l'état pur (1) et l'état auxiliaire (2) peuvent-être séparées de l'équation (2.34), ce qui laisse un terme d'interaction de telle sorte que :

$$J = J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(1,2)} \quad (38)$$

où ; $J^{(1,2)}$ est le terme d'interaction et est donnée par :

$$J^{(1,2)} = \int_{\Gamma} [w^{(1,2)} - \sigma^{(1)} \cdot n^{(2)} - \sigma^{(2)} \cdot n^{(1)}] n d\Gamma \quad (39)$$

et $W^{(1,2)}$ est la densité d'énergie d'interaction souche ;

$$w^{(1,2)} = \sigma^{(1)} \cdot \varepsilon^{(2)} = \sigma^{(2)} \cdot \varepsilon^{(1)} \quad (40)$$

Puisque on utilise la superposition de deux configurations fissurées, alors on peut ainsi écrire que [59] ;

$$J^{(1,2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + J^{(1,2)} \quad (41)$$

En développant et en réarrangeant les termes de l'équation (2.38), on obtient l'expression suivante ;

$$(\sigma) = (\sigma) + (\sigma) + \frac{(\sigma) (\sigma) (\sigma) (\sigma) (\sigma)}{*} \quad (42)$$

De l'équation (2.35) et (2.39), on a ;

$$(\sigma) = \frac{(\sigma) (\sigma) (\sigma) (\sigma) (\sigma)}{*} \quad (43)$$

Le facteur d'intensité de contraintes pour l'état actuel peut-être trouvé en séparant les deux modes de rupture. En sélectionnant $(\sigma) = 1$ et $(\sigma) = 0$ alors le facteur d'intensité de contraintes en termes d'intégrale d'interaction est [28] ;

$$(\sigma) = \frac{(\sigma) (*)}{*} \quad (44)$$

Une procédure similaire peut également être suivie pour terminer le facteur d'intensité de contrainte en Mode II de telle sorte que $K_{II}^{(2)}$ est donnée par ;

$$(\sigma) = \frac{(\sigma) (*)}{*} \quad (45)$$

L'intégrale de contour (σ) n'est pas dans une forme la mieux adaptée pour les calculs par éléments finis. Il est converti en une zone intégrante en utilisant une fonction de lissage. Cette fonction prend une valeur de l'unité sur un ensemble ouvert contenant la pointe de la fissure et s'annule sur un contour extérieur prescrit C_0 (Figure 32) [29] ;

$$= \frac{1}{0} \quad \Gamma \quad \Gamma \quad (46)$$

A tout point de A, la forme linéaire des fonctions de formes est utilisée pour interpoler la valeur de q. Nous considérons une certaine intégrale sur le contour fermé de la figure 32 où l'intégrante est celui de l'intégrale de l'équation (2.36) multipliée par une fonction [30,31] ;

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} [(\sigma) - (\sigma) \frac{(\sigma)}{\Gamma} - (\sigma) \frac{(\sigma)}{\Gamma}] \Gamma \quad (47)$$

où ; m est la normale extérieure au contour fermé qui vaut sur Γ et - sur Γ . Par l'application du théorème de divergence, l'intégrale d'interaction sera [32] ;

$$(\sigma) = \int [- (\sigma) - (\sigma) \frac{(\sigma)}{\Gamma} - (\sigma) \frac{(\sigma)}{\Gamma}] \Gamma \quad (48)$$

Puisque $\sigma = 0$ sur Γ et que l'intégrande est nulle sur C^+ et C^- , l'intégrale sur le contour fermé se réduit à une intégrale sur T_2 [33] ;

$$(\cdot) = \int \left[-(\cdot) - (\cdot) \frac{(\cdot)}{(\cdot)} - (\cdot) \frac{(\cdot)}{(\cdot)} \right] \frac{(\cdot)}{(\cdot)} \quad (50)$$

Il est souvent souhaitable d'utiliser une forme d'intégrale sur le domaine intérieur une courbe plutôt que sur la courbe elle-même pour valeur l'intégrale J à partir des champs de contrainte et de déplacement obtenus par une méthode numérique. De cette manière, les oscillations parasites qui affectent cette solution numérique se trouvent lissées et généralement la précision et l'indépendance de l'intégrale J de la solution estimée augmentent. Cette technique est développée par [30-33]. En notation par les éléments finis, on obtient ;

$$(\cdot) = \sum \sum \left((\cdot)_{, (\cdot)} + (\cdot)_{, (\cdot)} - (\cdot) \delta \right)_{, | |} \quad (51)$$

où ; est le nombre des éléments du domaine d'intégrations, est le nombre des points d'intégration dans un élément, $|J|$ est le déterminant de la matrice Jacobienne et W_p sont les poids des points de Gauss.

4.8.4 Conclusion

La mécanique de la rupture présente les bases essentielles de la modélisation des fissures. Par cette méthode, on peut déterminer la valeur du facteur d'intensité de contrainte par l'utilisation de l'intégrale d'interaction et l'intégral- J . Les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} peuvent être déterminés de l'extrapolation de déplacement près du bout de la fissure.

REFERENCES

- [1] Hamou. K., Ramdane K., 2007, *Etablissement de la Courbe de Fragilité par la Méthode Pushover*, 7 Colloque National AFPS 2007 – Ecole Centrale Paris.
- [2] Association française du génie parasismique, cahier technique AFPS N° 26, 2006 «*Méthodes en Déplacement : Principe – Codification – Application*», Avril 2006.
- [3] Luis A. Montejo, Mervyn J. Kowalsky, 2007, *CUMBIA, Set of Codes for the Analysis of Reinforced Concrete Members*, Technical Report No. IS-07-01, Department of civil, construction and environmental engineering North Carolina State University Raleigh, NC, 2007.
- [4] Olivier GERMAIN, 2006, *Contribution à l'Analyse du Comportement et au Dimensionnement des Colonnes Elancées en Béton Arme*, Thèse de doctorat.
- [5] Moehle, J. P., Eberhard, M.O, *Earthquake Damage to Bridges, Bridge Engineering Handbook*, 2000.

- [6] Priestley and Paulay, *Seismic Design of Reinforced concrete and masonry buildings*, 1992
- [7] Mattock, A.H.: Rotational Capacity of Hinging Regions in Reinforced Concrete Beams. Portland Cement Association, Bulletin 0 101. Skokie. 1965
- [8] S. Bae, O. Bayrak, Plastic hinge length of reinforced concrete columns. ACI structural journal title n° 105-S28
- [9] Shunsuke Otani, «SAKE A computer program for R/C frames to earthquakes», University of Illinois at Urbana-champaign, Nov, 1974.
- [10] S. Pommier, Mécanique des matériaux, Université Pierre et Marie Curie, 2009-2010.
- [11] C. Bathias, J. P. Bailon, Fatigue des matériaux et des structures, Edition Maline, 1980.
- [12] H. D. Bui, Mécanique de la rupture fragile, Edition Masson, 1978.
- [13] C. Gardin, Introduction à la mécanique de la rupture, ENSMA, Poitiers, France, 2005.
- [14] N. K. Mukhopadhyay, S. K. Maiti and A. Kakodkar, 2000, Review of SIF evaluation and modeling of singularities in BEM, Journal of Computational Mechanics, Vol. 25, 4, pp. 358-375.
- [15] A. A. Griffith. 1920. The phenomena of rupture and flow in solids. Philosophical Transactions, Series A 221: 163–198.
- [16] C. E. Inglis (1913), “Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners”. Trans. Institution of Naval Architects 55, pp 219-242.
- [17] G. R. Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, Journal of Applied Mechanics. vol. 24, pp. 361-364, September 1957.
- [18] G. C. Sih, P.C. Paris & G. R. Irwin, 1965, On cracks in rectilinearly anisotropic bodies”, International Journal of Fracture Mechanics 1: 189–203
- [19] Westergaard H M (1934): Stresses at a crack, size of the crack and the bending of reinforced concrete, Proc. American Concrete Institute, 30, 93-102
- [20] J.R.Rice, A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, Journal of Applied Mechanics, 35 (1968), p. 379-386
- [21] Knott, J. ‘From CODs to CODES (The Realisation of Fracture Mechanics in the UK)’, Fracture Research in Retrospect – An Anniversary Volume in Honour of George R, Irwin’s 90th Birthday, Edited by H P Rossmanith, Published by A.A.Balkema, Netherlands, ISBN 9054106794, 1997.
- [22] Wells, A A., Unstable crack propagation in metals: cleavage and fast fracture, Proceedings of the crack propagation symposium, Cranfield, UK, Vol. 2, 210, 1961.

- [23] J. R. Rice, A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, *Journal of Applied Mechanics*, 35 (1968), p. 379-386
- [24] M. H. Aliabadi, 2002, *Boundary Elements method: Application in Solids and Structures*, Vol. 2. Chichester, Edition John Wiley & sons, p. 580.
- [25] T. L. Anderson 2005, *Fracture mechanics: fundamentals and applications*, 3rd. Boca Raton, FL: Taylor & Francis, 621 p.
- [26] J. R. Rice, *Mathematical analysis in the mechanics of fracture*, London Academic press, Vol. 2, pp 191-311, 1968.
- [27] K. Z. Xian, A. J. Joyce, Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization, *Engineering Fracture Mechanics*, 85(2012)1–46.
- [28] JD Eshelby, The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems, *Proceedings of the Royal Society of London*, 1957
- [29] Yau, J., F., Wang, S, S. and Corten, H, T. (1980) A Mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity, *Journal of Applied Mechanics* 47, 335-341.
- [30] J. P. Matthew & N. H. Kim, *Modeling Failure in Composite Materials with the Extended Finite Element and Level Set Methods*, University of Florida, Gainesville, FL 32611.
- [31] S. Mohammadi 2008, *Extended finite element method for fracture analysis of structures*, by Ed. Blackwell Publishing Ltd.
- [32] M. Chabaat, *Elasticité Avancée et Mécanique de la Rupture*, Polycopié pour Post-Graduation, Faculté de Génie Civil/USTHB (2004).
- [33] M. Chabaat, *Elasticité et Application*, Polycopié pour Post-Graduation, Faculté de Génie Civil/USTHB (2002).

Le polycopié qui s'adresse aux étudiants de 1^{er} et 2^{ème} année Mastère en Génie Civil ,et cet ouvrage s'adresse aussi bien aux étudiants qui abordent la mécanique de la rupture et plus particulièrement ceux des spécialistes en génie mécanique et électromécanique, est divisé en deux parties comme suit :

Partie 1 : destinée à un cours sur la plasticité des structures. Cette partie est composée d'une Introduction, de trois chapitres bien proportionnés ainsi que des références bibliographiques.

Partie 2 : dévolue à l'analyse de l'endommagement des structures. Elle est composée d'une introduction, d'un seul chapitre consacré entièrement au cours de mécanique de la rupture ainsi que des références bibliographique à la fin du polycopié