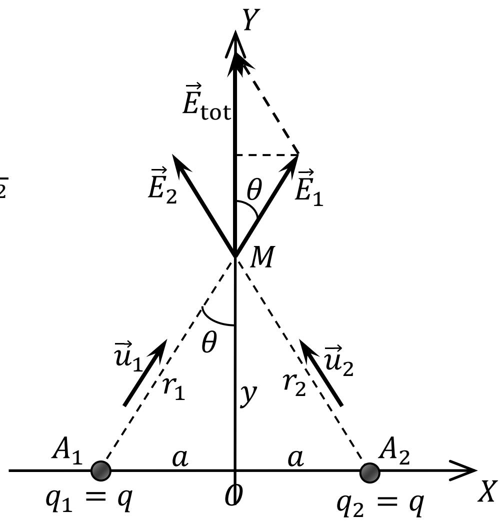
CORRIGÉ DE LA SÉRIE DE TD N° 02

EXERCICE 01 :



1.

$q_1 = q_2 = \dfrac{Q}{2}$ avec $A_1(-a, 0)$; $A_2(a, 0)$; $M(0, y)$

$\vec{r}_1 = \overrightarrow{A_1M}\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{A_2M}\begin{pmatrix} -a \\ y \end{pmatrix}$ en module $r_1 = r_2 = \sqrt{a^2 + y^2}$

En remplaçant dans

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = K\frac{q_1}{r_1^3}\vec{r}_1 + K\frac{q_2}{r_2^3}\vec{r}_2$$

Et

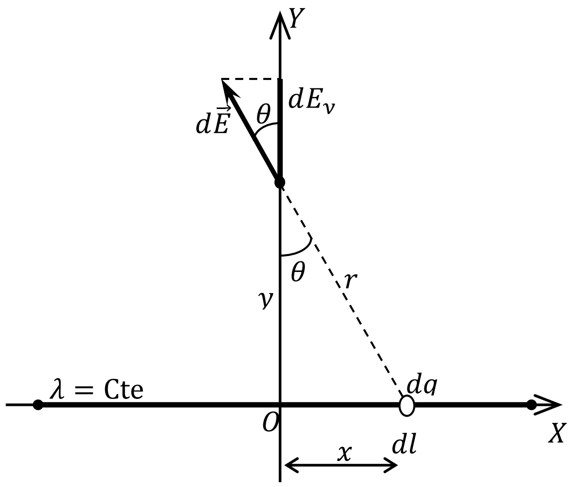
$$\vec{E} = \frac{K(Q/2)}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} + \frac{K(Q/2)}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} -a \\ y \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{\vec{E} = \frac{K(Q/2)}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix} = KQ\frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\vec{e}_y}$$

2. *Distribution :* La distribution est linéaire $dq = \lambda . dl$ et uniforme $\lambda =$ Constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\lambda \int \frac{dl}{r^2}\vec{u}_r$$



Symétrie : M se trouve sur l'axe (OY) qui est un axe de symétrie

$$\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_y}$$

On calcul uniquement la composante suivant (OY).

$$dE = K\lambda\frac{dl}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En projetant sur l'axe (OY).

$$dE_y = dE.\cos\theta = K\lambda\frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

Et

$$E_y = \int dE_y = K\lambda\int\frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

Paramétrage : (Paramètre $-\theta_0 \leq \theta \leq +\theta_0$)

$$\begin{cases} dl = dx = (y/\cos^2\theta).d\theta \\ r = y/\cos\theta \\ \cos\theta = \cos\theta \end{cases} \quad \text{car} \quad x = y.\tan\theta \quad \text{et} \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{y}{\cos^2\theta}$$

En remplaçant dans l'intégrale, il vient que :

$$E_y = K\lambda\int\frac{1}{y^2/\cos^2\theta}\frac{y}{\cos^2\theta}\cos\theta\, d\theta \quad \Rightarrow \quad E_y = \frac{K\lambda}{y}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\cos\theta\, d\theta$$

Ce qui donne

$$E_y = 2\frac{K\lambda}{y}\sin\theta_0 \qquad \text{avec} \qquad \sin\theta_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}$$

Finalement

$$E_y = 2\frac{K\lambda}{y}\frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{E} = 2\frac{K\lambda}{y}\frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}}\vec{e}_y = K\frac{Q}{y}\frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}}\vec{e}_y}$$

EXERCICE 02 :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{e}_z\right)$$

1.

$V(r) = a.(x^2 - y^2) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{grad}(V) = 2a.x.\vec{e}_x - 2a.y.\vec{e}_y + 0.\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -2a.\left(x.\vec{e}_x - y.\vec{e}_y\right)}$

2.

$V(r) = a.x.y \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{grad}(V) = a.y.\vec{e}_x + a.x.\vec{e}_y + 0.\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = -a.\left(y.\vec{e}_x + x.\vec{e}_y\right)}$

3.

$$V(r) = a.(x^2 + y^2) + b.z^2 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{grad}(V) = 2a.x.\vec{e}_x + 2a.y.\vec{e}_y + 2b.z.\vec{e}_z$$

Donc

$$\boxed{\vec{E} = -2\left(a.x.\vec{e}_x + a.y.\vec{e}_y + b.z.\vec{e}_z\right)}$$

4.

$$V(r) = \vec{a}\bullet\vec{r} = a_x.x + a_y.y + a_z.z \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{grad}(V) = a_x.\vec{e}_x + a_y.\vec{e}_y + a_z.\vec{e}_z$$

Donc

$$\boxed{\vec{E} = -\left(a_x.\vec{e}_x + a_y.\vec{e}_y + a_z.\vec{e}_z\right)h = -\vec{a}}$$

EXERCICE 03 :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{e}_z\right)$$

1. $\vec{E} = a.\left(y.\vec{e}_x + x.\vec{e}_y\right)$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad V = hhh(x,y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -a.y \quad \Rightarrow \quad V = -\int a.y.dx \quad \Rightarrow \quad V = -a.y.x + f(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -a.x \quad \Rightarrow \quad V = -\int a.x.dy \quad \Rightarrow \quad V = -a.x.y + g(x)$$

En comparant :

$$V = -a.y.x + f(y) = -a.x.y + g(x) \quad \Rightarrow \quad f(y) = g(x) = \text{Constante}$$

D'où

$$V = -a.y.x + C$$

Comme $V(1,1) = 0$

$$V(1,1) = -a + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = a \quad \text{et} \quad \boxed{V = -a.y.x + a}$$

2. $\vec{E} = a.y.\vec{e}_x + (a.x + b.z).\vec{e}_y + b.y.\vec{e}_z$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -a.y \quad \Rightarrow \quad V = -\int a.y.dx \quad \Rightarrow \quad V = -a.y.x + f(y,z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -a.x - b.z \quad \Rightarrow \quad V = -\int (a.x + b.z).dy \quad \Rightarrow \quad V = -a.x.y - b.z.y + g(x,z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -\int b.y.dz \quad \Rightarrow \quad V = -b.y.z + h(x,y)$$

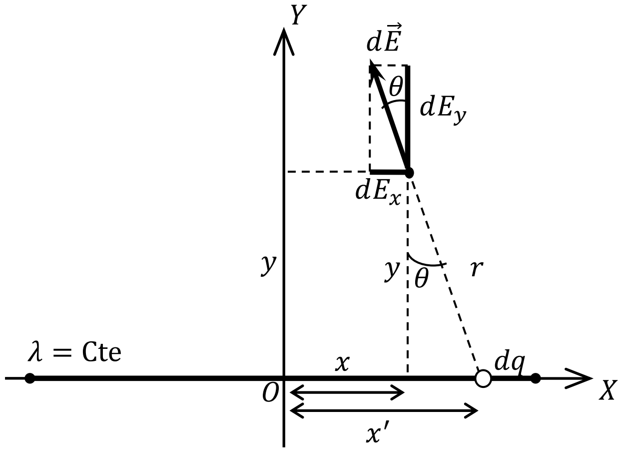
D'où

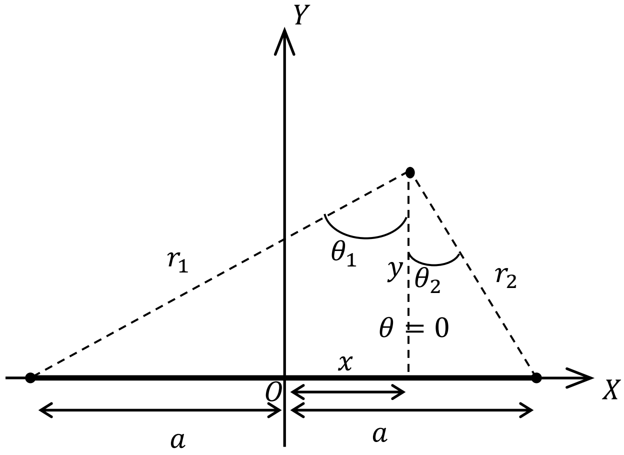
$$V = -a.y.x - b.z.y + C$$

Comme $V(1,3,1) = 0$

$$V(1,1) = -a.3 - b.3 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 3.(a+b) \quad \text{et} \quad \boxed{V = -a.y.x - b.z.y + 3.(a+b)}$$

EXERCICE 04 :





1. *Distribution :* La distribution est linéaire $dq = \lambda . dl$ et uniforme $\lambda =$ Constante. Donc :

$$d\vec{E} = K\lambda \frac{dl}{r^2}\vec{u}_r \qquad \text{et} \qquad dE = K\lambda \frac{dl}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En projetant.

$$dE_x = -dE.\sin\theta = -K\lambda \frac{dl}{r^2}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad E_x = \int dE_x = -K\lambda \int \frac{dl}{r^2}\sin\theta$$

$$dE_y = dE.\cos\theta = K\lambda \frac{dl}{r^2}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad E_y = \int dE_y = K\lambda \int \frac{dl}{r^2}\cos\theta$$

Paramétrage : (Paramètre $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$)

$$\begin{cases} dl = dx'' = (y/\cos^2\theta).d\theta \\ r = y/\cos\theta \\ \cos\theta = \cos\theta \\ \sin\theta = \sin\theta \end{cases} \qquad \text{car} \quad (x' - x) = y.\tan\theta \quad \text{et} \quad \frac{dx'}{d\theta} = \frac{y}{\cos^2\theta}$$

Il faut remarquer que x et y sont constante pendant l'intégration.

En remplaçant dans les intégrale, il vient que :

$$E_x = -K\lambda \int \frac{1}{y^2/\cos^2\theta}\frac{y}{\cos^2\theta}\sin\theta\, d\theta \quad \Rightarrow \quad E_x = -\frac{K\lambda}{y}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\, d\theta = +\frac{K\lambda}{y}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$E_y = K\lambda \int \frac{1}{y^2/\cos^2\theta}\frac{y}{\cos^2\theta}\cos\theta\, d\theta \quad \Rightarrow \quad E_y = \frac{K\lambda}{y}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\, d\theta = \frac{K\lambda}{y}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

Déterminons les valeurs limites :

$$\sin\theta_1 = -\frac{x-(-a)}{r_1} = -\frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} \quad ; \quad \sin\theta_2 = \frac{a-x}{r_2} = -\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{y}{r_1} = \frac{y}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} \quad ; \quad \cos\theta_2 = \frac{y}{r_2} = \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

En remplaçant

$$\boxed{E_x = K\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}\right)}$$

$$\boxed{E_y = \frac{K\lambda}{y}\left(\frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} - \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}\right)}$$

EXERCICE 05 :

1. Au point M_1 : *Distribution* linéaire : $dq = \lambda . dl$

Potentiel :

$$dV = K\frac{\lambda . dl}{r} \quad \text{et} \quad V_{M_1} = \int dV = K\lambda \int \frac{1}{r} dl$$

Paramétrage (paramètre $x - \frac{L}{2} \leq l \leq x + \frac{L}{2}$)

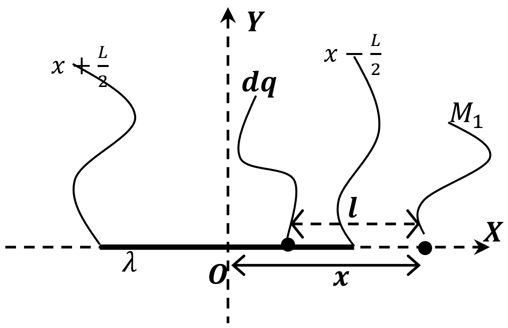
$$\begin{cases} r = l \\ dl = dl \end{cases} \Rightarrow \quad V_{M_1} = K\lambda \int_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} \frac{dl}{l} = K\lambda . [\ln(l)]_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}}$$

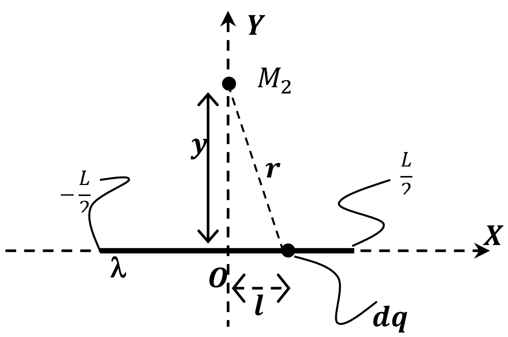
D'où

$$\boxed{V_{M_1} = K\lambda . \ln\left(\frac{x+\frac{L}{2}}{x-\frac{L}{2}}\right) = K\lambda . \ln\left(\frac{2x+L}{2x-L}\right)}$$

2.

$$\vec{E}_{M_1} = -\overrightarrow{grad}\left(V_{M_1}\right) = -\frac{\partial V_{M_1}}{\partial x}\,\vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_{M_1} = \left(\frac{4K\lambda . L}{4.x^2 - L^2}\right)\vec{e}_x}$$





3. Pour $\quad x \gg L \quad \Rightarrow \quad 4.x^2 - L^2 \approx 4.x^2 \quad$ et

$$\boxed{\vec{E}_{M_1} \approx \left(\frac{K\lambda . L}{x^2}\right)\vec{e}_x = K\frac{Q}{x^2}\,\vec{e}_x}$$

4. Au point M_2 : *Distribution* linéaire : $dq = \lambda . dl$

Potentiel :

$$dV = K\frac{\lambda . dl}{r} \quad \text{et} \quad V_{M_2} = \int dV = K\lambda \int \frac{1}{r} dl$$

Paramétrage (paramètre $x - \frac{L}{2} \leq l \leq x + \frac{L}{2}$)

$$\begin{cases} r = \sqrt{l^2 + y^2} \\ dl = dl \end{cases} \Rightarrow \quad V_{M_1} = K\lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{dl}{\sqrt{l^2 + y^2}} = K\lambda . \left[\ln\left(l + \sqrt{l^2 + y^2}\right)\right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}$$

D'après l'intégrale donnée $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + c^2}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + c^2}\right)$. On a donc :

$$\boxed{V_{M_2} = K\lambda . \ln\left(\frac{\sqrt{l^2 + 4.y^2} + L}{\sqrt{l^2 + 4.y^2} - L}\right)}$$

EXERCICE 06 :

Calcul du champ :

Distribution : La distribution est linéaire $dq = \lambda . dl$ et uniforme $\lambda =$ Constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\lambda \int \frac{dl}{r^2} \vec{u}_r$$

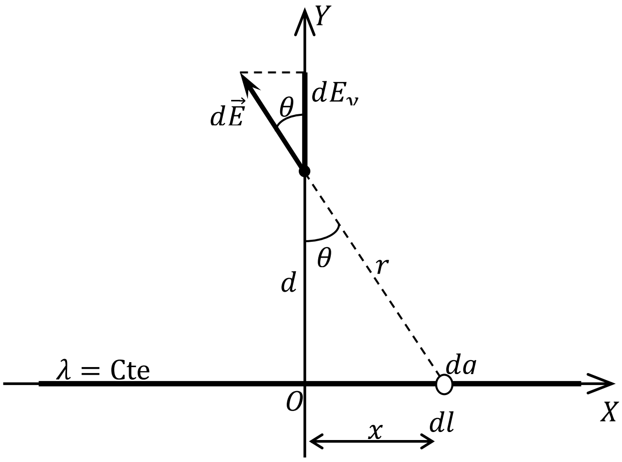
Symétrie : M se trouve sur l'axe OY qui est un axe de symétrie $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_y}$

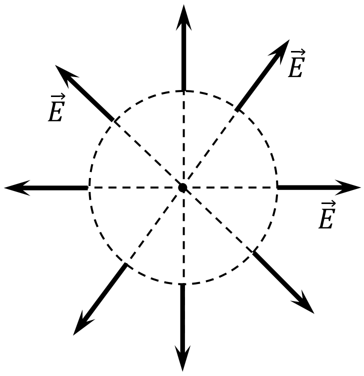
On calcul uniquement la composante suivant (OY).

$$dE = K\lambda \frac{dl}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

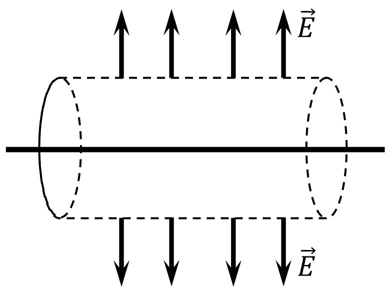
En projetant sur l'axe (OY).

$$dE_y = dE . \cos\theta = K\lambda \frac{dl}{r^2} \cos\theta \qquad \text{et} \qquad E_y = \int dE_y = K\lambda \int \frac{dl}{r^2} \cos\theta$$





Symétrie : Vue de côté.



Symétrie

Paramétrage : (Paramètre $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq +\frac{\pi}{2}$)

$$\begin{cases} dl = dx = (d/\cos^2\theta) . d\theta \\ r = d/\cos\theta \\ \cos\theta = \cos\theta \end{cases} \qquad \text{car} \quad x = d . \tan\theta \quad \text{et} \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{\cos^2\theta}$$

En remplaçant dans l'intégrale, il vient que :

$$E_y = K\lambda \int \frac{1}{d^2/\cos^2\theta} \frac{d}{\cos^2\theta} \cos\theta \, d\theta \qquad \Rightarrow \qquad E_y = \frac{K\lambda}{d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta$$

Ce qui donne

$$E_y = 2\frac{K\lambda}{d} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{E} = 2\frac{K\lambda}{d} \vec{e}_y}$$

Vu la symétrie cylindrique du champ, Nous plaçons la droite chargée suivant l'axe (OZ). Dans ce cas

$$\boxed{\vec{E} = 2\frac{K\lambda}{\rho} \vec{e}_\rho} \qquad \text{et} \qquad \rho = d$$

EXERCICE 07 :

Potentiel :

La distribution est linéaire $dq = \lambda . dl$ et uniforme $\lambda =$ Constante. Donc :

$$V = K\lambda \int \frac{1}{r} dl$$

Comme $r = R =$ Constante

$$V = \frac{K\lambda}{R} \int dl = \frac{K\lambda}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} R . d\theta \qquad \text{avec} \qquad dl = R . d\theta \quad \text{(coordonnées polaires)}$$

D'où

$$\boxed{V = \pi K . \lambda}$$

Champ : *La distribution* est linéaire $dq = \lambda . dl$ et uniforme $\lambda =$ Constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\lambda \int \frac{dl}{r^2} \vec{u}_r$$

En fait ceci revient à calculer deux intégrales suivant les deux axes OX et OY.(Figure de droite)

$$\begin{cases} dE_x = dE . \cos\theta \\ dE_y = dE . \sin\theta \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad dE = K\lambda \frac{dl}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En utilisant $r = R =$ Constante et $dl = R . d\theta$ (coordonnées polaires).

$$dE_x = \frac{K\lambda}{R} \cos\theta . d\theta \quad \Rightarrow \quad E_x = \frac{K\lambda}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\theta . d\theta = \frac{K\lambda}{R} [\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad E_x = 2\frac{K\lambda}{R}$$

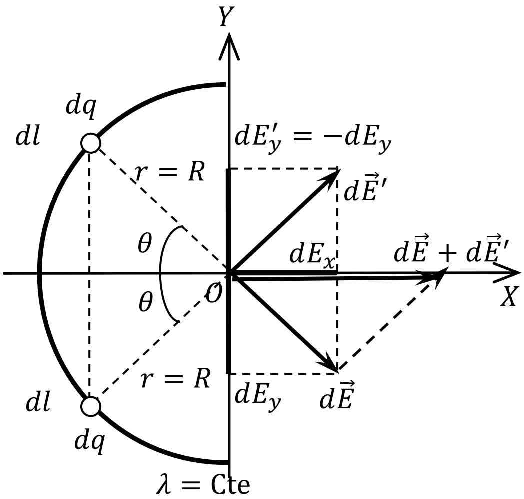
$$dE_y = \frac{K\lambda}{R} \sin\theta . d\theta \quad \Rightarrow \quad E_y = \frac{K\lambda}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\theta . d\theta = \frac{K\lambda}{R} [-\cos\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad E_y = 0$$

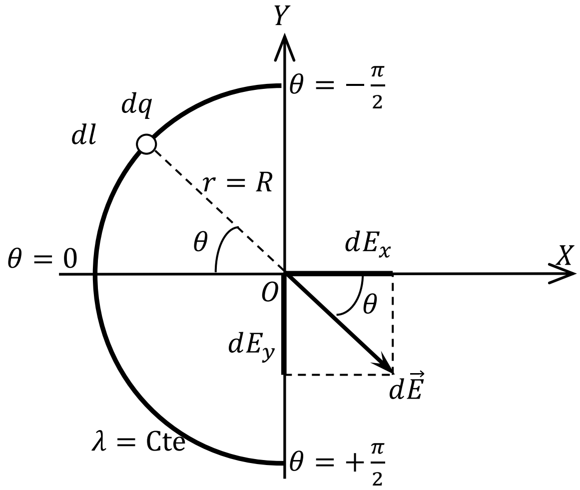
Finalement

$$\vec{E} = E_x . \vec{e}_x - E_y . \vec{e}_y \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{E} = 2\frac{K\lambda}{R} \vec{e}_x}$$

On remarque que OX est un axe de symétrie :

La somme vectorielle des champs élémentaires $d\vec{E}$ et $d\vec{E}'$ crées par deux charges symétriques, sera parallèle à l'axe de symétrie OX. D'où, si nous faisons la somme deux par deux des champs crées par chaque charge et la charge qui lui est symétrique, le champ total obtenu sera parallèle à l'axe de symétrie OX. (Figure de gauche).





EXERCICE 08 :

1. Démontrons la symétrie de $\lambda = \lambda_0 . \cos(\theta)$ par rapport à (OX).
Puisque

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta) \quad \Rightarrow \quad \lambda(\theta) = \lambda(-\theta)$$

D'où deux charges symétriques par rapport à l'axe (OX) ont la même valeur et' le même signe

$$dq = \lambda(\theta). dl \quad \text{et} \quad dq'^{\prime} = \lambda(-\theta). dl \quad \Rightarrow \quad dq = dq'$$

Donc : la distribution est symétrique par rapport à l'axe (OX)

2. Champ : *Distribution* linéaire $dq = \lambda(\theta). dl$ avec $\lambda(\theta) = \lambda_0 . \cos(\theta)$

$$d\vec{E} = K\lambda \frac{dl}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad dE = K\lambda \frac{dl}{r^2}$$

Symétrie : Le champ au point O est parallèle à l'axe de symétrie (OX), d'où en projetant sur cet axe (on utilisant l'angle polaire θ).

$$dE_x = dE. \cos\theta = K\lambda \frac{dl}{r^2} \cos\theta \quad \text{et} \quad E_x = \int dE_x = K \int \lambda \frac{dl}{r^2} \cos\theta$$

Paramétrage : Paramètre $(-\theta_0 \leq \theta \leq +\theta_0)$

$$\begin{cases} dl = R. d\theta \\ \cos\theta = \cos\theta \\ \lambda = \lambda_0 . \cos(\theta) \\ r = R = \text{constante} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_x = \frac{K. \lambda_0}{R} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos^2\theta \, . d\theta$$

On utilise $2. \cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$
Donc

$$E_x = \frac{K. \lambda_0}{2R} \left[1 + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_{-\theta_0}^{+\theta_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_x = \frac{K. \lambda_0}{2R} (2. \theta_0 + \sin(2. \theta_0))}$$

3. Potentiel :

$$dV = K\lambda \frac{dl}{r} \quad \text{et} \quad V = \int dV = K \int \lambda \frac{dl}{r}$$

En utilisant le même paramétrage précédent :

$$V = \frac{K. \lambda_0}{R} \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \cos\theta \, . d\theta = \frac{K. \lambda_0}{R} [\sin\theta]_{-\theta_0}^{+\theta_0}$$

Donc

$$\boxed{V = 2 \frac{K. \lambda_0}{R} \sin(\theta_0)}$$

EXERCICE 09 :

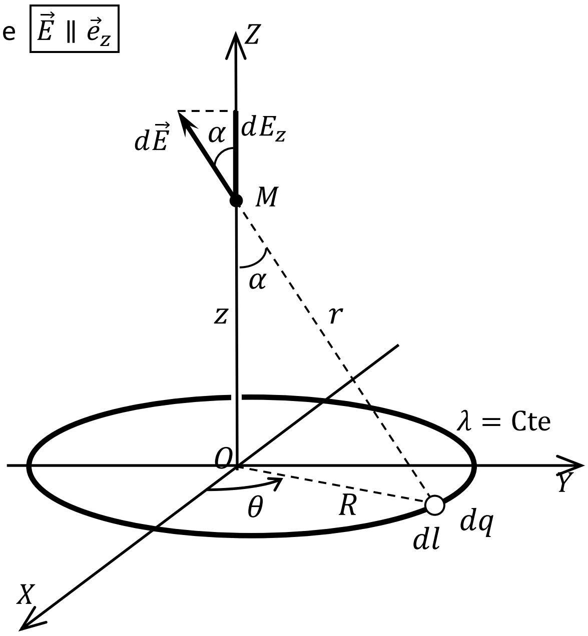
1. Champ :

Distribution : La distribution est linéaire $dq = \lambda.dl$ et uniforme $\lambda =$ Constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\lambda \int \frac{dl}{r^2}\vec{u}_r$$

Symétrie : M se trouve sur l'axe (OZ) qui est un axe de symétrie $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_z}$

On calcul uniquement la composante suivant (OZ).



$$dE = K\lambda\frac{dl}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En projetant sur l'axe OZ.

$$dE_z = dE.\cos\alpha = K\lambda\frac{dl}{r^2}\cos\alpha$$

Et

$$E_z = \int dE_z = K\lambda\int\frac{dl}{r^2}\cos\alpha$$

Paramétrage : (Paramètre $0 \leq \theta \leq 2\pi$)

$$\begin{cases} dl = R.d\theta \\ r = \sqrt{R^2+z^2} = \text{Constante} \\ \cos\alpha = z/r = z/\sqrt{R^2+z^2} = \text{Constante} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'intégrale, il vient que :

$$E_z = K\lambda\frac{1}{R^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\int_0^{2\pi} R.d\theta$$

Donc

$$E_z = 2\pi.K\lambda\frac{R.z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{E} = 2\pi.K\lambda\frac{R.z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z}$$

2. Pour $z \gg R$ nous pouvons écrire $R^2+z^2 \approx z^2$, donc :

$$\boxed{\vec{E} \approx 2\pi.K\lambda\frac{R}{z^2}\vec{e}_z = K\frac{Q}{z^2}\vec{e}_z} \qquad \text{avec} \quad Q = \int \lambda.dl = \lambda.2\pi.R$$

3. La valeur maximale du champ s'obtient en annulant la dérivée :

$$\frac{dE}{dz} = K.2\pi.R.\lambda\frac{(R^2+z^2)^{3/2} - 3.z^2.(R^2+z^2)^{1/2}}{(R^2+z^2)^3} = 0$$

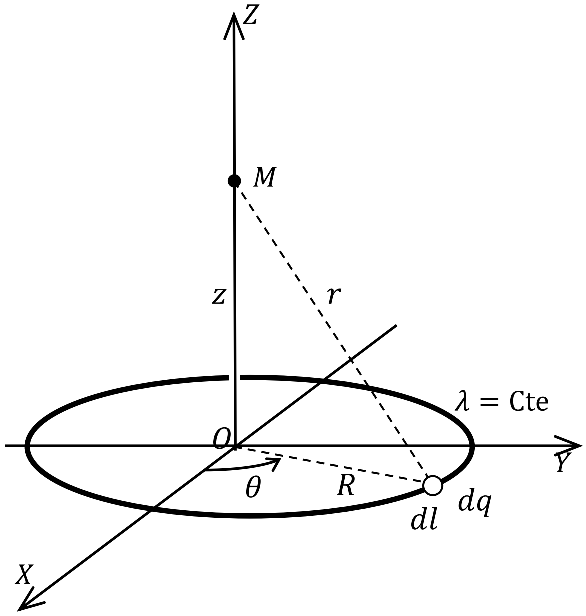
D'où

$$R^2+z^2 = 3.z^2 \qquad \text{et} \qquad \boxed{z = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}}$$

En remplaçant dans l'expression du champ (en module)

$$\boxed{E_{\max} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}K\lambda\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}}$$

EXERCICE 10 :



1. Potentiel au point M.

$$dV = K\lambda\frac{dl}{r} \qquad \text{et} \qquad V = \int dV = K\int \lambda\frac{dl}{r}$$

Paramétrage (paramètre $0 \leq \theta \leq 2\pi$)

$$\begin{cases} r = \sqrt{z^2 + R^2} = \text{constante} \\ dl = R.d\theta \end{cases}$$

D'où

$$V = \frac{K.\lambda.R}{\sqrt{z^2 + R^2}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{K.\lambda.2\pi R}{\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Et

$$\boxed{V_M = K\frac{Q}{\sqrt{z^2 + R^2}}} \qquad \text{avec} \quad Q = \lambda.2\pi R$$

Potentiel au point O centre du cercle ($z = 0$)

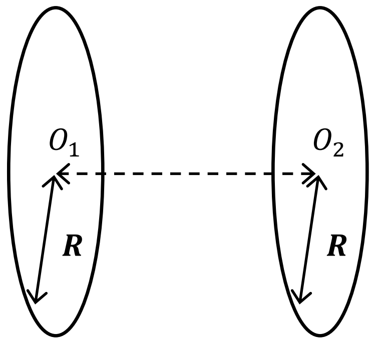
$$\boxed{V_O = K\frac{Q}{R} = 2\pi K.\lambda}$$

2. Différence de potentiel

$$\Delta V = V(O_1) - V(O_2)$$

$V(O_1)$: est le potentiel au point O_1 il est crée par cercle (1) en son centre et par le cercle (2) au centre du cercle (1).

$V(O_2)$: est le potentiel au point O_2 il est crée par cercle (2) en son centre et par le cercle (1) au centre du cercle (2).



$$V(O_1) = V_1(O_1) + V_2(O_1) = K\frac{q_1}{R} + K\frac{q_2}{\sqrt{d^2 + R^2}}$$
$$V(O_2) = V_2(O_2) + V_1(O_2) = K\frac{q_2}{R} + K\frac{q_1}{\sqrt{d^2 + R^2}}$$

Donc

$$\Delta V = K\frac{(q_1 - q_2)}{R} + K\frac{(q_2 - q_1)}{\sqrt{d^2 + R^2}}$$

Et

$$\boxed{\Delta V = K(q_1 - q_2)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + R^2}}\right)}$$

3. Travail :

$$W_{O_1}^{O_2} = \int_{O_1}^{O_2} \vec{F}\bullet d\vec{l} = -q.V(O_2) + q.V(O_1)$$

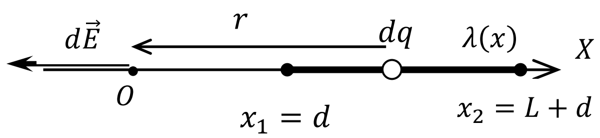
Donc

$$\boxed{W_{O_1}^{O_2} = q.\Delta V = Kq.(q_1 - q_2)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + R^2}}\right)}$$

Application numérique :

$$\boxed{\Delta V = 24369{,}2\ Volts} \ ; \ \boxed{W_{O_1}^{O_2} = 1{,}46 \times 10^{-4}\ joules}$$

EXERCICE 11 :



Distribution : La distribution est linéaire $dq = \lambda . dl$, non uniforme $\lambda \neq$ Constante. Donc :

$$d\vec{E} = K\frac{\lambda . dl}{r^2}\vec{u}_r \qquad \text{et} \qquad dE = K\frac{\lambda . dl}{r^2}$$

Symétrie : L'axe (OX) est un axe de symétrie $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_x}$

On calcul uniquement la composante suivant (OX).

$$dE_x = -dE = -K\frac{\lambda . dl}{r^2}$$

Et

$$E_x = \int dE_x = -K\int \frac{\lambda . dl}{r^2}$$

Paramétrage : (Paramètre $d \leq x \leq L + d$)

$$\begin{cases} dl = dx \\ r = x \\ \lambda = \lambda_0 \dfrac{(x-d)}{d} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad E_x = -\frac{K\lambda_0}{d}\int_d^{L+d} \frac{(x-d)}{x^2}dx$$

Donc

$$E_x = -\frac{K\lambda_0}{d}\int_d^{L+d}\left(\frac{1}{x} - \frac{d}{x^2}\right)dx = -\frac{K\lambda_0}{d}\left[\ln x + \frac{d}{x}\right]_d^{L+d}$$

Finalement

$$\boxed{\vec{E} = E_x . \vec{e}_x = -\frac{K\lambda_0}{d}\left(\ln\left(\frac{L+d}{d}\right) - \frac{L}{L+d}\right). \vec{e}_x}$$

EXERCICE 12 :

1. Calcul du potentiel électrostatique au point O :

$$V = \int dV = \int K\frac{dq}{r}$$

Distribution linéaire non uniforme $\quad dq = \lambda.dl = \lambda_0.\sin(\theta).dl$

Paramétrage (paramètre θ ; $0 \leq \theta \leq 2\pi$) : $\begin{cases} dl = R.d\theta \\ r = R = \text{Constante} \end{cases}$

D'où

$$V = K.\lambda_0 \int_0^{2\pi} \sin(\theta).d\theta = K.\lambda_0[\cos\theta]_0^{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = 0}$$

2. Champ électrostatique au point O pour $\lambda = \lambda_0.\sin(\theta)$:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int K\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = \int K\frac{\lambda.dl}{r^2}\vec{u}_r$$

<u>Symétrie :</u> (OY) est un axe de symétrie passant par O. Donc, $\vec{E} \parallel \vec{e}_y$ ou $\vec{E} = 0.\vec{e}_x + E_y.\vec{e}_y$

En projetant

$$dE_y = -dE.\sin\theta = -K\frac{\lambda.dl}{r^2}\sin\theta \quad \Rightarrow \quad E_y = \int dE_y = -\int K\frac{\lambda.dl}{r^2}\sin\theta$$

<u>Paramétrage</u> (paramètre θ ; $0 \leq \theta \leq 2\pi$) : $\begin{cases} dl = R.d\theta \\ r = R = \text{Constante} \end{cases}$

D'où

$$E_y = -K\frac{\lambda_0}{R}\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta).d\theta$$

En utilisant $2.\sin^2(\theta) = 1 - \cos(2\theta)$.

$$E_y = -K\frac{\lambda_0}{2R}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2\theta)).d\theta = -K\frac{\lambda_0}{2R}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = -\pi.K\frac{\lambda_0}{R} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{E} = -\pi.K\frac{\lambda_0}{R}\vec{e}_y}$$

3. Champ électrostatique au point O pour $\lambda = \lambda_0.\cos(\theta)$:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int K\frac{dq}{r^2}\vec{u}_r = \int K\frac{\lambda.dl}{r^2}\vec{u}_r$$

<u>Symétrie :</u> (OX) est un axe de symétrie passant par O. Donc, $\vec{E} \parallel \vec{e}_x$ ou $\vec{E} = E_x.\vec{e}_x + 0.\vec{e}_y$

En projetant

$$dE_x = -dE.\cos\theta = -K\frac{\lambda.dl}{r^2}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad E_x = \int dE_x = -\int K\frac{\lambda.dl}{r^2}\cos\theta$$

<u>Paramétrage</u> (paramètre θ ; $0 \leq \theta \leq 2\pi$) : $\begin{cases} dl = R.d\theta \\ r = R = \text{Constante} \end{cases}$

D'où

$$E_y = -K\frac{\lambda_0}{R}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta).d\theta$$

En utilisant $2.\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$.

$$E_x = -K\frac{\lambda_0}{2R}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2\theta)).d\theta = -K\frac{\lambda_0}{2R}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = -\pi.K\frac{\lambda_0}{R} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{E} = -\pi.K\frac{\lambda_0}{R}\vec{e}_x}$$

4. Le module de $\vec{E}$ reste inchangé car la distribution est la même dans les deux cas, elle a seulement subit une rotation d'un angle $\pi/2$. En effet $\quad \sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$.

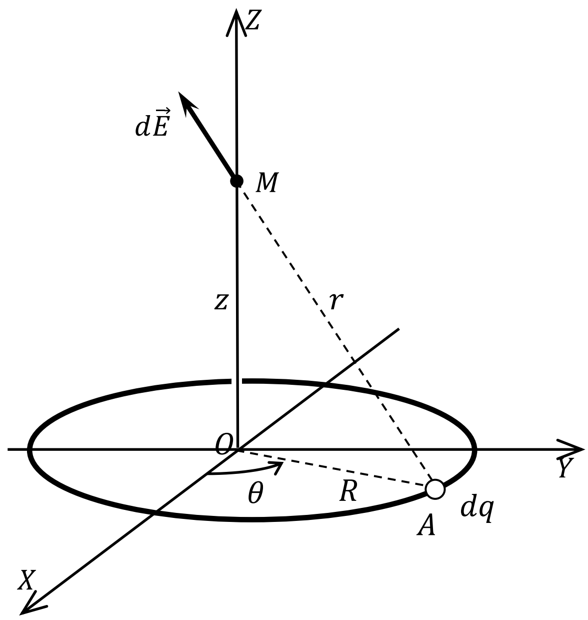
- Dans le premier cas $\vec{E} \parallel \vec{e}_y$ car (OY) est un axe de symétrie.
- Dans le premier cas $\vec{E} \parallel \vec{e}_x$ car (OX) est un axe de symétrie.

EXERCICE 13 :

Champ :

Distribution : La distribution est linéaire $dq = \lambda.dl$ non uniforme $\lambda \neq$ Constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\int \frac{\lambda.dl}{r^2}\vec{u}_r = K\int \frac{\lambda.dl}{r^3}\vec{r}$$



Symétrie : Nous n'avons pas d'axe de symétrie passant par le point M, donc, nous devons calculer les trois composantes.

Calculons le vecteur $\vec{r}$.

$$A(x, y, 0) \quad \text{et} \quad M(0,0,z) \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

Et le module.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Donc

$$d\vec{E} = K\frac{\lambda.dl}{r^3}\vec{r} = K\frac{\lambda.dl}{r^3}\left(-x.\vec{e}_x - y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_x\right)$$

D'où

$$dE_x = -K\frac{\lambda.dl}{r^3}x \quad \text{et} \quad E_x = \int dE_x = -K\int \frac{\lambda.dl}{r^3}x$$

$$dE_y = -K\frac{\lambda.dl}{r^3}y \quad \text{et} \quad E_y = \int dE_y = -K\int \frac{\lambda.dl}{r^3}y$$

$$dE_z = +K\frac{\lambda.dl}{r^3}z \quad \text{et} \quad E_z = \int dE_z = +K\int \frac{\lambda.dl}{r^3}z$$

Paramétrage : (Paramètre $0 \leq \theta \leq 2\pi$)

$$\begin{cases} dl = R.d\theta \\ x = R.\cos\theta \\ y = R.\sin\theta \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} r = \sqrt{R^2 + z^2} = \text{Constante} \\ \lambda = \lambda_0.\sin\theta \end{cases}$$

En remplaçant dans les intégrale précédentes, il vient que :

$$E_x = -K\frac{\lambda_0.R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} \sin\theta.\cos\theta.d\theta = -\frac{1}{2}K\frac{\lambda_0.R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} \sin(2\theta).d\theta$$

Donc

$$E_x = -\frac{1}{2}K\frac{\lambda_0.R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Et

$$E_y = -K\frac{\lambda_0.R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta.d\theta = -\frac{1}{2}K\frac{\lambda_0.R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta)).d\theta$$

Donc

$$E_y = -\frac{1}{2}K\frac{\lambda_0.R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\left[\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} = -K\frac{\lambda_0.\pi R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Et

$$E_z = K\frac{\lambda_0.R.z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} \sin\theta.d\theta = K\frac{\lambda_0.R.z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}[-\cos\theta]_0^{2\pi} = 0$$

Finalement

$$\boxed{\vec{E} = 0.\vec{e}_x - \left(K\frac{\lambda_0.\pi R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\right).\vec{e}_y + 0.\vec{e}_x}$$

EXERCICE 14 :

Champ électrostatique :

Distribution

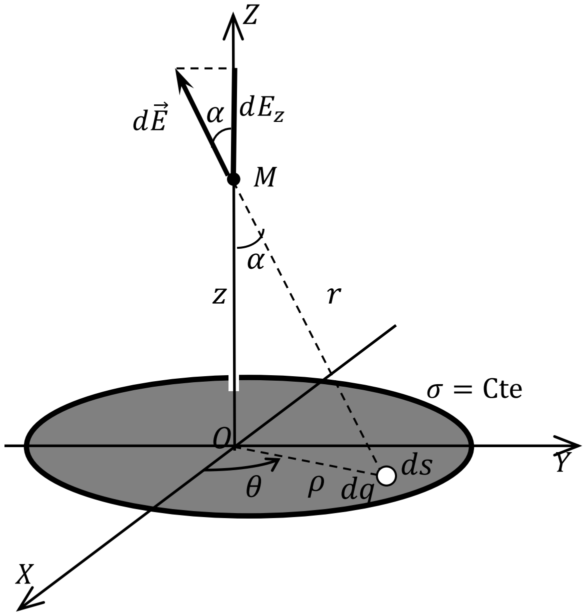
La distribution est surfacique $dq = \sigma . ds$ et uniforme $\sigma =$ Constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\sigma \iint \frac{ds}{r^2} \vec{u}_r$$

Symétrie

$\underline{M}$ se trouve sur l'axe OZ qui est un axe de symétrie $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_z}$

On calcul uniquement la composante suivant OZ.



$$dE = K\sigma \frac{ds}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En projetant sur l'axe OZ.

$$dE_z = dE . \cos\alpha = K\sigma \frac{ds}{r^2} \cos\alpha$$

Et

$$E_z = \int dE_z = K\sigma \iint \frac{ds}{r^2} \cos\alpha$$

Paramétrage : (Paramètre $(0 \leq \rho \leq R\ , 0 \leq \theta \leq 2\pi)$)

$$\begin{cases} ds = \rho . d\rho . d\theta \\ r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \cos\alpha = z/r = z/\sqrt{\rho^2 + z^2} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'intégrale, il vient que :

$$E_z = K\sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \rho . d\rho . d\theta = K\sigma . z \left(\int_0^R \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} d\rho \right) . \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right)$$

Donc

$$E_z = 2\pi . K\sigma . z \left[\frac{1}{2} \frac{(\rho^2 + z^2)^{-1/2}}{-1/2} \right]_0^R \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{E} = 2\pi . K\sigma \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{e}_z}$$

Dans le cas d'un plan infini chargé avec une même densité σ uniforme.

$$R \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}_{\text{plan}} = \pm 2\pi . K\sigma \vec{e}_z} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{E}_{\text{plan}} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z}$$

Tel que le signe $(+)$ correspond à $(z > 0)$ et le signe $(-)$ correspond à $(z < 0)$.

EXERCICE 15 :

1. Charge totale du disque

Distribution surfacique $dq = \sigma.ds$ et

$$Q = \int dq = \iint \sigma.ds = \int_a^b \int_0^{2\pi} \rho_0.r.r.dr.d\theta$$

$$Q = \rho_0.\left[\frac{r^3}{3}\right]_a^b.[\theta]_0^{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{2\pi}{3}\rho_0(b^3 - a^3)}$$

2. Calcul du potentiel électrostatique au point O :

Distribution surfacique $dq = \sigma.ds$ et

$$V = \int dV = \int K\frac{\sigma.ds}{r}$$

Paramétrage (Paramètre $(a \leq r \leq b\ , 0 \leq \theta \leq 2\pi)$) : $\begin{cases} ds = r.dr.d\theta \\ r = r \end{cases}$

D'où

$$V = K\int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0.r}{r}.r.dr.d\theta = K\rho_0.\left[\frac{r^2}{2}\right]_a^b.[\theta]_0^{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_O = \pi K\rho_0.(b^2 - a^2)}$$

3. Champ électrostatique au point O :

__Distribution__ : La distribution est surfacique $dq = \sigma.ds$ et $\sigma = \rho_0.r$. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\iint \frac{\sigma ds}{r^2}\vec{u}_r$$

En projetant sur les deux axes

$$\begin{cases} dE_x = -dE.\cos\theta = -K\sigma\dfrac{ds}{r^2}\cos\theta \\ dE_y = -dE.\sin\theta = -K\sigma\dfrac{ds}{r^2}\sin\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad dE = K\sigma\frac{ds}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

Donc

$$E_x = \int dE_x = -K\iint \frac{\sigma ds}{r^2}\sin\theta \quad ; \quad E_y = \int dE_y = -K\iint \frac{\sigma ds}{r^2}\sin\theta$$

__Paramétrage__ : (Paramètre $(a \leq r \leq b\ , 0 \leq \theta \leq 2\pi)$)

$$\begin{cases} s = r.dr.d\theta \\ r = r \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \cos\theta \\ \sin\theta = \sin\theta \end{cases}$$

En remplaçant, il vient que :

$$E_x = -K\int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0.r}{r^2}.\cos\theta.r.dr.d\theta = -K\rho_0.[r]_a^b.[\sin\theta]_0^{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_x = 0}$$

Et

$$E_y = -K\int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0.r}{r^2}.\sin\theta.r.dr.d\theta = -K\rho_0.[r]_a^b.[-\cos\theta]_0^{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_y = 0}$$

Finalement

$$\boxed{\vec{E}_O = \vec{0}}$$

Ce résultat peut être déduit à partir de la symétrie du problème, en effet, par le point O passe une infinité d'axes de symétrie du fait de la symétrie radiale. Le champ en ce point est donc nul, car il ne peut être parallèle à toutes ces directions en même temps.

4. Distribution de la forme : $\sigma = \rho_0 . r . \sin\theta$

Distribution : La distribution est surfacique $dq = \sigma . ds$ et $\sigma = \rho_0 . r . \sin\theta$. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K \iint \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{u}_r$$

Symétrie : O se trouve sur l'axe OY qui est un axe de symétrie $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_y}$

On calcul uniquement la composante suivant OY.

$$dE = K\sigma \frac{ds}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1) \qquad \text{et} \qquad dE_y = -dE . \sin\theta = -K\sigma \frac{ds}{r^2} \sin\theta$$

Donc

$$E_y = \int dE_y = -K \iint \frac{\sigma ds}{r^2} \sin\theta$$

Paramétrage : (Paramètre $(a \leq r \leq b \,, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$)

$$\begin{cases} s = r . dr . d\theta \\ r = r \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \cos\theta \\ \sin\theta = \sin\theta \end{cases}$$

En remplaçant, il vient que :

$$E_y = -K \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0 . r}{r^2} . \sin^2\theta . r . dr . d\theta = -K\rho_0 \int_a^b dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta . d\theta$$

$$E_y = -K\rho_0 \int_a^b dr \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} . d\theta = -K\rho_0 . [r]_a^b . \left[\frac{\theta - (\sin 2\theta)/2}{2}\right]_0^{2\pi}$$

Finalement

$$E_y = -\pi K\rho_0 . (b - a) \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{E}_O = -\pi K\rho_0 . (b - a) . \vec{e}_y}$$

EXERCICE 16 :

5. Calcul du potentiel électrostatique au point O :

Distribution surfacique uniforme $dq = \sigma . ds$ et

$$V = \int dV = \int K \frac{dq}{r}$$

Paramétrage (Paramètre $(R_1 \leq r \leq R_2\,, 0 \leq \theta \leq \pi)$) : $\begin{cases} ds = r.dr.d\theta \\ r = r \end{cases}$

D'où

$$V = K.\sigma \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi} dr.d\theta \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V = \pi K.\sigma(R_2 - R_1) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}(R_2 - R_1)}$$

6. Champ électrostatique au point O :

Distribution : La distribution est surfacique $dq = \sigma . ds$ et uniforme $\sigma =$ Constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\sigma \iint \frac{ds}{r^2} \vec{u}_r$$

Symétrie : O se trouve sur l'axe OY qui est un axe de symétrie $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_y}$

On calcul uniquement la composante suivant OY.

$$dE = K\sigma \frac{ds}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1) \qquad \text{et} \qquad dE_y = dE.\sin\theta = K\sigma \frac{ds}{r^2} \sin\theta$$

Donc

$$E_y = \int dE_y = K\sigma \iint \frac{ds}{r^2} \sin\theta$$

Paramétrage : (Paramètre $(R_1 \leq r \leq R_2\,, 0 \leq \theta \leq \pi)$) $\begin{cases} ds = r.dr.d\theta \\ r = r \\ \sin\theta = \sin\theta \end{cases}$

En remplaçant dans l'intégrale, il vient que :

$$E_y = K.\sigma \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi} \frac{1}{r} dr.\sin\theta\,.d\theta = K\sigma[\ln(r)]_{R_1}^{R_2}.[-\cos\theta]_0^{\pi}$$

Donc

$$E_y = 2K\sigma.\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{E} = -2K\sigma.\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).\vec{e}_y}$$

7. Distribution de la forme :

$$\sigma = \sigma_0 \frac{|y|}{y} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \sigma = +\sigma_0 & \text{pour} \quad y > 0 \\ \sigma = -\sigma_0 & \text{pour} \quad y < 0 \end{cases}$$

Le potentiel pour le demi-disque supérieur $(y > 0)$: $V_> = +\pi K.\sigma_0(R_2 - R_1)$

Le potentiel pour le demi-disque inférieur $(y < 0)$: $V_< = -\pi K.\sigma_0(R_2 - R_1)$

Et le potentiel total

$$\boxed{V = V_> + V_< = 0}$$

8.

Le vecteur champ pour le demi-disque supérieur $(y > 0)$: $\vec{E}_> = -2K\sigma_0.\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).\vec{e}_y$

Le vecteur champ pour le demi-disque inférieur $(y < 0)$: $\vec{E}_> = +2K(-\sigma_0).\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).\vec{e}_y$

Et Le vecteur champ total

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_> + \vec{E}_< = -4K\sigma_0.\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).\vec{e}_y}$$

EXERCICE 17 :

1. Demi-sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et $z > 0$

Potentiel :

$$V = \int dV = K\sigma \iint \frac{ds}{r}$$

Paramétrage : (Paramètre $(0 \le \theta \le \pi/2\ , 0 \le \varphi \le 2\pi)$) avec $ds = R^2 . \sin\theta . d\theta . d\varphi$ et $r = R$
D'où

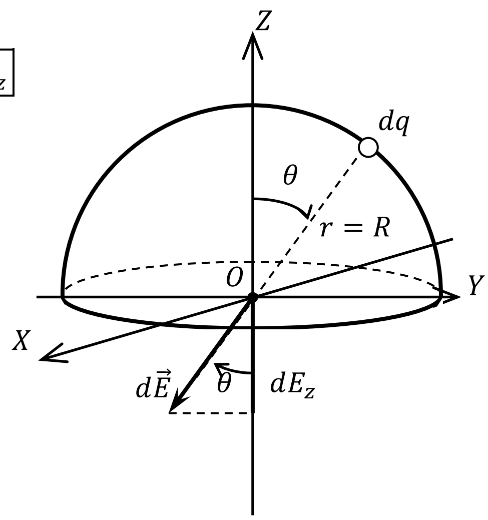
$$V = K\sigma . R\left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta . d\theta\right).\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \quad \Rightarrow \quad V = 2\pi . K\sigma . R[-\cos\theta]_0^{\pi/2}$$

Donc

$$\boxed{V = 2\pi . K\sigma . R = \frac{\sigma . R}{2\varepsilon_0}}$$

Champ :
Distribution : La distribution est surfacique $dq = \sigma . ds$ et uniforme $\sigma =$ Constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\sigma \iint \frac{ds}{r^2}\vec{u}_r$$



Symétrie : O se trouve sur l'axe OZ qui est un axe de symétrie $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_z}$
On calcul uniquement la composante suivant OZ.

$$dE = K\sigma \frac{ds}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En projetant sur l'axe OZ. (θ est l'angle définit par les coordonnées sphériques)

$$dE_z = -dE . \cos\theta = -K\sigma \frac{ds}{r^2}\cos\theta$$

Et

$$E_z = \int dE_z = -K\sigma \iint \frac{ds}{r^2}\cos\theta$$

Paramétrage : (Paramètre $(0 \le \theta \le \pi/2\ , 0 \le \varphi \le 2\pi)$)

$$\begin{cases} ds = R^2 . \sin\theta . d\theta . d\varphi \\ r = R = \text{constante} \\ \cos\theta = \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \quad E_z = -K\sigma \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin\theta . \cos\theta . d\theta . d\varphi = -\frac{1}{2}K\sigma \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin(2\theta) . d\theta . d\varphi$$

Donc

$$E_z = -K\pi . \sigma\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = (-\pi . K\sigma)\vec{e}_z = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{e}_z}$$

2. Sphère de rayon R centrée en O

$$\sigma = \sigma_0 \frac{|z|}{z} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma = \sigma_0 & \text{pour} \quad z > 0 \\ \sigma = -\sigma_0 & \text{pour} \quad z < 0 \end{cases}$$

D'après la question 1.
La demi-sphère $(z > 0)$ donne un champ au point O égal à : $\vec{E}_1 = (-\pi . K\sigma)\vec{e}_z = (-\pi . K\sigma_0)\vec{e}_z$
La demi-sphère $(z < 0)$ donne un champ au point O égal à : $\vec{E}_2 = (+\pi . K\sigma)\vec{e}_z = (-\pi . K\sigma_0)\vec{e}_z$
Et le champ total au point O.

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (-\pi . K\sigma_0)\vec{e}_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z}$$

3. Sphère de rayon R centrée en O et portant une densité surfacique $\sigma = \sigma_0 . \cos\theta$

Potentiel :

$$V = \int dV = K\sigma \iint \frac{ds}{r}$$

Paramétrage : (Paramètre $(0 \leq \theta \leq \pi \,, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$) avec $ds = R^2 . \sin\theta \,. d\theta . d\varphi$ et $r = R$

D'où

$$V = K\sigma_0 . R\left(\int_0^{\pi} \sin\theta \,. \cos\theta \,. d\theta\right).\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \qquad \Rightarrow \qquad V = \pi . K\sigma . R \int_0^{\pi} \sin(2\theta) \,. d\theta$$

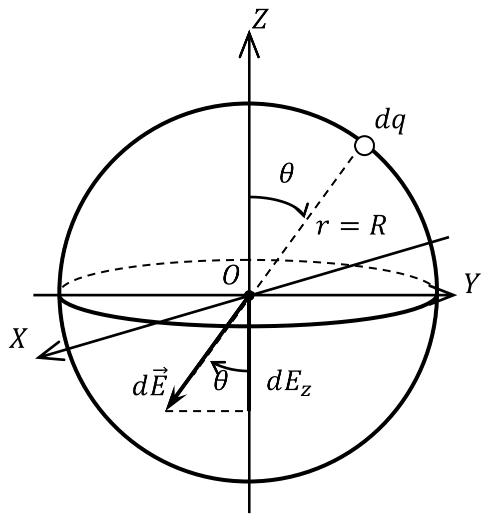
Donc

$$V = \pi . K\sigma . R\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi} \qquad \text{et} \qquad \boxed{V = 0}$$

Champ :

Distribution : La distribution est surfacique $dq = \sigma . ds$ non uniforme $\sigma \neq$ Constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K \iint \frac{\sigma . ds}{r^2} \vec{u}_r$$



Symétrie : Puisque $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, alors O se trouve sur l'axe OZ qui est un axe de symétrie $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_z}$

On calcul uniquement la composante suivant OZ.

$$dE = K\sigma \frac{ds}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En projetant sur l'axe OZ. (θ est l'angle définit par les coordonnées sphériques)

$$dE_z = -dE . \cos\theta = -K\sigma \frac{ds}{r^2} \cos\theta$$

Et

$$E_z = \int dE_z = -K \iint \frac{\sigma . ds}{r^2} \cos\theta$$

Paramétrage : (Paramètre $(0 \leq \theta \leq \pi \,, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$)

$$\begin{cases} ds = R^2 . \sin\theta \,. d\theta . d\varphi \\ r = R = \text{constante} \\ \cos\theta = \cos\theta \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad E_z = -K\sigma_0 \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \,. \cos^2\theta \,. d\theta . d\varphi$$

Donc

$$E_z = K . 2\pi . \sigma_0 \left[\frac{\cos^3(\theta)}{3}\right]_0^{\pi} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{E} = \left(-\frac{4\pi}{3} . K\sigma_0\right)\vec{e}_z = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\vec{e}_z}$$

EXERCICE 18 :

1. Demi-sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et $z > 0$

Potentiel :

$$V = \int dV = K\rho \iiint \frac{d\tau}{r}$$

Paramétrage : (Paramètre $(0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi/2\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$)

Avec $d\tau = r^2.\sin\theta\,.dr.d\theta.d\varphi$. D'où

$$V = K\rho.\left(\int_0^R r.dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\,.d\theta\right).\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \quad \Rightarrow \quad V = \pi K.\rho.R^2[-\cos\theta]_0^{\pi/2}$$

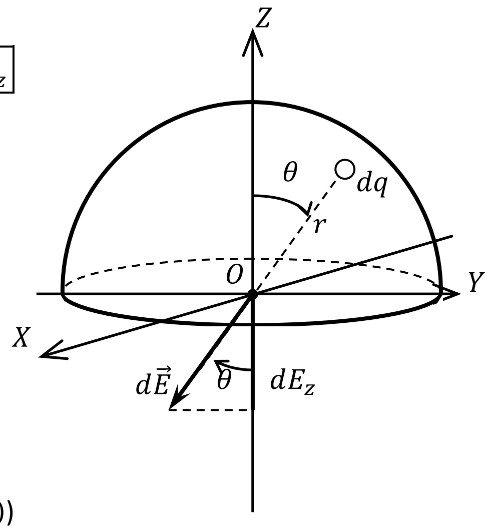
Donc

$$\boxed{V = \pi K.\rho.R^2 = \frac{\rho.R^2}{4\varepsilon_0}}$$

Champ :

Distribution : La distribution est volumique $dq = \rho.d\tau$ et uniforme $\rho =$ Constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K\rho \iiint \frac{d\tau}{r^2}\vec{u}_r$$



Symétrie : O se trouve sur l'axe OZ qui est un axe de symétrie $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_z}$

On calcul uniquement la composante suivant OZ.

$$dE = K\rho\frac{d\tau}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En projetant sur l'axe OZ. (θ est l'angle définit par les coordonnées sphériques)

$$dE_z = -dE.\cos\theta = -K\rho\frac{d\tau}{r^2}\cos\theta$$

Et

$$E_z = \int dE_z = -K\rho \iiint \frac{d\tau}{r^2}\cos\theta$$

Paramétrage : (Paramètre $(0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi/2\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$)

$$\begin{cases} d\tau = r^2.\sin\theta\,.dr.d\theta.d\varphi \\ r = r \\ \cos\theta = \cos\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_z = -K\rho \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin\theta\,.\cos\theta\,.dr.d\theta.d\varphi$$

Donc

$$E_z = -K\rho\left(\int_0^R dr\right).\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{2}d\theta\right).\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)$$

Et

$$E_z = -K\rho.\pi R.\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = (-K\rho.\pi R)\vec{e}_z = -\frac{\rho R}{4\varepsilon_0}\vec{e}_z}$$

2. Sphère de rayon R centrée en O et portant une densité volumique $\rho = \rho_0 . \cos\theta$

Potentiel :

$$V = \int dV = K \iiint \frac{\rho . d\tau}{r}$$

Paramétrage : (Paramètre $(0 \le r \le R\ , 0 \le \theta \le \pi\ ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$)

Avec $d\tau = r^2 . \sin\theta\ . dr . d\theta . d\varphi$. D'où

$$V = K\rho_0 . \left(\int_0^R r . dr\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta\ . \cos\theta\ . d\theta\right) . \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \quad \Rightarrow \quad V = \pi K . \rho_0 . R^2 \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^\pi$$

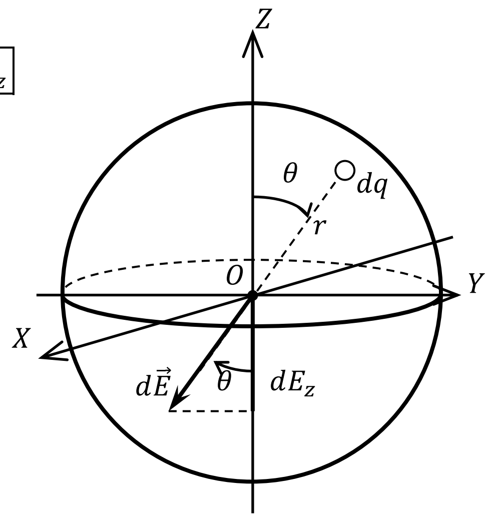
Donc

$$\boxed{V = 0}$$

Champ :

Distribution : La distribution est volumique $dq = \rho . d\tau$ non uniforme $\rho \neq$ Constante. Donc :

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = K \iiint \frac{\rho . d\tau}{r^2} \vec{u}_r$$



Symétrie : O se trouve sur l'axe OZ qui est un axe de symétrie $\boxed{\vec{E} \parallel \vec{e}_z}$

On calcul uniquement la composante suivant OZ.

$$dE = K\rho \frac{d\tau}{r^2} \qquad (|\vec{u}_r| = 1)$$

En projetant sur l'axe OZ. (θ est l'angle définit par les coordonnées sphériques)

$$dE_z = -dE . \cos\theta = -K\rho \frac{d\tau}{r^2} \cos\theta$$

Et

$$E_z = \int dE_z = -K \iiint \frac{\rho . d\tau}{r^2} \cos\theta$$

Paramétrage : (Paramètre $(0 \le r \le R\ , 0 \le \theta \le \pi\ ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$)

$$\begin{cases} d\tau = r^2 . \sin\theta\ . dr . d\theta . d\varphi \\ r = r \\ \cos\theta = \cos\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad E_z = -K\rho_0 \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta\ . \cos^2\theta\ . dr . d\theta . d\varphi$$

Donc

$$E_z = -K\rho_0 \left(\int_0^R dr\right) . \left(\int_0^\pi \sin\theta\ . \cos^2\theta\ . d\theta\right) . \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right)$$

Et

$$E_z = -K\rho_0 . 2\pi R . \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{E} = \left(-\frac{4\pi}{3} K . \rho_0 R\right) \vec{e}_z = -\frac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0} \vec{e}_z}$$