

---

## Chapitre 10: Espaces affines

---

Dans ce chapitre,

- $K$  désigne l'un des corps  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  (ou plus généralement, n'importe quel corps commutatif de caractéristique zéro);
- si  $V$  et  $W$  sont deux  $K$ -espaces vectoriels,  $L(V, W)$  désigne le  $K$ -espace vectoriel des applications linéaires de  $V$  dans  $W$ . Pour simplifier, on note  $L(V)$  plutôt que  $L(V, V)$ .

### 1 Espaces affines

**Définition 1.1.** Soit  $\vec{E}$  un  $K$ -espace vectoriel. Un espace affine (sur  $K$ ) associé à  $\vec{E}$  est un ensemble  $E$  non vide, muni d'une application  $\varphi : E \times E \rightarrow \vec{E}$  vérifiant les deux axiomes suivants :

(A1) pour tous  $A, B, C$  de  $E$ ,  $\varphi(A, C) = \varphi(A, B) + \varphi(B, C)$  (**relation de Chasles**);

(A2) pour tout  $A \in E$ , l'application  $\varphi_A : M \mapsto \varphi(A, M)$  est une **bijection** de  $E$  sur  $\vec{E}$ . Autrement dit,  $\forall A \in E, \forall \vec{x} \in \vec{E}, \exists ! B \in E : \vec{x} = \varphi(A, B)$ .

Afin de retrouver des notations habituelles, on adopte la

**Convention 1.2.** Dorénavant, si  $A, B \in E$ , on notera  $\overrightarrow{AB}$  le vecteur  $\varphi(A, B)$ .

Voici un peu de vocabulaire. Les éléments d'un espace affine  $E$  sont appelés **points** et ceux du corps de base  $K$  des **scalaires**. Par ailleurs, on dit que  $\vec{E}$  est **la direction** de  $E$ , ou encore que  $E$  est dirigé par  $\vec{E}$ , et on appelle **dimension** de  $E$  la dimension de l'espace vectoriel  $\vec{E}$ . En particulier, les espaces affines de dimension 0 (i.e., associés à  $\vec{E} = \{0\}$ ) sont ceux réduits à un point, et par analogie avec le vocabulaire de l'algèbre linéaire, les espaces affines de dimension 1 sont appelés droites, ceux de dimension 2 sont appelés plans.

**N.B.** Dans ce cours, on ne considèrera que des espaces affines de dimension finie.

On attribue souvent un nom particulier à certains ensembles finis de points d'un espace affine. Par exemple :

- 1) deux points  $A, B$  forment un **bipoint**, que l'on note  $(A, B)$  ou  $(B, A)$ ;
- 2) trois points  $A, B, C$  forment un **triangle de sommets**  $A, B, C$ , qui se note  $ABC$  (l'ordre des lettres ne compte pas);
- 3) dans un plan, quatre points  $A, B, C, D$  forment un **quadrilatère de sommets**  $A, B, C, D$ , noté  $ABCD$ . De même on parlera d'un **pentagone** pour un ensemble de cinq points, d'un **hexagone** pour un ensemble de six points, et en général, d'un **polygone**;
- 4) dans un espace affine de dimension 3, quatre points  $A, B, C, D$  forment un **tétraèdre**, noté  $ABCD$ .

Donnons maintenant quelques conséquences immédiates de notre définition.

**Proposition 1.3.** Soit  $E$  un  $K$ -espace affine.

- 1)  $\forall A \in E, \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ ;
- 2)  $\forall A, B \in E, \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ;
- 3)  $\forall A, B, C \in E, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B = C$ ;
- 4)  $\forall A, B \in E, \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$ ;
- 5)  $\forall A, B \in E, \exists! \vec{x} \in \vec{E} : \vec{x} = \overrightarrow{AB}$ ;
- 6) Pour tous  $A, B, C, D \in E$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - (i)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ;
  - (ii)  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ;
  - (iii)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

Si l'une de ces conditions est réalisée, on dit que  $A, B, C, D$  forment (dans cet ordre) le parallélogramme  $ABCD$ .

*Démonstration.* 1) D'après l'axiome (A1), on a :  $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ , d'où  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$  (règle de calcul vectoriel).

2) Toujours avec (A1), on a :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$ , donc  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$  par 1).

3) On a :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \varphi_A(B) = \varphi_A(C) \Leftrightarrow B = C$  car  $\varphi_A$  est bijective (A2), donc injective.

4) En utilisant successivement 1) et 3), on a :  $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} \Leftrightarrow B = A$ .

5) est évident : c'est la traduction du fait que  $\varphi : (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$  est une application.

6) Exercice. ✓

**Proposition 1.4.** Soient  $E, F$  deux  $K$ -espaces affines. Alors le produit cartésien  $E \times F$  est naturellement muni d'une structure de  $K$ -espace affine associé à  $\vec{E} \times \vec{F}$ , et on a  $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$ .

*Démonstration.* Il est facile de constater que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : (E \times F) \times (E \times F) &\longrightarrow \vec{E} \times \vec{F} \\ ((A, A'), (B, B')) &\longmapsto (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \end{aligned}$$

vérifie les deux axiomes définissant un espace affine. ✓

L'exemple le plus naturel d'espace affine est aussi le plus fondamental :

**Proposition 1.5.** Tout espace vectoriel  $V$  (en particulier  $V = K^n$ ) est un espace affine associé à lui-même pour l'application  $\varphi : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{y} - \vec{x}$ . (Symboliquement, on a donc  $\overrightarrow{\vec{x}\vec{y}} = \vec{y} - \vec{x}$ .)

Cette structure d'espace affine sur l'espace vectoriel  $V$  est dite **canonique**.

*Démonstration.* Pour tous  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ , on a  $\vec{z} - \vec{x} = (\vec{y} - \vec{x}) + (\vec{z} - \vec{y})$ , c'est-à-dire (A1). D'autre part, si  $\vec{a}, \vec{x} \in V$  alors  $\vec{b} = \vec{a} + \vec{x}$  est l'unique élément de  $V$  vérifiant  $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$ , d'où (A2). ✓

L'existence d'espaces vectoriels en toute dimension ayant été prouvée dans le cours d'algèbre linéaire, on en déduit au passage :

**Corollaire 1.6.** Il existe des espaces affines en toute dimension.

**Exemple 1.7.** L'ensemble  $\mathbb{C}$  est un espace affine sur lui-même : c'est une droite affine complexe. Mais on voit facilement que c'est aussi un plan affine sur le corps  $K = \mathbb{R}$ .

**Notation 1.8.** On étend aux espaces affines généraux les notations correspondant au cas des espaces vectoriels : on pourra ainsi écrire  $B - A$  au lieu de  $\overrightarrow{AB}$ . Par cohérence, si  $A \in E$  et  $\vec{x} \in \vec{E}$ , l'unique  $B \in E$  vérifiant  $\overrightarrow{AB} = \vec{x}$  (cf. axiome (A2)) sera également noté  $A + \vec{x}$  (dans cet ordre). Ainsi, on aura  $B = A + \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = \overrightarrow{AB}$  et l'écriture  $B - A = (A + \vec{x}) - A = \vec{x}$  sera autorisée.

**Exemples 1.9 (d'utilisation de cette notation).**

- 1) (Exercice) La relation de Chasles (A1) se traduit par  $(A + \vec{x}) + \vec{y} = A + (\vec{x} + \vec{y})$ . On obtient également les règles suivantes, souvent utilisées :  $A + \vec{x} = A + \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$  et  $(B + \vec{y}) - (A + \vec{x}) = \overrightarrow{AB} + \vec{y} - \vec{x}$ .
- 2) Si  $E$  est un espace affine, pour tout point  $A \in E$ , on a  $E = A + \vec{E}$  : cela découle de la propriété 5) de la proposition 1.3.

**Attention!** Le fait de donner un sens à une différence de deux points n'autorise pas à écrire n'importe quelle combinaison de points d'un espace affine (par exemple une somme de deux points n'existe pas), sauf dans deux situations très particulières : l'une lorsqu'on vectorialise l'espace affine (voir ci-dessous), et l'autre lorsqu'on étudiera les barycentres (voir paragraphe 6).

On a montré plus haut que tout espace vectoriel est naturellement un espace affine. Pour étudier le problème inverse, donnons une autre formulation de l'axiome (A2) : si l'on fixe  $A \in E$ , l'application

$$\begin{aligned} \psi_A : \vec{E} &\rightarrow E \\ \vec{x} &\mapsto A + \vec{x} \end{aligned}$$

est une bijection ensembliste (en fait,  $\psi_A$  n'est autre que la réciproque de l'application  $\varphi_A$  de l'axiome (A2)). Cette bijection permet alors de « transporter » sur  $E$  la structure d'espace vectoriel de  $\vec{E}$ . En effet, il est facile de constater que les lois  $+_A$  et  $\cdot_A$  définies par

$$M +_A N = \psi_A(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot_A M = \psi_A(\lambda \overrightarrow{AM})$$

munissent  $E$  d'une structure de  $K$ -espace vectoriel.

**Définition 1.10.** L'espace vectoriel  $(E, +_A, \cdot_A)$  ainsi obtenu s'appelle le **vectorialisé de  $E$  en  $A$**  et se note  $E_A$ . On dit aussi qu'on a fixé une **origine  $A$  dans  $E$** .

**Remarques 1.11.**

- 1) Le point  $A$  est le vecteur nul du vectorialisé  $E_A$  : pour tout  $M \in E_A$ ,  $M +_A A = \psi_A(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AA}) = \psi_A(\overrightarrow{AM}) = M$ . C'est pour cela qu'on qualifie  $A$  d'« origine ».
- 2) La vectorialisation n'est somme toute qu'une définition rigoureuse d'un phénomène intuitif : la feuille de papier (infinie, ...) est un espace affine, mais se comporte comme un espace vectoriel si on fixe un point-origine. Inversement, on peut considérer un espace affine comme un espace vectoriel dans lequel on ne veut plus privilégier l'origine (le vecteur nul).
- 3) Par construction de  $E_A$ , la bijection  $\psi_A : \vec{E} \rightarrow E$  induit un **isomorphisme d'espaces vectoriels** de  $\vec{E}$  sur  $E_A$ .
- 4) Attention, le procédé de vectorialisation d'un espace affine n'est pas canonique : les lois ne sont pas les mêmes dans  $E_A$  et  $E_B$  si  $A \neq B$  ! C'est pour cela qu'on ne peut pas dire qu'un espace affine est un espace vectoriel, alors que la réciproque est toujours vraie en vertu de la proposition 1.5. Autrement dit : la catégorie des espaces affines contient strictement la catégorie des espaces vectoriels.

## 2 Applications affines (première étude)

### 2.1 Généralités

Comme à chaque fois que l'on définit une nouvelle structure mathématique, on s'intéresse aux applications qui vont préserver cette structure. La suite de ce cours justifiera la pertinence de la définition suivante.

**Définition 2.1.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces affines. Une application  $f : E \rightarrow F$  est une **application affine** (ou un **morphisme affine**) s'il existe une application linéaire  $\sigma : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$  vérifiant

$$\forall A \in E, \forall \vec{x} \in \vec{E}, f(A + \vec{x}) = f(A) + \sigma(\vec{x}),$$

ou encore, ce qui revient au même,

$$\forall A, B \in E, \overrightarrow{f(A)f(B)} = \sigma(\overrightarrow{AB}).$$

Vérifions en effet l'équivalence de ces deux formules : soient  $A, B \in E$  ; si la première formule est vraie, on a  $f(B) = f(A + \overrightarrow{AB}) = f(A) + \sigma(\overrightarrow{AB})$ , donc  $\overrightarrow{f(A)f(B)} = f(B) - f(A) = \sigma(\overrightarrow{AB})$ . La réciproque se démontre de la même façon.

Si l'on vectorialise les espaces considérés, on peut interpréter cette définition d'une manière remarquable :

**Proposition 2.2.** Une application  $f : E \rightarrow F$  est affine si et seulement si, pour tout  $A \in E$ ,  $f$  est linéaire de  $E_A$  dans  $F_{f(A)}$ .

Démonstration. Exercice. ✓

**Proposition 2.3.** Pour une application affine  $f : E \rightarrow F$  donnée, il n'existe qu'une seule application linéaire  $\sigma : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$  vérifiant la condition de la définition. On l'appelle **partie linéaire** de  $f$ , et on la note  $\vec{f}$ .

Démonstration. Supposons qu'on ait à la fois

$$\forall A \in E, \forall \vec{x} \in \vec{E}, f(A + \vec{x}) = \begin{cases} f(A) + \sigma_1(\vec{x}) \\ f(A) + \sigma_2(\vec{x}) \end{cases}$$

Fixons alors  $A \in E$ . On a :  $\forall \vec{x} \in \vec{E}, \sigma_1(\vec{x}) = f(A + \vec{x}) - f(A) = \sigma_2(\vec{x})$ , d'où  $\sigma_1 = \sigma_2$ . ✓

### Exemples 2.4.

1) L'identité  $\text{id}_E : M \mapsto M$  est affine, de partie linéaire  $\vec{\text{id}}_E = \text{id}_{\vec{E}}$ .

2) Une application constante  $f : E \rightarrow F, M \mapsto A$  est affine, de partie linéaire  $\vec{f} \equiv \vec{0}$ . Réciproquement, si  $f$  est affine, alors  $f$  est constante si et seulement si  $\vec{f} \equiv \vec{0}$ .

Les applications affines possèdent les mêmes propriétés ensemblistes que leurs parties linéaires :

**Proposition 2.5.** Soit  $f$  une application affine. Alors  $f$  est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si  $\vec{f}$  l'est.

Démonstration. Exercice. ✓

De cette proposition et de l'analogie vectoriel on déduit immédiatement :

**Corollaire 2.6.** Soit  $f$  une application affine entre espaces de même dimension. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est injective;
- (ii)  $f$  est surjective;
- (iii)  $f$  est bijective.

Un peu de vocabulaire et de notation, calqués sur le cas vectoriel.

**Définitions 2.7.**

- 1) Une application affine de  $E$  dans  $E$  s'appelle un **endomorphisme affine** de  $E$ .
- 2) Une application affine bijective s'appelle un **isomorphisme affine** (ou encore, une **transformation affine**).
- 3) Deux espaces affines  $E, F$  sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme affine de  $E$  sur  $F$  (ils sont alors de même dimension).
- 4) Un endomorphisme affine bijectif s'appelle un **automorphisme affine**.

**Notations 2.8.** On définit :

- 1)  $A(E, F)$  l'ensemble des morphismes affines de  $E$  dans  $F$ ;
- 2)  $A(E) = A(E, E)$  l'ensemble des endomorphismes affines de  $E$ ;
- 3)  $GA(E)$  l'ensemble des automorphismes affines de  $E$ ;
- 4) pour  $f \in A(E)$ ,

$$\text{Inv}(f) = \{M \in E : f(M) = M\} = \text{ensemble des points fixes de } f.$$

Énonçons maintenant un résultat simple, indispensable pour la compréhension et la pratique.

**Proposition 2.9.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces affines,  $\sigma : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$  une application linéaire et  $(A, B) \in E \times F$ . Alors  $f : M \mapsto B + \sigma(\overrightarrow{AM})$  est l'**unique** application affine de  $E$  dans  $F$  telle que  $f(A) = B$  et  $\vec{f} = \sigma$ .

Autrement dit, une application affine est entièrement déterminée par la donnée de sa partie linéaire et de l'image d'un point (quelconque).

*Démonstration.* Il est clair que l'application  $f$  ainsi définie vérifie  $f(A) = B$ . D'autre part, pour tous  $M, N \in E$ , on a

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = f(N) - f(M) = (B + \sigma(\overrightarrow{AN})) - (B + \sigma(\overrightarrow{AM})) = \sigma(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MA}) = \sigma(\overrightarrow{MN}),$$

ce qui démontre que  $f$  est affine de partie linéaire  $\sigma$ .

Supposons maintenant qu'il existe une autre application affine  $g$  possédant les mêmes propriétés. Pour tout  $M \in E$ ,

$$g(M) = g(A + \overrightarrow{AM}) = g(A) + \vec{g}(\overrightarrow{AM}) = B + \sigma(\overrightarrow{AM}) = f(M),$$

si bien que  $g = f$ . ✓

**Corollaire 2.10.** Pour prouver l'égalité de deux applications affines, il suffit d'établir l'égalité de leurs parties linéaires et leur coïncidence en (au moins) un point.

D'autres propriétés générales des applications affines seront établies dans la suite de ce cours (et notamment dans le chapitre suivant). Passons maintenant à deux exemples concrets, parmi les plus connus.

## 2.2 Premiers exemples : homothéties et translations

Soit  $E$  un espace affine sur  $K$ .

**Définition 2.11.** Si  $A \in E$  et  $\lambda \in K^*$ , l'application  $h_{A,\lambda} : E \rightarrow E, M \mapsto A + \lambda \overrightarrow{AM}$  s'appelle l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $\lambda$ .

**Exemples 2.12.** Une homothétie  $h_{A,1}$  de rapport 1 est l'identité (pour tout  $A$ ), une homothétie  $h_{A,-1}$  de rapport  $-1$  s'appelle une symétrie centrale (de centre  $A$ ) et se note  $s_A$ .

**Proposition 2.13.** Soit  $h = h_{A,\lambda}$  une homothétie de  $E$  (rappel :  $\lambda \in K^*$ ).

- 1)  $h$  est un automorphisme affine, de partie linéaire l'homothétie vectorielle  $\vec{h} = \lambda \text{id}_E$  (quel que soit  $A$ ).
- 2) Si  $\lambda \neq 1$ ,  $\text{Inv}(h) = \{A\}$ ; sinon  $h = \text{id}$  donc  $\text{Inv}(h) = E$ .

*Démonstration.* 1) Pour tous  $M, N \in E$ ,

$$\overrightarrow{h(M)h(N)} = h(N) - h(M) = (A + \lambda \overrightarrow{AN}) - (A + \lambda \overrightarrow{AM}) = \lambda \overrightarrow{MN},$$

de sorte que  $h$  est affine, avec  $\vec{h} = \lambda \text{id}$ . Comme  $\vec{h}$  est bijective,  $h$  l'est aussi.

- 2) Supposons  $\lambda \neq 1$ . Pour tout  $M \in E$ ,

$$\begin{aligned} h(M) = M &\Leftrightarrow A + \lambda \overrightarrow{AM} = M \\ &\Leftrightarrow \lambda \overrightarrow{AM} = M - A = \overrightarrow{AM} \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 1) \overrightarrow{AM} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow M = A. \end{aligned}$$

Donc  $\text{Inv}(h) = \{A\}$ . ✓

Passons à un second exemple.

**Définition 2.14.** Si  $\vec{x} \in \vec{E}$ , l'application  $t_{\vec{x}} : E \rightarrow E, M \mapsto M + \vec{x}$  s'appelle la translation de vecteur  $\vec{x}$ .

Remarquons qu'on pourra parler du vecteur d'une translation donnée, puisqu'il est clair que  $t_{\vec{x}} = t_{\vec{y}} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$ .

**Proposition 2.15.** Soit  $t = t_{\vec{x}}$  une translation de  $E$ .

- 1)  $t$  est un automorphisme affine, de partie linéaire  $\vec{t} = \text{id}_E$  (quel que soit  $\vec{x}$ ).
- 2) Si  $\vec{x} \neq \vec{0}$ ,  $\text{Inv}(t) = \emptyset$ ; sinon  $t = \text{id}$  donc  $\text{Inv}(t) = E$ .

*Démonstration.* 1) Pour tous  $M, N \in E$ ,  $\overrightarrow{t(M)t(N)} = (N + \vec{x}) - (M + \vec{x}) = N - M = \overrightarrow{MN}$ , d'où le résultat.

- 2) Supposons  $\vec{x} \neq \vec{0}$ . Alors  $t(M) = M \Leftrightarrow M + \vec{x} = M \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ , donc  $\text{Inv}(t) = \emptyset$ . ✓

Les translations vont nous fournir un autre exemple naturel et fondamental d'application affine :

**Proposition 2.16.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels munis de leur structure affine canonique. Les applications affines de  $E$  dans  $F$  sont exactement les composées de la forme  $t_{\vec{u}} \circ \sigma$ , où  $\vec{u} \in F$  et  $\sigma \in L(E, F)$ .

Plus précisément, si l'on note  $O = \vec{0}_E$  et  $O' = \vec{0}_F$  (vus comme points), et si  $f \in A(E, F)$ , alors  $f = t_{\vec{u}} \circ \sigma$  avec  $\vec{u} = \overrightarrow{O'f(O)}$  et  $\sigma = f$  (donc  $\vec{u}$  et  $\sigma$  sont uniques).

En particulier, les applications linéaires de  $E$  dans  $F$  sont exactement les applications affines  $f$  vérifiant  $f(O) = O'$ , i.e. qui « conservent l'origine ».

Démonstration. Exercice. ✓

Autrement dit : une application affine entre espaces vectoriels est la somme d'une application linéaire et d'une constante, phénomène déjà rencontré au Lycée avec l'exemple suivant pour  $K = \mathbb{R}$ .

**Corollaire 2.17.** Les endomorphismes affines de  $K$  (vu comme droite affine sur lui-même) sont exactement les applications de la forme  $x \mapsto ax + b$ , avec  $a, b \in K$ . Parmi celles-ci, les automorphismes de  $K$  sont caractérisés par la condition  $a \in K^*$ .

Ce résultat dit en particulier que tout endomorphisme affine de la droite complexe  $\mathbb{C}$  est de la forme  $z \mapsto az + b$ . Mais **attention** : si l'on voit  $\mathbb{C}$  comme plan affine sur  $K = \mathbb{R}$ , ses endomorphismes affines sont de la forme  $z \mapsto az + b\bar{z} + c$  ! (Exercice.)

### 3 Repères cartésiens et coordonnées cartésiennes

Il existe plusieurs systèmes de repérage dans un espace affine. Nous allons étudier dans ce paragraphe le plus élémentaire d'entre eux.

#### 3.1 Repérage des points

Soit  $E$  un  $K$ -espace affine.

**Définitions 3.1.** On appelle repère cartésien de l'espace affine  $E$  tout couple  $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ , où  $O$  est un point de  $E$ , et  $\mathcal{B}$  est une base de  $\vec{E}$ . On dit alors que  $O$  est l'**origine** du repère  $\mathcal{R}$  et que  $\mathcal{B}$  est la base associée au repère  $\mathcal{R}$ .

On appelle **coordonnées cartésiennes** d'un point  $M$  dans le repère  $\mathcal{R}$  les composantes du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

En dimension  $n$ , tout point possède donc  $n$  coordonnées cartésiennes. Si  $n = 1$ , l'unique coordonnée cartésienne s'appelle l'**abscisse**. Si  $n = 2$ , la seconde coordonnée s'appelle l'**ordonnée**. Si  $n = 3$ , la troisième coordonnée s'appelle généralement la **hauteur**.

**Proposition 3.2.** Soit  $E$  un espace affine de dimension  $n$ , et soit  $\mathcal{R}$  un repère cartésien de  $E$ . L'application  $\varphi_{\mathcal{R}} : E \rightarrow K^n$  qui à  $M$  associe le  $n$ -uplet formé par ses coordonnées cartésiennes dans  $\mathcal{R}$  est un isomorphisme affine ( $K^n$  est ici muni de sa structure affine canonique).

**Démonstration.** On voit très facilement que la partie linéaire  $\vec{\varphi}_{\mathcal{R}} : \vec{E} \rightarrow K^n$  de  $\varphi_{\mathcal{R}}$  n'est autre que l'isomorphisme linéaire qui envoie tout vecteur de  $\vec{E}$  sur le  $n$ -uplet formé par ses composantes dans la base  $\mathcal{B}$  associée à  $\mathcal{R}$ . ✓

Ce résultat élémentaire nous dit à la fois qu'on peut effectivement utiliser des coordonnées cartésiennes pour repérer les points (c'est l'aspect bijectif) et que l'espace affine  $K^n$  est en quelque sorte un modèle « canonique » d'espace affine de dimension  $n$  (c'est l'aspect isomorphisme), tout comme il est un modèle universel d'espace vectoriel de dimension  $n$ .

**Définitions 3.3.** L'application  $\varphi_{\mathcal{R}}$  définie ci-dessus est appelée carte affine de  $E$  associée à  $\mathcal{R}$ , et son inverse  $\varphi_{\mathcal{R}}^{-1}$  est appelée représentation paramétrique (ou paramétrage) de  $E$  associée à  $\mathcal{R}$ . Concrètement, si  $\mathcal{R} = (O; (\vec{e}_i)_{i=1}^n)$ , alors  $\varphi_{\mathcal{R}}^{-1} : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto O + \sum \lambda_i \vec{e}_i$ .

**Remarque 3.4.** L'application  $\varphi_{\mathcal{R}}^{-1}$  est aussi affine. On peut le prouver directement, mais on verra plus loin que l'inverse d'un isomorphisme affine est automatiquement affine.

Voici une formule de changement de coordonnées cartésiennes.

**Proposition 3.5.** Soient  $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$  et  $\mathcal{R}' = (O'; \mathcal{B}')$  deux repères cartésiens de  $E$ , et soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ , i.e.  $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ .

Si  $M \in E$ , notons  $X_M$  (resp.  $X'_M$ ) la matrice colonne des coordonnées de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  (resp.  $\mathcal{R}'$ ).

Alors, pour tout  $M \in E$ ,  $X_M = P X'_M + X_{O'}$ .

**Démonstration.** Observons que  $X_M - X_{O'}$  représente la matrice colonne des composantes du vecteur  $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O'M}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Comme  $X'_M$  n'est autre que la matrice colonne des composantes de  $\overrightarrow{O'M}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , la formule résulte donc du cours d'algèbre linéaire. ✓

Dans le cadre vectoriel, on sait qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Il y a un analogue dans le cadre affine.

**Proposition 3.6.** Soient  $E, F$  deux  $K$ -espaces affines,  $E$  étant supposé de dimension  $n$ . Soit  $(O; (\vec{e}_i)_{i=1}^n)$  un repère cartésien de  $E$ , soient  $P \in F$  et  $(\vec{f}_i)_{i=1}^n$  une famille quelconque de vecteurs de  $\vec{F}$ . Il existe une unique  $f \in A(E, F)$  telle que  $f(O) = P$  et  $f(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$  pour tout  $i$ . En outre,

- 1)  $f$  est injective si et seulement si  $(\vec{f}_i)$  est libre dans  $\vec{F}$ ;
- 2)  $f$  est surjective si et seulement si  $(\vec{f}_i)$  est génératrice dans  $\vec{F}$ ;
- 3)  $f$  est bijective si et seulement si  $(P; (\vec{f}_i))$  est un repère cartésien de  $F$ .

**Démonstration.** Comme  $(\vec{e}_i)$  est une base de  $\vec{E}$ , le cours d'algèbre linéaire assure l'existence d'une unique  $\sigma \in L(\vec{E}, \vec{F})$  vérifiant  $\sigma(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$  pour tout  $i$ . En utilisant la proposition 2.9, on trouve alors qu'il existe une unique  $f \in A(E, F)$  telle que  $\vec{f} = \sigma$  et  $f(O) = P$ .

Pour le reste, rappelons encore un résultat d'algèbre linéaire :

- 1)  $\sigma$  est injective si et seulement si  $(\vec{f}_i)$  est libre dans  $\vec{F}$ ;
- 2)  $\sigma$  est surjective si et seulement si  $(\vec{f}_i)$  est génératrice dans  $\vec{F}$ ;
- 3)  $\sigma$  est bijective si et seulement si  $(\vec{f}_i)$  est une base de  $\vec{F}$ .

On conclut donc grâce à la proposition 2.5. ✓

### 3.2 Représentation matricielle d'une application affine

Rappelons que si l'on dispose de deux espaces vectoriels munis de bases, la donnée d'une application linéaire entre ces espaces est équivalente à la donnée d'une matrice. Donnons l'analogue de ce phénomène dans le cadre affine.

**Théorème 3.7.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces affines de dimensions respectives  $m$  et  $n$ . Soient  $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$  et  $\mathcal{S} = (P; \mathcal{C})$  deux repères cartésiens, respectivement de  $E$  et  $F$ .

Si  $M \in E$ , on note  $X_M \in M(m, 1; K)$  la matrice colonne des coordonnées de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .

Si  $N \in F$ , on note  $Y_N \in M(n, 1; K)$  la matrice colonne des coordonnées de  $N$  dans  $\mathcal{S}$ .

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

- 1) Supposons  $f$  affine, et notons  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\vec{f}) \in M(n, m; K)$ . Alors

$$\forall M \in E, Y_{f(M)} = AX_M + Y_{f(O)}.$$



Cette écriture s'appelle la représentation matricielle (on dit aussi **expression analytique**) de  $f$  dans les repères  $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ . Concrètement, elle se traduit par une expression du type :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m + b_1 \\ y_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m + b_2 \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m + b_n \end{cases}$$

2) Réciproquement, supposons qu'il existe des matrices  $A \in M(n, m; K)$  et  $B \in M(n, 1; K)$  telles que  $Y_{f(M)} = AX_M + B$  pour tout  $M \in E$ , alors  $f$  est affine, et l'écriture précédente n'est autre que sa représentation matricielle dans les repères  $\mathcal{R}, \mathcal{S}$  (en particulier,  $A$  et  $B$  sont uniques).

**CV** **Démonstration.** 1) est clair, puisque  $X_M$  est formé des composantes de  $\overrightarrow{OM}$  dans  $\mathcal{B}$ ,  $Y_{f(M)} - Y_{f(O)}$  est formé des composantes de  $\overrightarrow{Pf(M)} - \overrightarrow{Pf(O)} = \overrightarrow{f(O)f(M)}$  dans  $\mathcal{C}$ , et puisqu'on a  $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{f(\overrightarrow{OM})}$ .

2) Comme nous l'avons rappelé, la donnée de  $A, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  détermine une unique  $\sigma \in L(\vec{E}, \vec{F})$  telle que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\sigma)$ . On a par ailleurs, pour tous  $M, N \in E$  :

$$\underbrace{Y_{f(N)} - Y_{f(M)}}_{\substack{\text{composantes de} \\ \overrightarrow{f(M)f(N)} \text{ dans } \mathcal{C}}} = AX_N + B - (AX_M + B) = A \underbrace{(X_N - X_M)}_{\substack{\text{composantes de} \\ \overrightarrow{MN} \text{ dans } \mathcal{B}}},$$

d'où  $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \sigma(\overrightarrow{MN})$  pour tous  $M, N \in E$ . Par suite,  $f$  est affine de partie linéaire  $\sigma$ , et comme  $Y_{f(O)} = AX_O + B = B$ , l'écriture  $Y_{f(M)} = AX_M + B$  est bien la représentation matricielle de  $f$ . ✓

#### 4 Sous-espaces affines

Dans tout ce paragraphe,  $E$  désigne un  $K$ -espace affine de direction  $\vec{E}$ .

##### 4.1 Généralités

**Définition 4.1.** Un sous-espace affine (en abrégé, un **sea**) de  $E$  est une partie de la forme

$$F = A + V := \{A + \vec{x}, \vec{x} \in V\},$$

où  $A$  est un point de  $E$  et  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$ .

Voyons les premières propriétés des sous-espaces affines.

**Proposition 4.2.** Soit  $F = A + V$  un sous-espace affine de  $E$ . Alors :

- 1)  $F \subset E$  et  $F \neq \emptyset$ ;
- 2) Pour tout  $B \in E$ , les conditions suivantes sont équivalentes :
  - (i)  $B \in F$ ;
  - (ii)  $\overrightarrow{AB} \in V$ ;
  - (iii)  $F = B + V$ ;
- 3)  $V = \{\overrightarrow{AM}, M \in F\}$ ;
- 4)  $V = \{\overrightarrow{MN}, M, N \in F\}$ .

*Démonstration.* 1) est évident.

2) On a :

$$B \in F \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in V : B = A + \vec{x} \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in V : B - A = \vec{x} \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in V : \overrightarrow{AB} = \vec{x} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in V,$$

si bien que (i)  $\Leftrightarrow$  (ii).

Montrons maintenant (ii)  $\Rightarrow$  (iii) : soit  $M \in F$ , i.e.  $M = A + \vec{x}$  avec  $\vec{x} \in V$ . Alors  $M = (B + \overrightarrow{BA}) + \vec{x} = B + (\overrightarrow{BA} + \vec{x})$  appartient à  $B + V$ . Ainsi  $F \subset B + V$  et l'inclusion réciproque s'obtient de la même façon.

Enfin, l'implication (iii)  $\Rightarrow$  (i) est triviale.

3) Il suffit d'écrire : pour tout  $\vec{x} \in \vec{E}$ ,

$$\vec{x} \in V \Leftrightarrow A + \vec{x} \in A + V = F \Leftrightarrow \exists M \in F : A + \vec{x} = M \Leftrightarrow \exists M \in F : \vec{x} = \overrightarrow{AM}.$$

4) Soit  $\vec{x} \in V$ . Alors  $\vec{x} = \overrightarrow{AM}$  avec  $A, M \in F$  d'après 3). Réciproquement, soient  $M, N \in F$ . Alors  $\overrightarrow{AM} \in V$  et  $\overrightarrow{AN} \in V$  d'après 3). Comme  $V$  est un sous-espace vectoriel, on obtient que  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$  est aussi dans  $V$ .  $\checkmark$

**Corollaire 4.3.** Soit  $F = A + V$  un sous-espace affine de  $E$ .

- 1) Le sous-espace vectoriel  $V$  est indépendant de  $A$  (i.e., si  $F = B + W$ , alors  $W = V$ ).
- 2)  $F$  est naturellement muni d'une structure d'espace affine, pour laquelle sa direction  $\vec{F}$  n'est autre que  $V$ .
- 3)  $F$  est l'unique sous-espace affine de  $E$  passant par  $A$  et dirigé par  $\vec{F}$ .

*Démonstration.* 1) résulte du 4) de la proposition précédente.

2) Considérons l'application  $F \times F \rightarrow V$ ,  $(M, N) \mapsto \overrightarrow{MN}$  (elle est bien définie en vertu du 4) de la proposition précédente). L'axiome (A1) est vérifié par cette application puisque  $F \subset E$  et  $V \subset \vec{E}$ . D'autre part, soient  $A \in F$  et  $\vec{x} \in V$ . D'après le 3) de la proposition précédente, il existe  $B \in F$  tel que  $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ . D'après l'axiome (A2) dans  $E$ , ce  $B$  est unique, donc (A2) est bien vérifié dans  $F$  également.

3) Soit  $G$  un sous-espace de direction  $\vec{F}$  : il existe  $B \in E$  tel que  $G = B + \vec{F}$ . Mais si l'on impose la condition  $A \in G$ , le 2) de la proposition précédente implique  $G = A + \vec{F} = F$ .  $\checkmark$

**Remarque 4.4.** Puisqu'un sous-espace affine  $F$  de  $E$  est un espace affine, il peut être muni d'un repère cartésien. Il est même alors entièrement déterminé par la donnée d'un tel repère  $(A; \mathcal{C})$ , puisqu'on a  $F = A + \text{Vect}(\mathcal{C})$ .

D'autre part, tout repère cartésien d'un sous-espace  $F$  peut se compléter en un repère cartésien de  $E$  (cela résulte du théorème de la base incomplète).

**Définitions 4.5.** On appelle **dimension** de  $F$  (resp. **codimension** de  $F$ ) la dimension de  $\vec{F}$  (resp. la codimension de  $\vec{F}$ ) dans  $\vec{E}$ . Comme dans le cas vectoriel, si  $\dim F = 1$ , on dit que  $F$  est une droite de  $E$ , si  $\dim F = 2$ , on dit que  $F$  est un plan de  $E$ , et si  $\text{codim } F = 1$ , on dit que  $F$  est un hyperplan de  $E$ .

**Remarque 4.6.** Un espace affine de dimension  $n$  possède des sous-espaces affines de dimension  $d$ , pour tout  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$  (puisque ceci est vrai dans le cadre vectoriel). Par exemple, les sous-espaces affines d'un espace affine de dimension 3 sont les points, les droites, les plans et l'espace tout entier.

Voici quelques caractérisations des sous-espaces, souvent utiles dans la pratique.

**Proposition 4.7.** Pour une partie  $F \subset E$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $F$  est un sous-espace affine de  $E$ ;
- (ii)  $F$  est non vide et, pour tout  $A \in F$ , l'ensemble  $V = \{\overrightarrow{AM}, M \in F\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$ ;
- (ii)'  $F$  est non vide, et pour tout  $A \in F$ ,  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E_A$ ;
- (iii) il existe  $A \in F$  tel que l'ensemble  $V = \{\overrightarrow{AM}, M \in F\}$  soit un sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$ .
- (iii)' il existe  $A \in F$  tel que  $F$  soit un sous-espace vectoriel de  $E_A$ .

**Démonstration.** (i)  $\Rightarrow$  (ii) a déjà été vu.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) est trivial.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) : On a

$$A + V = A + \{\overrightarrow{AM}, M \in F\} = \{A + \overrightarrow{AM}, M \in F\} = \{M \in F\} = F.$$

Mais  $V$  est par hypothèse un sous-espace vectoriel, donc  $F = A + V$  est un sous-espace affine.

On a pour l'instant démontré l'équivalence entre (i), (ii) et (iii). Pour finir, supposons  $F \neq \emptyset$ , fixons  $A \in F$  et désignons comme précédemment par  $\psi_A$  la bijection définissant le vectorialisé  $E_A$  de  $E$  en  $A$  :  $\psi_A : \vec{E} \rightarrow E, \vec{x} \mapsto A + \vec{x}$ . Comme  $\psi_A$  induit un isomorphisme linéaire entre  $\vec{E}$  et  $E_A$ , le fait que  $V$  soit un sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$  se traduit par le fait que  $\psi_A(V)$  soit un sous-espace vectoriel de  $E_A$ . Or  $\psi_A(V) = A + V = F$  (cf. ci-dessus). Ceci prouve simultanément les équivalences (ii)  $\Leftrightarrow$  (ii)' et (iii)  $\Leftrightarrow$  (iii)'.  $\checkmark$

Voici maintenant un exemple fondamental :

**Proposition 4.8.** Soit  $E$  un espace vectoriel muni de sa structure affine canonique. Les sous-espaces affines de  $E$  sont exactement les translatés des sous-espaces vectoriels de  $E$  (i.e., sont de la forme  $t_{\vec{x}}(V)$  avec  $V$  sous-espace de  $\vec{E}$  et  $\vec{x} \in \vec{E}$ ). En particulier, les sous-espaces vectoriels de  $E$  sont précisément les sous-espaces affines de  $E$  passant par « l'origine »  $\vec{0}$ , ou encore, les sous-espaces affines de  $E$  coïncidant avec leur direction.  $\checkmark$

**Démonstration.** Exercice.  $\checkmark$

Continuons quelques résultats simples, mais très utiles.

**Proposition 4.9.**

- 1) Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces de  $E$ .
  - a) Si  $F \subset G$ , alors  $\vec{F} \subset \vec{G}$  et  $\dim F \leq \dim G$ .
  - b) Si  $F \subset G$  et  $\dim F = \dim G$ , alors  $F = G$ .
  - c) Si  $\vec{F} \subset \vec{G}$  et  $F \cap G \neq \emptyset$ , alors  $F \subset G$ .
- 2) Soit  $F$  un sous-espace de dimension  $p$  de  $E$ . Si  $p \leq d \leq \dim E$ , alors il existe (au moins) un sous-espace  $G$  de dimension  $d$  de  $E$  qui contient  $F$ .

**Démonstration.** Exercice.  $\checkmark$

**Exemples 4.10.** Supposons  $\dim E \geq 2$ .

- 1) Par tout point de  $E$  il passe au moins une droite, un plan, un hyperplan.
- 2) Toute droite de  $E$  est contenue dans au moins un plan, un hyperplan.

Pour finir ce paragraphe, encore du vocabulaire courant.

**Définitions 4.11.**

1) On appelle **vecteur directeur** d'une droite  $D$  d'un espace affine, toute base de sa direction  $\vec{D}$ , i.e. tout vecteur non nul pris dans  $\vec{D}$ . Il y en a donc une infinité (ne jamais écrire « le » vecteur directeur!).

2) Des points d'un espace affine de dimension  $\geq 1$  sont dits **alignés** s'ils appartiennent à une même droite. En dimension 2, un polygone (triangle, parallélogramme, quadrilatère général, etc.) est dit **aplati** si ses sommets sont alignés.

3) Des points d'un espace affine de dimension  $\geq 2$  sont dits **coplanaires** s'ils appartiennent à un même plan. En dimension 3, un tétraèdre est dit **aplati** si ses sommets sont coplanaires.

**Remarque 4.12.** Soit  $D = A + \vec{D}$  une droite de  $E$ . On a :  $\forall M \in E, M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \vec{D}$ . Par suite, trois points  $A, B, C$  de  $E$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  appartiennent à une même droite vectorielle de  $\vec{E}$ , ou encore, si et seulement si la famille  $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$  est liée dans  $\vec{E}$ . On généralisera ce résultat au paragraphe 5.

Une intersection de sous-espaces vectoriels est toujours, comme on le sait, un sous-espace vectoriel. Ce n'est plus nécessairement vrai dans le cadre affine :

**Proposition 4.13.** Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille (finie ou non) de sous-espaces affines de  $E$ . Alors  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est soit vide, soit un sous-espace affine de  $E$ , auquel cas  $\overline{\bigcap_{i \in I} F_i} = \bigcap_{i \in I} \vec{F}_i$ .

*Démonstration.* Supposons  $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ . Il existe donc  $A \in E$  tel que  $A \in F_i$  pour tout  $i$  et on peut écrire :  $\forall i \in I, F_i = A + \vec{F}_i$ . Mais alors, pour tout  $M \in E$ ,

$$\begin{aligned} M \in \bigcap_{i \in I} F_i &\Leftrightarrow \forall i \in I, M \in F_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, \overrightarrow{AM} \in \vec{F}_i \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \bigcap_{i \in I} \vec{F}_i \\ &\Leftrightarrow M \in A + \bigcap_{i \in I} \vec{F}_i. \end{aligned}$$

Ainsi  $\bigcap_{i \in I} F_i = A + \bigcap_{i \in I} \vec{F}_i$ , ce qui prouve que  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un sous-espace affine de  $E$ , de direction  $\bigcap_{i \in I} \vec{F}_i$ . ✓

**Remarque 4.14.** On a clairement  $\dim(\bigcap_{i \in I} F_i) \leq \min_{i \in I}(\dim F_i)$ .

## 4.2 Sous-espace engendré par une partie

**Proposition 4.15.** Si  $X$  est une partie non vide de  $E$ , alors l'intersection des sous-espaces de  $E$  contenant  $X$  est un sous-espace affine de  $E$ , et c'est le plus petit sous-espace de  $E$  contenant  $X$ . On l'appelle sous-espace affine de  $E$  engendré par  $X$  et on le note  $\text{Aff } X$ .

*Démonstration.* Soit  $(F_i)_{i \in I}$  la famille des sous-espaces affines de  $E$  contenant  $X$ . Elle est non vide puisqu'elle contient  $E$ . Posons donc  $F = \bigcap_i F_i$ . Comme  $F$  contient  $X$  et  $X \neq \emptyset$ , on voit que  $F \neq \emptyset$ , donc  $F$  est un sous-espace par la proposition 4.13. Enfin, si  $G$  est un sous-espace de  $E$  contenant  $X$ , il existe  $i_0 \in I$  tel que  $G = F_{i_0}$ , de sorte que  $F \subset G$ . ✓

Observons qu'on ne peut définir de la même façon  $\text{Aff } \emptyset$  car il n'y aurait pas unicité d'un tel sous-espace : tout singleton de  $E$  conviendrait.

Voyons maintenant deux propriétés :

**Proposition 4.16.**

- 1)  $X$  est un sous-espace affine de  $E$  si et seulement si  $\text{Aff } X = X$ .
- 2)  $X \subset Y \Rightarrow \text{Aff } X \subset \text{Aff } Y$ .

*Démonstration.* 1) est évidente.

2)  $\text{Aff } Y$  est un sous-espace de  $E$  contenant  $Y$ , donc contenant aussi  $X$ . Comme  $\text{Aff } X$  est le plus petit sous-espace de  $E$  contenant  $X$ , on a donc  $\text{Aff } X \subset \text{Aff } Y$ . ✓

Le résultat suivant est d'une grande importance.

**Théorème 4.17.** Soit  $X$  une partie non vide de  $E$ .

- 1) Pour tout  $A \in X$ ,  $\overline{\text{Aff } X} = \text{Vect}\{\overline{AM}, M \in X\}$ .
- 2)  $\overline{\text{Aff } X} = \text{Vect}\{\overline{MN}, M, N \in X\}$ .

*Démonstration.* 1) Fixons  $A \in X$  et soit  $M \in X$ . Comme  $A, M \in X \subset \text{Aff } X$ , on a  $\overline{AM} \in \overline{\text{Aff } X}$ . Par conséquent,  $\text{Vect}\{\overline{AM}, M \in X\} \subset \text{Vect}(\overline{\text{Aff } X}) = \overline{\text{Aff } X}$ . D'autre part,  $A + \text{Vect}\{\overline{AM}, M \in X\}$  est un sous-espace de  $E$  qui contient  $X$  (si  $M \in X$ , alors  $M = A + \overline{AM}$ ), donc il contient  $\text{Aff } X$  d'après les résultats de la proposition 4.16. En passant aux directions, on obtient  $\text{Vect}\{\overline{AM}, M \in X\} \supset \overline{\text{Aff } X}$ , d'où l'égalité voulue.

2) Soit  $A \in X$ . Montrons l'égalité  $\text{Vect}\{\overline{AM}, M \in X\} = \text{Vect}\{\overline{PQ}, P, Q \in X\}$ . L'inclusion directe étant triviale, donnons-nous deux points  $P, Q \in X$ . On a  $\overline{PQ} = \overline{PA} + \overline{AQ} \in \text{Vect}\{\overline{AM}, M \in X\}$ . Par suite,

$$\text{Vect}\{\overline{PQ}, P, Q \in X\} \subset \text{Vect}(\text{Vect}\{\overline{AM}, M \in X\}) = \text{Vect}\{\overline{AM}, M \in X\},$$

d'où le résultat. ✓

On retiendra en particulier le cas suivant :

**Corollaire 4.18.** Si  $X = \{A_0, \dots, A_p\}$  est une famille finie de points de  $E$ , alors  $\text{Aff } X = A_0 + \text{Vect}(\overline{A_0A_1}, \dots, \overline{A_0A_p})$ .

**Exemples 4.19.**

1) Si  $A, B \in E$  sont distincts, alors  $\text{Aff}(A, B) = A + K\overline{AB}$  est une droite. C'est même l'**unique** droite passant par  $A$  et  $B$ , on la note  $(AB)$ .

Pourquoi unique? Car si  $D$  est une droite contenant  $\{A, B\}$ , alors  $D = \text{Aff } D \supset \text{Aff}(A, B)$  (par les résultats de la proposition 4.16) et donc  $D = \text{Aff}(A, B)$  pour des raisons de dimensions (cf. proposition 4.9).

2) De même, si  $A, B, C \in E$  sont non alignés (i.e. si  $ABC$  est un triangle non aplati), alors  $\text{Aff}(A, B, C) = A + \text{Vect}(\overline{AB}, \overline{AC})$  est un plan (cf. remarque 4.12), et c'est le **seul** passant par  $A, B, C$ . On le note  $(ABC)$ .

Pour finir, une traduction simple de la proposition 3.6 en termes de bases affines.

**Théorème 5.11.** Soient  $E, F$  deux espaces affines,  $E$  étant supposé de dimension  $n$ . Soit  $(A_i)_{i=0}^n$  un repère affine de  $E$ , et soit  $(B_i)_{i=0}^n$  une famille quelconque de points de  $F$ .

Alors il existe une unique  $f \in A(E, F)$  telle que  $f(A_i) = B_i$  pour tout  $i$ . En outre,

- 1)  $f$  est injective si et seulement si  $(B_i)$  est libre dans  $F$ ;
- 2)  $f$  est surjective si et seulement si  $(B_i)$  est génératrice dans  $F$ ;
- 3)  $f$  est bijective si et seulement si  $(B_i)$  est un repère affine de  $F$ .

Grâce à ce théorème et à la proposition 3.6, on retiendra donc qu'une application affine est entièrement déterminée par la donnée d'un repère (cartésien ou affine) et de son image, exactement comme dans le cas vectoriel.

**Remarque 5.12.** En général, qui dit « base » dit systèmes de coordonnées associées à cette « base » (penser aux repères cartésiens). Les repères affines ont eux aussi un système de coordonnées privilégié, les coordonnées barycentriques, que nous allons définir dans le paragraphe suivant.

## 6 Barycentres

En algèbre linéaire, la notion fondamentale est celle de combinaison linéaire : un sous-espace vectoriel est une partie stable par toute combinaison linéaire de vecteurs, une application linéaire est une application qui transforme toute combinaison linéaire de vecteurs en la combinaison linéaire de leurs images, etc. Dans le contexte affine, un rôle similaire va être joué par la notion de barycentre.

Comme d'habitude, dans ce paragraphe la lettre  $E$  désigne un  $K$ -espace affine.

### 6.1 Définitions, propriétés élémentaires et notations

#### Définitions 6.1.

1) Une famille (un système) de points pondérés de  $E$  est une famille finie  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $E \times K$ . On dit alors que  $\lambda_i$  est le **pooids**, la **masse** ou le **coefficient** du point  $A_i$ .

2) Si  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$  est une famille de points pondérés de  $E$ , l'application  $f : E \rightarrow \vec{E}$ ,  $M \mapsto \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$  s'appelle **fonction vectorielle de Leibniz** associée à la famille  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ .

**Théorème 6.2.** Soit  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$  une famille de points pondérés de  $E$ , et soit  $f$  la fonction vectorielle de Leibniz qui lui est associée.

1) L'application  $f$  est affine ( $\vec{E}$  étant supposé muni de sa structure affine canonique).

2) Si  $\sum_i \lambda_i \neq 0$ ,  $f$  est bijective. En particulier, il existe un unique point  $G \in E$  vérifiant  $f(G) = \vec{0}$ , c'est-à-dire  $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ .

3) Si  $\sum_i \lambda_i = 0$ ,  $f$  est constante. Il existe donc un unique vecteur  $\vec{v} \in \vec{E}$  tel que  $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{v}$  pour tout  $M \in E$ .

**Démonstration.** 1) Pour tous  $M, N \in E$ , on a  $\overrightarrow{f(M)f(N)} = f(N) - f(M) = (-\sum_i \lambda_i) \overrightarrow{MN}$ . Donc  $f$  est affine, de partie linéaire l'homothétie vectorielle  $\vec{f} = (-\sum_i \lambda_i) \text{id}$ .

2) Si  $\sum_i \lambda_i \neq 0$ ,  $\vec{f}$  est bijective, donc  $f$  aussi.

3) Si  $\sum_i \lambda_i = 0$ ,  $\vec{f}$  est identiquement nulle, donc  $f$  est constante. ✓

**Définitions 6.3.** Lorsque  $\sum_i \lambda_i \neq 0$ , le point  $G$  défini par la condition  $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$  est appelé le **barycentre** de la famille  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ , et noté  $G = \text{bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ .

Si de plus tous les  $\lambda_i$  sont égaux (et donc non nuls), on dira que  $G$  est l'**isobarycentre** de la famille  $(A_i)_{i \in I}$ . En particulier, l'isobarycentre  $I$  de deux points  $A$  et  $B$  s'appelle le **milieu du bipoint**.

$(A, B)$ . [Attention à ne pas dire milieu d'un segment : cette notion n'a pas encore été définie et n'a de sens que lorsque  $K = \mathbb{R}$ .] Il est donc défini par la relation  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ , ou encore, par  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .

**Remarque 6.4.** Lorsqu'on considère un triangle (non aplati)  $ABC$ , l'isobarycentre de  $A, B, C$  coïncide avec le ou le centre de gravité (au sens physique) du triangle  $ABC$ . Ce n'est pas le cas pour des polygones généraux. De même on pourra employer (avec la même précaution) le terme de centre de gravité d'un tétraèdre pour parler de l'isobarycentre de ses sommets.

**Proposition 6.5.** Soit  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$  un système de points pondérés de  $E$  avec  $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $G = \text{bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ ;
- (ii)  $\forall M \in E, (\sum_{i \in I} \lambda_i)\overrightarrow{MG} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ ;
- (ii)'  $G = \frac{\sum_{i \in I} \lambda_i A_i}{\sum_{i \in I} \lambda_i}$  dans tout vectorialisé  $E_M$  de  $E$ ;
- (iii)  $\exists M \in E, (\sum_{i \in I} \lambda_i)\overrightarrow{MG} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$ ;
- (iii)'  $G = \frac{\sum_{i \in I} \lambda_i A_i}{\sum_{i \in I} \lambda_i}$  dans un vectorialisé  $E_M$  de  $E$ .

**Démonstration.** Observons que, pour tous  $M, N \in E$ , on a :  $\sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = (\sum \lambda_i)\overrightarrow{MN} + \sum \lambda_i \overrightarrow{NA_i}$ . Cette relation prouve (i)  $\Rightarrow$  (ii) et (iii)  $\Rightarrow$  (i), et l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (iii) est triviale.

Pour démontrer (ii)  $\Leftrightarrow$  (ii)' et (iii)  $\Leftrightarrow$  (iii)', rappelons que le vectorialisé  $E_M$  de  $E$  en  $M$  est isomorphe comme  $K$ -espace vectoriel à  $\vec{E}$  via la bijection  $\psi_M : \vec{E} \rightarrow E, \vec{x} \mapsto M + \vec{x}$ . Ainsi l'écriture  $(\sum \lambda_i)\overrightarrow{MG} = \sum \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$  dans  $\vec{E}$  se traduit par  $(\sum \lambda_i)G = \sum \lambda_i A_i$  dans  $E_M$ .  $\checkmark$

L'expression des barycentres en termes de vectorialisés motive la :

**Notation 6.6.** Soit  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$  un système de points pondérés de  $E$  avec  $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ . On emploiera l'écriture  $G = \frac{\sum_{i \in I} \lambda_i A_i}{\sum_{i \in I} \lambda_i}$  pour signifier que  $G = \text{bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ , avec le sous-entendu qu'il s'agit d'une égalité entre **vecteurs** d'un (de tout) vectorialisé de  $E$ . En particulier, le membre de droite de cette égalité sera considéré comme une combinaison linéaire de vecteurs.

Utiliser cette notation, c'est donc ramener le calcul barycentrique à un calcul vectoriel. Ce point de vue possède de nombreux avantages, notamment en ce qui concerne la manipulation concrète de barycentres. Voici tout de suite un premier exemple d'application.

**Exemple 6.7.** Soit  $G$  le barycentre d'un système  $((A, \lambda), (B, \mu))$ , où  $\lambda + \mu \neq 0$ . On peut donc écrire  $G = \frac{\lambda A + \mu B}{\lambda + \mu}$ . Puisqu'il s'agit d'une écriture vectorielle, on obtient l'identité  $(\lambda + \mu)G = \lambda A + \mu B$ , et on en déduit immédiatement deux formulations équivalentes, à savoir :

$$A = \frac{\lambda + \mu}{\lambda} G - \frac{\mu}{\lambda} B \quad (\text{si } \lambda \neq 0), \quad B = \frac{\lambda + \mu}{\mu} G - \frac{\lambda}{\mu} A \quad (\text{si } \mu \neq 0),$$

qui permettent d'exprimer cette fois  $A$  (resp.  $B$ ) comme barycentre de  $G$  et  $B$  (resp. de  $G$  et  $A$ ).

**Remarque 6.8.** Il est clair que si  $G$  est un barycentre de deux points  $A$  et  $B$ , alors  $G, A, B$  sont alignés. En particulier, si  $A \neq B$ , on a  $G \in (AB)$ .

Comme autres exemples d'utilisation de notre notation vectorielle, on trouve la preuve des propriétés classiques des barycentres.

**Exercice 2.1 (Sous-espaces affines)** — Soit  $E$  un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

Donner une équation cartésienne du plan affine  $P$  contenant la droite  $D$  d'équations  $(x - y + 1 = 0, x + y + z = 1)$  et parallèle à la droite  $D'$  d'équations  $x - 1 = \frac{1}{2}(y - 1) = \frac{1}{3}(z + 1)$ .

**Exercice 2.2 (Sous-espaces et applications affines)** — Soit  $E$  un espace affine sur un corps  $k$  et soit  $f: E \rightarrow E$  une application affine.

(i) Démontrer que l'ensemble

$$\{\overline{Mf(M)}; M \in E\}$$

est un sous-espace affine de  $\vec{E}$  et déterminer sa direction.

(ii) Que peut-on en déduire pour l'ensemble des points fixes de  $f$ ?

**Exercice 2.3 (Applications affines)** — Soit  $E$  un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ . On considère l'application  $f: E \rightarrow E$  qui fait correspondre au point de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  le point de coordonnées  $(7x_1 - 18x_2 + 42x_3 - 12, -2x_1 + 7x_2 - 14x_3 + 4, -2x_1 + 6x_2 - 13x_3 + 4)$ .

(i) Justifier que  $f$  est affine.

(ii) Donner une description géométrique de  $f$ .

**Exercice 2.4 (Applications affines)** — 1. Soit  $E$  et  $F$  deux espaces affines sur un corps  $k$ . Démontrer qu'une application affine  $f: E \rightarrow F$  est injective (resp. surjective; resp. bijective) si et seulement si sa partie linéaire est injective (resp. surjective; resp. bijective).

2. Soit  $E$  un espace affine et soit  $O$  un point fixé dans  $E$ .

(i) Démontrer que toute application affine  $f: E \rightarrow E$  s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$f = t \circ \tilde{f}, \text{ où}$$

- $\tilde{f}$  est une application affine ayant la même partie linéaire que  $f$  et fixant  $O$ ;
- $t$  est une translation.

Expliciter  $\tilde{f}$  et  $t$  en fonction de  $f$ .

(ii) Expliciter la décomposition précédente lorsque  $E$  est un espace affine réel de dimension 3 muni d'un repère cartésien  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et  $f$  est l'application affine envoyant le point de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  sur le point de coordonnées  $(2x_1 - x_2 + x_3 + 1, x_1 + x_2 + x_3 - 3, x_2 - 2x_3 + 2)$ .

(iii) Pour tout vecteur  $\vec{u} \in \vec{E}$ , exprimer l'application affine  $\tilde{f} \circ t_{\vec{u}}$  sous la forme précédente.

(iv) Considérons finalement deux applications affines  $f, g: E \rightarrow E$ , que l'on écrit sous la forme  $f = t_{\vec{u}} \circ \tilde{f}$  et  $g = t_{\vec{v}} \circ \tilde{g}$  décrite en (i). Déduire de ce qui précède l'identité

$$g \circ f = t_{\vec{v} + \tilde{g}(\vec{u})} \circ \tilde{g} \circ \tilde{f}.$$

**Exercice 2.5 (Théorème de Thalès)** — Soit  $H, H', H''$  trois hyperplans parallèles et distincts d'un espace affine  $E$  sur un corps  $k$  et soit  $D_1$  et  $D_2$  deux droites dont les directions ne sont pas contenues dans  $\vec{H}$  (on dit parfois que  $D_1$  et  $D_2$  ne sont pas « faiblement parallèles » à  $H$ ).

(i) Pour  $i \in \{1, 2\}$ , justifier que la droite  $D_i$  intersecte l'hyperplan  $H$  (resp.  $H'$ ; resp.  $H''$ ) en un unique point, noté  $M_i$  (resp.  $M'_i$ ; resp.  $M''_i$ ).

(ii) Démontrer qu'il existe un scalaire  $\lambda \in k$  tel que

$$\overline{M_1 M''_1} = \lambda \overline{M_1 M'_1} \quad \text{et} \quad \overline{M_2 M''_2} = \lambda \overline{M_2 M'_2}.$$

(iii) Expliquer soigneusement comment on peut formuler le résultat précédent en termes de « mesures algébriques ».

**Exercice 2.6 (Extrait de la deuxième épreuve de 2009; barycentres)** — Soit  $P$  un plan affine réel euclidien, rapporté à un repère orthonormé direct.

1. On dit qu'une partie  $\Gamma$  d'un plan affine  $P$  est *convexe* si pour tout couple  $(A, B)$  de points de  $\Gamma$ , le segment  $[AB]$  est contenu dans  $\Gamma$ : c'est-à-dire, en notant  $a$  et  $b$  les affixes respectives des points  $A$  et  $B$ , si pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ , le point  $M_\lambda$  d'affixe  $\lambda a + (1 - \lambda)b$  appartient à  $\Gamma$ . (En particulier, l'ensemble vide est convexe)



1.1. Soit  $F$  une partie de  $P$  et  $E$  l'ensemble des parties de  $P$  qui sont convexes et qui contiennent  $F$ . On pose

$$\mathcal{E}(F) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$$

Montrer que  $\mathcal{E}(F)$  est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe contenant  $F$ . Cette partie  $\mathcal{E}(F)$  est appelée l'*enveloppe convexe* de  $F$ .

1.2. Soit  $F$  une partie non vide de  $P$  et notons  $\mathcal{B}$  l'ensemble des barycentres de familles finies de points de  $F$  affectés de coefficients positifs. Montrer que  $\mathcal{E}(F) = \mathcal{B}$ .

2. Soit  $f(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme de degré  $n$  et soit  $f'(X)$  son polynôme dérivé. Soit  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  l'ensemble des racines de  $f(X)$  et soit  $\alpha_j$  l'ordre de multiplicité de la racine  $r_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

2.1. Montrer que pour tout nombre complexe  $z$  n'appartenant pas à  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ , on a :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{z - r_j}$$

2.2. Soit  $r \in \mathbb{C}$  une racine de  $f'(X)$  n'appartenant pas à  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ . Montrer que :

$$\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j(r - r_j)}{|r - r_j|^2} = 0$$

et déduire que le point d'affixe  $r$  est barycentre des points  $M_1, M_2, \dots, M_m$  d'affixes respectives  $r_1, r_2, \dots, r_m$ .

2.3. Montrer alors que l'ensemble des points dont les affixes sont les racines de  $f'(X)$  est inclus dans l'enveloppe convexe des points du plan dont les affixes sont les racines de  $f(X)$ . (*Théorème de Lucas*)

**Exercice 2.7 (Coordonnées barycentriques)** — Soit  $E$  un espace affine de dimension  $n$  sur un corps  $k$ . On considère  $n+1$  points  $A_0, A_1, \dots, A_n$  dans  $E$ .

(i) Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) les points  $A_0, \dots, A_n$  ne sont contenus dans aucun sous-espace affine propre de  $E$ ;

(b)  $(A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$  est un repère cartésien de  $E$ .

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que  $(A_0, A_1, \dots, A_n)$  est un *repère affine* de  $E$ .

(ii) Supposons que  $(A_0, \dots, A_n)$  soit un repère affine de  $E$ . Démontrer que, pour tout point  $M$  de  $E$ , il existe une unique famille de scalaires  $x_0, \dots, x_n \in k$  telle que  $\sum_{i=0}^n x_i = 1$  et  $M = \text{Bar}((A_0, x_0), (A_1, x_1), \dots, (A_n, x_n))$ ; ce sont les *coordonnées barycentriques* de  $M$  dans le repère  $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ .

(iii) Comparer les coordonnées barycentriques de  $M$  dans le repère affine  $(A_0, \dots, A_n)$  et ses coordonnées cartésiennes dans le repère cartésien  $(A_0; \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ .

(iv) Considérons  $n+1$  points  $M_0, M_1, \dots, M_n$  dans  $E$  et désignons par  $(x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{in})$  les coordonnées barycentriques de  $M_i$  dans le repère affine  $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ . Démontrer qu'il existe un sous-espace affine propre de  $E$  contenant  $M_0, M_1, \dots, M_n$  si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_{00} & x_{01} & \dots & x_{0n} \\ x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n0} & x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

est nul.

**Exercice 2.8 (Coordonnées barycentriques, suite)** — Considérons un plan affine  $P$  sur un corps  $k$  et soit  $(A_0, A_1, A_2)$  un repère affine de  $P$ .

(i) Démontrer que trois points de  $P$ , de coordonnées barycentriques respectives  $(a_0, a_1, a_2)$ ,  $(b_0, b_1, b_2)$  et  $(c_0, c_1, c_2)$ , sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

(ii) En déduire que toute droite de  $P$  admet une équation barycentrique de la forme  $\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 = 0$ , avec  $\alpha, \beta, \gamma \in k$  des scalaires non tous nuls.

**GÉOMÉTRIE 2 : ESPACES AFFINES**  
**Corrigé (début)**

**Principaux points à retenir**

1. Lien étroit entre les contextes affines et vectoriels. Application des techniques d'algèbre linéaire à l'étude de problèmes géométriques.
2. Représentation paramétrique d'un sous-espace affine, description par des équations affines dans un repère cartésien et passage d'un point de vue à l'autre (exercices 2.1. et 2.3).
3. Étude d'une application affine à partir de son expression dans un repère cartésien et interprétation géométrique des résultats obtenus (exercice 2.3).
4. Définition de la notion de « mesure algébrique » et formulation du théorème de Thalès la faisant intervenir (exercice 2.5).
5. Utilisation des nombres complexes après avoir choisi un repère orthonormé d'un plan euclidien (exercice 2.6).
6. Notion de barycentre et opérations élémentaires correspondantes (exercice 2.6).

**Exercice 2.1** — Le plan  $P$  cherché s'écrit sous la forme  $P = M_0 + \vec{P}$ , où  $M_0$  est l'un quelconque de ses points et  $\vec{P}$ , sa direction, est un sous-espace vectoriel de  $\vec{E}$  de dimension 2. Par hypothèse, le plan  $P$  contient la droite  $D$  et est parallèle à la droite  $D'$ . Il suffit donc de choisir  $M_0$  dans  $D$ . En admettant temporairement que les droites  $D$  et  $D'$  ne soient pas parallèles (ce que l'on va bientôt vérifier),  $\vec{P} = \vec{D} + \vec{D}'$  est le plan vectoriel engendré par les directions de  $D$  et  $D'$ .

Nous avons visiblement besoin de descriptions paramétriques de  $D$  et  $D'$ , que l'on obtient très simplement en résolvant les systèmes linéaires définissant ces droites.

Étant donné un point  $M$  dans  $E$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans le repère considéré,

$$M \in D \iff \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \iff_{L_2 - L_1 + L_1} \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

donc  $D$  est la droite passant par le point  $A = O + \vec{e}_2$  et dirigée par le vecteur  $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$ .

De manière analogue,

$$M \in D' \iff \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 3x - z - 4 = 0 \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et donc  $D'$  est la droite passant par le point  $A' = O - \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$  et dirigée par le vecteur  $\vec{v}' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ .

Les droites  $D$  et  $D'$  étant dirigées par des vecteurs non colinéaires, elles ne sont pas parallèles et  $\vec{D} + \vec{D}'$  est par conséquent un plan vectoriel. Ayant choisi  $M_0 = A$ , nous en déduisons une description paramétrique du plan cherché :

$$P = A + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{v}'.$$

De manière équivalente, étant donné un point  $M$  dans  $E$  de coordonnées  $(x, y, z)$  dans le repère considéré,

$$M \in P \iff \overrightarrow{AM} \in \text{Vect}(\vec{v}, \vec{v}') \iff^{(1)} \text{les vecteurs } \overrightarrow{AM}, \vec{v} \text{ et } \vec{v}' \text{ sont linéairement dépendants}$$

$$\iff \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y - 1 & 1 & 2 \\ z & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit de calculer ce déterminant pour obtenir une équation cartésienne de  $P$  :  $7x - 5y + z + 5 = 0$ .

*Remarque sur l'équivalence<sup>(1)</sup>.* L'implication  $\Rightarrow$  est évidente. Pour l'implication réciproque, observer que si l'on a une relation de dépendance linéaire  $\lambda \overrightarrow{AM} + \mu \vec{v} + \nu \vec{v}' = 0$  avec des coefficients non tous nuls, alors nécessairement  $\lambda \neq 0$  car sinon les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  seraient colinéaires.

**Exercice 2.2** — Rappelons que l'on peut naturellement voir tout espace vectoriel  $\vec{E}$  comme un espace affine de direction  $\vec{E}$  en considérant l'action de  $\vec{E}$  sur lui-même par translation :

$$\begin{aligned}\vec{E} \times \vec{E} &\longrightarrow \vec{E} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \vec{u} + \vec{v}\end{aligned}$$

En d'autres termes : si l'on voit deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  comme des « points », le vecteur  $\overrightarrow{\vec{u}\vec{u}'}$  est simplement  $\vec{u}' - \vec{u}$ . Un sous-espace affine  $F$  de  $\vec{E}$  est le translaté  $F = \vec{u} + \vec{F}$  d'un sous-espace vectoriel  $\vec{F}$  de  $\vec{E}$  par un vecteur  $\vec{u} \in \vec{E}$ .

(i) Fixons un point  $O$  dans  $E$ . Pour tout point  $M \in E$ ,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Mf(M)} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{Of(O)} + \overrightarrow{f(O)f(M)} \\ &= \overrightarrow{Of(O)} + \vec{f}(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{Of(O)} + (\vec{f} - \text{id})(\overrightarrow{OM}).\end{aligned}$$

Comme tout vecteur dans  $\vec{E}$  s'écrit (de manière unique) sous la forme  $\overrightarrow{OM}$  avec  $M \in E$ , nous obtenons ainsi

$$\{\overrightarrow{Mf(M)}; M \in E\} = \overrightarrow{Of(O)} + \text{Im}(\vec{f} - \text{id}),$$

ce qui montre que l'ensemble considéré est un sous-espace affine de  $\vec{E}$ , de direction le sous-espace vectoriel  $\text{Im}(\vec{f} - \text{id})$ .

(ii) Un point  $M \in E$  est un point fixe de  $f$  si et seulement si  $\overrightarrow{Mf(M)} = \vec{0}$ . Par suite, pour que l'ensemble des points fixes de  $f$  soit non vide, il faut et il suffit que le sous-espace affine de  $\vec{E}$  considéré à la question précédente passe par l'origine  $\vec{0}$  de  $\vec{E}$ , c'est-à-dire que ce soit un sous-espace vectoriel.

Supposons que  $f$  admette un point fixe  $O$ . Pour tout point  $M \in E$ ,

$$f(M) = M \iff \overrightarrow{Mf(M)} = \vec{0} \iff \vec{f}(\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} = \vec{0} \iff \overrightarrow{OM} \in \text{Ker}(\vec{f} - \text{id}),$$

et donc l'ensemble des points fixes de  $f$  est le sous-espace affine de  $E$  passant par  $O$  et dirigé par le sous-espace vectoriel  $\text{Ker}(\vec{f} - \text{id})$  de  $\vec{E}$ .

**Exercice 2.3** — (i) Étant donné un point  $M$  dans  $E$  de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  dans le repère  $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{f(M)f(O)}$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  sont

$$\begin{pmatrix} 7x_1 - 18x_2 + 42x_3 \\ -2x_1 + 7x_2 - 14x_3 \\ -2x_1 + 6x_2 - 13x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -18 & 42 \\ -2 & 7 & -14 \\ -2 & 6 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

On a donc  $\overrightarrow{f(O)f(M)} = L(\overrightarrow{OM})$ , où  $L$  est l'endomorphisme linéaire de  $\vec{E}$  dont la matrice dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -18 & 42 \\ -2 & 7 & -14 \\ -2 & 6 & -13 \end{pmatrix}.$$

L'application  $f$  est par conséquent affine, de partie linéaire  $L$ .

(ii) Commençons par déterminer l'ensemble  $\text{Fix}(f)$  des points fixes de  $f$ . Étant donné un point  $M$  dans  $E$ ,

$$f(M) = M \iff (\vec{f} - \text{id})(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O},$$

donc  $\text{Fix}(f)$  est non vide si et seulement si le vecteur  $\overrightarrow{f(O)O}$  appartient à l'image de l'application linéaire  $\vec{f} - \text{id}$ . La matrice

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -18 & 42 \\ -2 & 6 & -14 \\ -2 & 6 & -14 \end{pmatrix}$$

est de rang 1, toutes ses colonnes étant proportionnelles à  $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . On a donc  $\text{Im}(A - I_3) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , et  $\text{Im}(\vec{f} - \text{id})$

est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\vec{v} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ . On vérifie immédiatement que le vecteur  $\overrightarrow{Of(O)} = -4\vec{v}$  appartient à cette droite. En outre, comme

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -18 & 42 \\ -2 & 6 & -14 \\ -2 & 6 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le point  $O' = O + 2\vec{e}_1$  est fixé par  $f$  et

$$\text{Fix}(f) = O + \text{Ker}(\vec{f} - \vec{id})$$

est un sous-espace affine de dimension

$$\dim \text{Ker}(\vec{f} - \vec{id}) = \dim \vec{E} - \dim \text{Im}(\vec{f} - \vec{id}) = 3 - 1 = 2$$

par application du théorème du rang.

L'application linéaire  $\vec{f}$  admet 1 pour valeur propre avec multiplicité  $\dim \text{Ker}(\vec{f} - \vec{id}) = 2$ . La troisième valeur propre  $\lambda$  de  $\vec{f}$  satisfait à l'équation

$$1 + 1 + \lambda = \text{Trace}(\vec{f}) = \text{Trace}(A) = 1,$$

donc  $\lambda = -1$ . Cette valeur propre étant simple, le sous-espace propre correspondant  $\text{Ker}(\vec{f} + \vec{id})$  est une droite vectorielle, engendrée par tout vecteur non nul dont les coordonnées appartiennent au noyau de la matrice

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 8 & -18 & 42 \\ -2 & 8 & -14 \\ -2 & 6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\begin{cases} 8x_1 - 18x_2 + 42x_3 = 0 \\ -2x_1 + 8x_2 - 14x_3 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - 12x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 21x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{L_1' : L_1 + 4L_2 \\ L_2' : L_2 + L_3}} \begin{cases} 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

le vecteur  $\vec{w} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$  engendre la droite  $\text{Ker}(\vec{f} - \vec{id})$ .

Nous pouvons maintenant conclure et décrire géométriquement  $f$ . L'espace vectoriel  $\vec{E}$  est somme directe des sous-espaces propres de  $\vec{f}$  :

$$\vec{E} = \text{Ker}(\vec{f} - \vec{id}) \oplus \text{Ker}(\vec{f} + \vec{id})$$

(justification : ces deux sous-espaces propres sont en effet d'intersection nulle car les valeurs propres correspondantes sont distinctes et la dimension du membre de droite est  $3 = 2 + 1$ ); l'endomorphisme  $\vec{f}$  est ainsi diagonalisable.

Désignons respectivement par  $\pi_1$  et  $\pi_{-1}$  les projecteurs de  $\vec{E}$  sur  $\text{Ker}(\vec{f} - \vec{id})$  et  $\text{Ker}(\vec{f} + \vec{id})$  associées à cette décomposition : pour tout vecteur  $\vec{v} \in \vec{E}$ ,

$$\pi_1(\vec{v}) \in \text{Ker}(\vec{f} - \vec{id}), \quad \pi_{-1}(\vec{v}) \in \text{Ker}(\vec{f} + \vec{id}) \quad \text{et} \quad \vec{v} = \pi_1(\vec{v}) + \pi_{-1}(\vec{v}).$$

Quel que soit le point  $M$  dans  $E$ ,

$$\begin{aligned} f(M) &= f(O') + \vec{f}(\overrightarrow{O'M}) \\ &= O' + \vec{f}(\pi_1(\overrightarrow{O'M}) + \pi_{-1}(\overrightarrow{O'M})) \\ &= O' + \pi_1(\overrightarrow{O'M}) - \pi_{-1}(\overrightarrow{O'M}). \end{aligned}$$

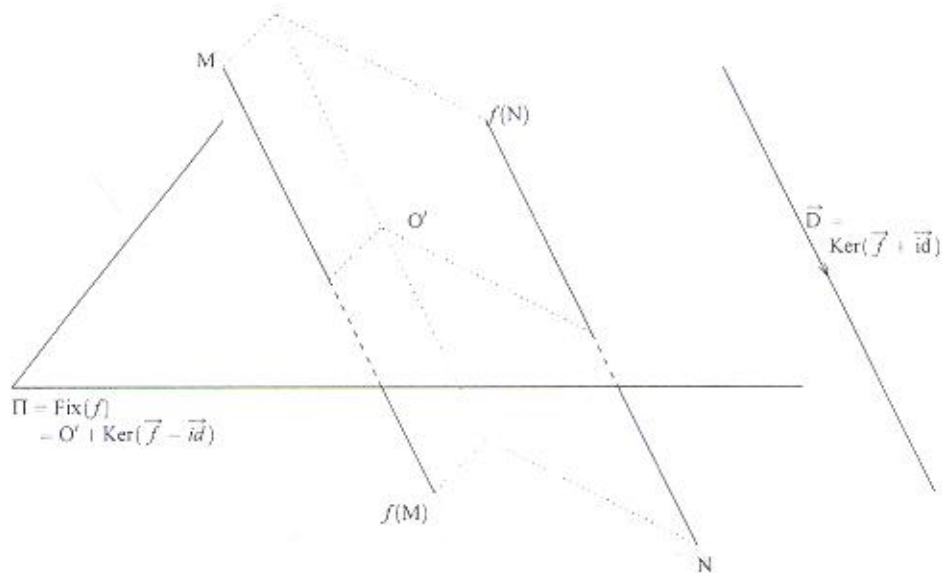
Ainsi, l'application  $f$  fixe chaque point du plan

$$\Pi = O' + \text{Ker}(\vec{f} - \vec{id}) = O' + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}),$$

où  $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$  et  $\vec{v} = 7\vec{e}_1 - \vec{e}_3$ . Elle stabilise par ailleurs chaque droite  $D$  de direction

$$\text{Ker}(\vec{f} + \vec{id}) = \mathbb{R}\vec{w},$$

où  $\vec{w} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ , sur laquelle elle induit la symétrie par rapport au point d'intersection de  $D$  avec  $\Pi$ . Au final,  $f$  est donc de la symétrie par rapport au plan  $\Pi$ , dans la direction  $\mathbb{R}\vec{w}$ .



**Exercice 2.4** — 1. Soit  $f : E \rightarrow F$  une application affine. Ayant fixé un point  $O$  dans  $E$ , tout point  $M$  de  $E$  s'écrit de manière unique sous la forme  $M = O + \vec{v}$  avec  $\vec{v} \in \vec{E}$  et

$$f(O + \vec{v}) = f(O) + \vec{f}(\vec{v}).$$

Comme

$$f(M) = f(O) \iff \vec{f}(\vec{OM}) = \vec{0},$$

la fibre  $f^{-1}(O)$  de  $f$  au-dessus du point  $O$  — c'est-à-dire le sous-ensemble des points  $M$  de  $E$  tels que  $f(M) = f(O)$  — est un sous-espace affine de direction  $\text{Ker}(\vec{f})$ . Si  $f$  est injective, ce sous-espace est réduit au point  $O$ , donc  $\text{Ker}(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$  et  $\vec{f}$  est injective. Réciproquement, si  $\vec{f}$  est injective, alors  $f^{-1}(O) = \{O\}$ ; le point  $O$  pouvant être choisi arbitrairement, toutes les fibres de  $f$  sont des singletons et  $f$  est donc injective.

L'image de  $f$  est le sous-espace affine  $\text{Im}(f) = f(O) + \text{Im}(\vec{f})$ . Par suite,

$$f \text{ est surjective} \iff \text{Im}(f) = E \iff \text{Im}(\vec{f}) = \vec{E} \iff \vec{f} \text{ est surjective.}$$

L'équivalence entre la bijectivité de  $f$  et celle de  $\vec{f}$  se déduit immédiatement des équivalences pour l'injectivité et la surjectivité.

2. Fixons un point  $O$  dans  $E$  et soit  $f : E \rightarrow E$  une application affine.

(i) Écriture de  $f$  sous la forme  $f = t \circ \vec{f}$ , où  $t$  est une translation et  $\vec{f}$  une application affine fixant  $O$ .

- *Unicité* — Si  $t, t'$  sont deux translations et  $g, g'$  sont deux applications affines fixant le point  $O$  telles que  $t \circ g = t' \circ g'$ , alors  $t(O) = (t \circ g)(O) = (t' \circ g')(O) = t'(O)$ , donc  $t = t'$ , puis  $g = t^{-1} \circ (t \circ g) = t^{-1} \circ (t' \circ g') = g'$ .

- *Existence* — Soit  $\vec{f}$  l'application affine de  $E$  dans lui-même définie par

$$\vec{f}(O + \vec{v}) = O + \vec{f}(\vec{v}) \quad (\vec{v} \in \vec{E}).$$

On a alors

$$f(O + \vec{v}) = f(O) + \vec{f}(\vec{v}) = O + \vec{Of}(\vec{O}) + \vec{f}(\vec{v}) = \vec{f}(O + \vec{v}) + \vec{Of}(\vec{O})$$

pour tout vecteur  $\vec{v}$ , c'est-à-dire  $f = t \circ \vec{f}$  en désignant par  $t$  la translation de vecteur  $\vec{Of}(\vec{O})$ .

(ii) Dans le cas particulier considéré,  $t$  est la translation de vecteur  $\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$  et  $\vec{f}$  est l'application affine envoyant le point de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  sur le point de coordonnées  $(2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_2 - 2x_3)$ .

(iii) Soit  $\vec{u} \in \vec{E}$  et posons  $g = \vec{f} \circ t_{\vec{u}}$ . D'après (i),  $g = t' \circ \vec{g}$ , où  $t'$  est la translation de vecteur  $\vec{Og}(\vec{O})$  et  $\vec{g}$  est l'unique application affine ayant la même partie linéaire que  $g$  et fixant  $O$ . Comme  $\vec{g} = \vec{f}$ ,  $\vec{g} = \vec{f}$ ; par ailleurs,  $g(O) = \vec{f}(O + \vec{u}) = O + \vec{f}(\vec{u})$  et donc  $\vec{Og}(\vec{O}) = \vec{f}(\vec{u})$ . Nous obtenons finalement

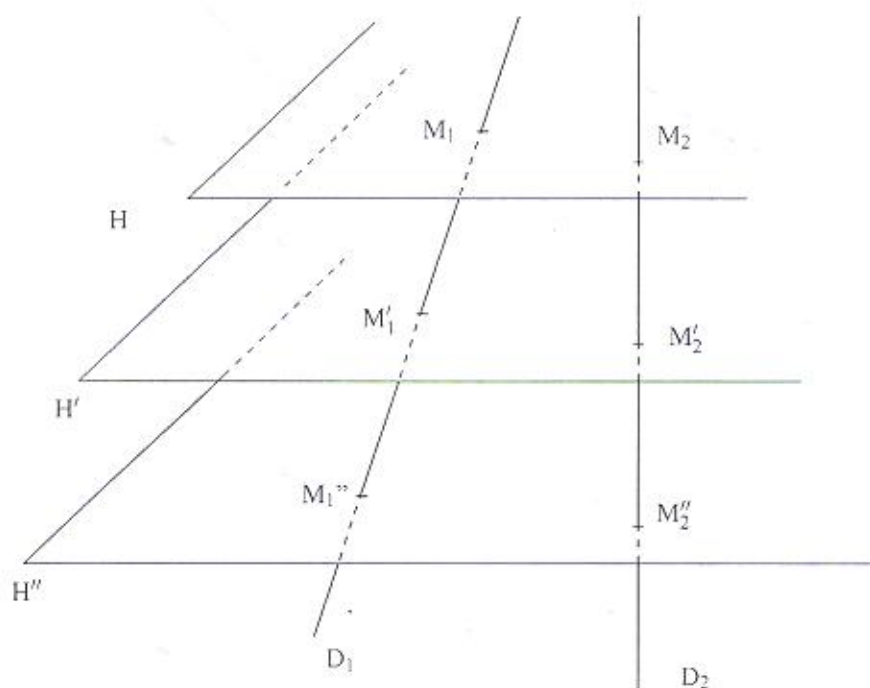
$$\vec{f} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{f}(\vec{u})} \circ \vec{f}.$$

(iv) Il suffit d'appliquer la formule obtenue à la question précédente :

$$\begin{aligned} g \circ f &= (t_{\vec{v}} \circ \tilde{g}) \circ (t_{\vec{w}} \circ \tilde{f}) \\ &= t_{\vec{v}} \circ (\tilde{g}) \circ (t_{\vec{w}}) \circ \tilde{f} \\ &= t_{\vec{v}} \circ (t_{\tilde{g}(\vec{w})} \circ \tilde{g}) \circ \tilde{f} \\ &= t_{\vec{v} + \tilde{g}(\vec{w})} \circ \tilde{g} \circ \tilde{f}. \end{aligned}$$

**Exercice 2.5** — (i) Les hyperplans  $H, H'$  et  $H''$  ont la même direction  $\vec{H}$ , laquelle est un hyperplan vectoriel de  $\vec{E}$  ne contenant ni  $\vec{D}_1$ , ni  $\vec{D}_2$ . On en déduit tout de suite  $\vec{H} \cap \vec{D}_1 = \vec{H} \cap \vec{D}_2 = \{\vec{0}\}$  puis

$$\vec{E} = \vec{H} + \vec{D}_1 = \vec{H} + \vec{D}_2.$$



Choisissons un point  $O_1$  dans  $D_1$  et un point  $O$  dans  $H$ , de sorte que  $D_1 = O_1 + \vec{D}_1$  et  $H = O + \vec{H}$ . Quel que soit  $M \in E$ ,

$$\begin{aligned} M \in D_1 \cap H &\iff \exists(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{D}_1 \times \vec{H}, \quad O_1 + \vec{u} = O + \vec{v} \\ &\iff \exists(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{D}_1 \times \vec{H}, \quad \vec{OO}_1 = \vec{v} - \vec{u}. \end{aligned}$$

Vu la décomposition en somme directe  $\vec{E} = \vec{H} \oplus \vec{D}_1$ , il existe une unique écriture du vecteur  $\vec{OO}_1$  sous la forme  $\vec{OO}_1 = \vec{v} - \vec{u}$  avec  $\vec{u} \in \vec{D}_1$ ,  $\vec{v} \in \vec{H}$ . L'intersection  $D_1 \cap H$  est par conséquent réduite au point  $O_1 + \vec{u} = O + \vec{v}$ .

Le raisonnement précédent s'applique chaque fois et

$$D_i \cap H = \{M_i\}, \quad D_i \cap H' = \{M'_i\}, \quad D_i \cap H'' = \{M''_i\}$$

( $i = 1, 2$ ).

(ii) Les points  $M_1, M'_1$  et  $M''_1$  d'une part,  $M_2, M'_2$  et  $M''_2$  d'autre part, sont distincts puisque les trois hyperplans  $H, H'$  et  $H''$  sont par hypothèse disjoints.

Les vecteurs  $\overrightarrow{M_1 M'_1}$  et  $\overrightarrow{M_1 M''_1}$  sont non nuls et colinéaires, donc il existe un unique scalaire  $\lambda_1 \in k$  tel que  $\overrightarrow{M_1 M''_1} = \lambda_1 \overrightarrow{M_1 M'_1}$ . Pour la même raison, il existe un unique scalaire  $\lambda_2 \in k$  tel que  $\overrightarrow{M_2 M''_2} = \lambda_2 \overrightarrow{M_2 M'_2}$ .

Par ailleurs,

$$\overrightarrow{M_2 M'_2} = \overrightarrow{M_2 M_1} + \overrightarrow{M_1 M'_1} + \overrightarrow{M'_1 M'_2}$$

et

$$\overrightarrow{M_2 M''_2} = \overrightarrow{M_2 M_1} + \overrightarrow{M_1 M''_1} + \overrightarrow{M''_1 M''_2}.$$

donc

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \left( \overrightarrow{M_2M_1} + \overrightarrow{M_1M_1'} + \overrightarrow{M_1'M_2'} \right) - \lambda_2 \left( \overrightarrow{M_2M_1} + \overrightarrow{M_1M_1'} + \overrightarrow{M_1'M_2'} \right) \\ &= \left( \overrightarrow{M_1M_1'} - \lambda_2 \overrightarrow{M_1M_1'} \right) + \left( \overrightarrow{M_2M_1} + \overrightarrow{M_1'M_2'} - \lambda_2 \overrightarrow{M_2M_1} - \lambda_2 \overrightarrow{M_1'M_2'} \right).\end{aligned}$$

Le vecteur dans la première parenthèse appartient à  $\vec{D}_1$ , celui dans la seconde parenthèse à  $\vec{H}$ ; tous deux sont nuls puisque ces sous-espaces vectoriels sont en somme directe. Nous obtenons ainsi  $\overrightarrow{M_1M_1'} = \lambda_2 \overrightarrow{M_1M_1'}$ , puis finalement  $\lambda_1 = \lambda_2$  par unicité du coefficient de proportionnalité.

(ii) Considérons une droite  $D$  dans  $E$  et choisissons un vecteur non nul  $\vec{u}$  dans  $\vec{D}$  (un vecteur directeur). Étant donnés deux points  $M$  et  $N$  dans  $D$ , il existe un unique scalaire  $\mu \in k$  tel que  $\overrightarrow{MN} = \mu \vec{u}$ . Ce coefficient est la *mesure algébrique* de  $\overrightarrow{MN}$  associée au vecteur  $\vec{u}$ , et il est nul si et seulement si  $M = N$ . Il est bien clair que cette définition dépend du choix du vecteur directeur  $\vec{u}$  de  $\vec{D}$ . En effet, si  $\vec{u}'$  est un autre vecteur directeur de  $D$ , il existe alors un (unique) scalaire  $\alpha \in k^\times$  tel que  $\vec{u}' = \alpha \vec{u}$ ; la mesure algébrique de  $\overrightarrow{MN}$  associée à  $\vec{u}'$  est le scalaire  $\mu'$  défini par la relation  $\overrightarrow{MN} = \mu' \vec{u}'$ , et un calcul immédiat fournit la relation

$$\mu' = \frac{\mu}{\alpha}.$$

Nous noterons  $\overline{MN}^{\vec{u}}$  la mesure algébrique de  $\overrightarrow{MN}$  associée au vecteur directeur  $\vec{u}$  pour mettre en évidence cette dépendance.

Revenons à la question (ii) et introduisons des vecteurs directeurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  des droites  $D_1$  et  $D_2$ . Ceci fait, nous pouvons écrire

$$\overrightarrow{M_iM_i'} = \overline{M_iM_i'}^{\vec{u}_i} \vec{u}_i \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_iM_i'} = \overline{M_iM_i'}^{\vec{u}_i'} \vec{u}_i'$$

( $i = 1, 2$ ) et le résultat obtenu à la question (ii) s'exprime alors sous la forme

$$\frac{\overline{M_1M_1'}^{\vec{u}_1}}{\overline{M_1M_1'}^{\vec{u}_1'}} = \frac{\overline{M_2M_2'}^{\vec{u}_2}}{\overline{M_2M_2'}^{\vec{u}_2'}}.$$

Il reste à observer que les *quotients* de mesures algébriques apparaissant dans cette égalité ne dépendent pas du choix des vecteurs directeurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ , ce qui se déduit immédiatement de la formule de transformation des mesures algébriques par changement de vecteur directeur : le numérateur et le dénominateur sont multipliés par un même facteur.

Voici donc l'énoncé du théorème de Thalès en termes de mesures algébriques : sous les hypothèses initiales, les points d'intersection des droites  $D_1$  et  $D_2$  avec les hyperplans  $H, H'$  et  $H''$  satisfont à la relation de proportionnalité

$$\frac{\overline{M_1M_1'}}{\overline{M_1M_1'}} = \frac{\overline{M_2M_2'}}{\overline{M_2M_2'}}.$$

où, pour chaque quotient, les barres désignent n'importe quelle mesure algébrique associée à un vecteur directeur de la droite correspondante.

**Exercice 2.6** — Un plan euclidien  $P$  est par définition un plan affine réel dont la direction  $\vec{P}$  est munie d'un produit scalaire. Le choix d'un repère orthonormé  $\mathcal{H}_0 = (O; \vec{i}, \vec{j})$  permet d'orienter  $P$  : les repères orthonormés directs seront ceux qui se déduisent de  $\mathcal{H}_0$  par un déplacement (c'est-à-dire une isométrie dont la partie linéaire est de déterminant positif).

Le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel euclidien de dimension 2, le produit scalaire étant défini par la formule  $(z|z') = \frac{1}{2}(z\bar{z}' + \bar{z}z')$ . L'application

$$\mathbb{C} \rightarrow \vec{P}, \quad z = x + iy \mapsto x\vec{i} + y\vec{j},$$

qui dépend du choix de la base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$  de  $\vec{P}$ , est une isométrie. Comme on a en outre fixé une origine  $O$  dans  $P$ , on dispose finalement d'une isométrie affine

$$\mathbb{C} \rightarrow P, \quad z = x + iy \mapsto O + x\vec{i} + y\vec{j}.$$

1.1. L'ensemble  $\mathcal{E}(F)$  contient clairement  $F$ . C'est par ailleurs une partie convexe du plan : étant donnés deux points  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{E}(F)$  ainsi qu'une partie convexe  $\Gamma$  de  $P$  qui contient  $F$ , on a  $A, B \in \Gamma$  car  $\Gamma$  contient  $\mathcal{E}(F)$  puis  $[A, B] \subset \Gamma$  par convexité. On obtient ainsi  $[A, B] \subset \mathcal{E}(F)$ , ce qui prouve la convexité de  $\mathcal{E}(F)$ .

Comme  $\mathcal{E}(F)$  est, par définition, contenue dans toute partie convexe du plan contenant  $F$ , c'est la plus petite partie convexe du plan contenant  $F$ .

1.2. Pour établir l'inclusion  $\mathcal{B}(F) \subset \mathcal{B}$ , il suffit de vérifier que  $\mathcal{B}$  est une partie convexe du plan contenant  $F$ . Il est clair que  $\mathcal{B}$  contient  $F$  : en effet, chaque point  $A$  de  $F$  est le barycentre de la famille  $\{(A, 1)\}$ . Considérons maintenant deux points  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{B}$ . Par hypothèse, on peut écrire

$$A = \text{Bar}\{(M_1, \lambda_1), \dots, (M_m, \lambda_m)\} \quad \text{et} \quad B = \text{Bar}\{(N_1, \mu_1), \dots, (N_n, \mu_n)\}$$

avec  $M_1, \dots, M_m, N_1, \dots, N_n \in F$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i > 0$  et  $\sum_{1 \leq j \leq n} \mu_j > 0$ . Contrairement aux apparences, nous pouvons faire en sorte que  $A$  et  $B$  soient barycentres des *mêmes* points de  $F$ , avec des coefficients différents : il suffit en effet de poser

$$Q_1 = M_1, \dots, Q_m = M_m, Q_{m+1} = N_1, \dots, Q_{m+n} = N_n,$$

(ces points ne sont pas nécessairement tous distincts)

$$\lambda'_1 = \lambda_1, \lambda'_2 = \lambda_2, \dots, \lambda'_m = \lambda_m, \lambda'_{m+1} = \dots = \lambda'_{m+n} = 0$$

et

$$\mu'_1 = \dots = \mu'_m = 0, \mu'_{m+1} = \mu_1, \dots, \mu'_{m+n} = \mu_n,$$

de sorte que

$$A = \text{Bar}\{(Q_1, \lambda'_1), \dots, (Q_{m+n}, \lambda'_{m+n})\} \quad \text{et} \quad B = \text{Bar}\{(Q_1, \mu'_1), \dots, (Q_{m+n}, \mu'_{m+n})\},$$

en utilisant le fait qu'un point affecté du poids 0 ne compte pas dans la définition d'un barycentre.

On a évidemment  $t\lambda'_i + (1-t)\mu'_i \geq 0$  pour tout  $i$  et  $t \sum_{1 \leq i \leq m+n} \lambda'_i + (1-t) \sum_{1 \leq i \leq m+n} \mu'_i > 0$ . Maintenant, les propriétés élémentaires des barycentres permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \text{Bar}\{(A, t), (B, 1-t)\} &= \text{Bar}\{\text{Bar}\{(Q_1, t\lambda'_1), \dots, (Q_{m+n}, t\lambda'_{m+n})\}, \text{Bar}\{(Q_1, (1-t)\mu'_1), \dots, (Q_{m+n}, (1-t)\mu'_{m+n})\}\} \\ &= \text{Bar}\{(Q_1, t\lambda'_1 + (1-t)\mu'_1), \dots, (Q_{m+n}, t\lambda'_{m+n} + (1-t)\mu'_{m+n})\} \end{aligned}$$

ce qui prouve que le point  $\text{Bar}\{(A, t), (B, 1-t)\}$  appartient à  $\mathcal{B}$ .

L'inclusion réciproque  $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}(F)$  découle immédiatement du fait que toute partie convexe du plan contenant  $F$  contient également tout barycentre d'une famille finie de points de  $F$  affectés de poids positifs. Démontrons-le brièvement en raisonnant par récurrence sur le cardinal  $n$  d'une telle famille  $\{(M_1, \lambda_1), \dots, (M_n, \lambda_n)\}$ .

- Le résultat est vrai si  $n = 1$  car  $\text{Bar}\{(M_1, \lambda_1)\} = M_1 \in F \subset \Gamma$ .
- La validité du résultat si  $n = 2$  vient de la convexité de  $\Gamma$  puisque  $\text{Bar}\{(M_1, \lambda_1), (M_2, \lambda_2)\} \in [M_1, M_2] \subset \Gamma$ .
- Supposons le résultat acquis pour  $n \geq 2$  et démontrons-le pour  $n+1$ . Si  $\lambda_{n+1} = 0$ , alors

$$\text{Bar}\{(M_1, \lambda_1), \dots, (M_n, \lambda_n), (M_{n+1}, \lambda_{n+1})\} = \text{Bar}\{(M_1, \lambda_1), \dots, (M_n, \lambda_n)\}$$

appartient à  $\Gamma$  d'après l'hypothèse de récurrence. Si  $\lambda_{n+1} > 0$ , l'associativité permet d'écrire

$$\text{Bar}\{(M_1, \lambda_1), \dots, (M_n, \lambda_n), (M_{n+1}, \lambda_{n+1})\} = \text{Bar}\{(M_1, \lambda_1), \dots, (M_{n-1}, \lambda_{n-1}), (M'_n, \lambda'_n)\}$$

avec  $M'_n = \text{Bar}\{(M_n, \lambda_n), (M_{n+1}, \lambda_{n+1})\}$  et  $\lambda'_n = \lambda_n + \lambda_{n+1} \geq \lambda_{n+1} > 0$ . Ce point appartenant à  $\Gamma$  par convexité, nous sommes ramenés à une famille de cardinal  $n$  et le barycentre considéré appartient à  $\Gamma$  en vertu de l'hypothèse de récurrence.

2.1. Pour tout nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \prod_{j=1}^m (z - r_j)^{\alpha_j}$  et donc

$$f'(z) = \sum_{j=1}^m \alpha_j (z - r_j)^{\alpha_j - 1} \prod_{1 \leq i \leq m, i \neq j} (z - r_i)^{\alpha_i}$$

d'après les règles de dérivation d'un produit. Si  $z$  est distinct de  $r_1, \dots, r_m$ , nous en déduisons

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j (z - r_j)^{\alpha_j - 1} \prod_{1 \leq i \leq m, i \neq j} (z - r_i)^{\alpha_i}}{\prod_{j=1}^m (z - r_j)^{\alpha_j}} \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \frac{(z - r_j)^{\alpha_j - 1} \prod_{1 \leq i \leq m, i \neq j} (z - r_i)^{\alpha_i}}{\prod_{j=1}^m (z - r_j)^{\alpha_j}} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{z - r_j}. \end{aligned}$$

2.2. Pour toute racine  $r \in \mathbb{C}$  de  $f'$  distincte des racines de  $f$ , l'évaluation de la formule précédente en  $z = r$  donne

$$0 = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{r - r_j} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j (\bar{r} - \bar{r}_j)}{|r - r_j|^2}.$$

Comme  $\alpha_j$  et  $|r - r_j|^2$  sont des nombres réels, il suffit de conjuguer pour obtenir le résultat souhaité :

$$\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) = 0.$$



Étant donnés deux points  $N$  et  $N'$  d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ ,  $\overrightarrow{NN'} = \operatorname{Re}(z - z') \vec{i} + \operatorname{Im}(z - z') \vec{j}$ . En séparant les parties réelle et imaginaire dans la dernière identité, celle-ci est donc équivalente à la relation vectorielle

$$\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} \overrightarrow{MM_j} = \vec{0},$$

où  $M$  (resp.  $M_j$ ) désigne le point de  $P$  d'affixe  $r$  (resp.  $r_j$ ). Nous en déduisons que  $M$  est barycentre des points  $M_1, \dots, M_m$  avec des poids strictement positifs.

2.3. Notons  $R$  l'ensemble des points de  $P$  dont les affixes sont les racines du polynôme  $f$ . Si  $M$  est un point dont l'affixe  $r$  est une racine de  $f$ , alors

- soit  $r$  est également une racine de  $f$ , auquel cas  $M \in R \subset \mathcal{E}(R)$ ;
  - soit  $r$  n'est pas une racine de  $f$ , auquel cas  $M$  est un barycentre des points de  $R$  affectés de poids (strictement) positifs d'après la question précédente et donc  $M \in \mathcal{E}(R)$  en vertu de 1.2.
-