عنوان المحاضرة

مسائل النقل (حالة التدنئة)

تعتبر مسائل النقل من أهم التطبيقات البرمجة الخطية حيث تستخدم النماذج الخطية لمعالجة هذه المشكلة، و نهدف من خلالها للوصول إلى الأسلوب الأمثل لتوزيع الوحدات أو المنتجات المحصل عليها من مصادر عرض مختلفة (شركات، مصانع، مراكز .....)، إلى مواقع الطلب بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل زمن ...

يمكن استخدام طريقة السامبلاكس لحل مشكلة النقل، إلا أن هذه الطريقة تحتاج منا القيام بالعديد من الخطوات و العمليات الحسابية المعقدة، حيث أنه تم التغلب على هذه المشاكل من خلال ما نسميه بجدول النقل.

و قد كان هيتشكوك HITCHCOCK أول من وضع الصيغة الأولية لطريقة النقل في 1941، ثم جاءت مساهمة كوبمانز KOOPMANS.

1- جدول النقل:

يمكن التعبير عن الاطار العام لمشكلة النقل بالصيغة الجدولية التي تمثل مبدأ لإيجاد الحل الأولي الذي يمكننا من الوصول للحل النهائي و المتمثل في تحقيق أقل تكلفة ممكنة من اجمالي التكاليف.

يعبر عن الصيغة الجدولية لمشكلة النقل بالشكل المصفوفي حيث عدد صفوفها M، و التي تمثل المصادر (مراكز التوزيع)، و عدد أعمدتها N، و التي تمثل مراكز القبول و الاستلام.

كما هو موضح في الجدول التالي :

مراكز / مصادر	N1	N2	N3	.....	Nn	العرض
M1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	.....	C_{1n} X_{1n}	a1
M2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	.....	C_{2n} X_{2n}	a2
M3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	.....	C_{3n}	a3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Mm	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	.....	C_{mn} Xmn	a_m
الطلب	b1	b2	b3	.....	bn	

حيث : C_{ij} تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i الى المركز j.

X_{ij} تمثل عدد الوحدات المنقولة من المصدر i الى المركز j.

الفرضية الأساسية لمسألة النقل هي أن مجموع العرض مساوي لمجموع الطلب أي

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

و هذه الحالة نسميها بنموذج النقل المتوازن.

و يمكن صياغة النموذج الرياضي لمشاكل النقل كمايلي:

2-النموذج الرياضي لمسألة النقل:

أ- دالة الهدف بما أن الهدف هو تدنئة التكاليف بتكون دالة الهدف :

$$\text{MinZ}=\sum_{i=1,j=1}^{m,n} C_{ij}X_{ij}$$

ب- القيود الاضافية :

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$X_{ij}, C_{ij} \geq 0$$

2- حل مشكلة النقل:

بعد اعداد الصيغة الجدولية لمشكلة النقل نبحث عن الحل الأساسي أو الأولي، وهناك ثلاث طرق يمكن استخدامها:

- ✓ طريقة الزاوية الشمالية الغربية؛
- ✓ طريقة أقل التكاليف؛
- ✓ طريقة فوجل.

ثم بعد الحصول على الحل الأساسي يتم التحقق ما إذا كان هذا الحل هو الأمثل عن طريقة اجراء اختبارات :

- طريقة التخطي (المسار المتعرج، الحجر المتنقل)؛
- طريقة التوزيع المعدل.

1-2 الحصول على الحل الأساسي:

إن أول مرحلة في الحصول على الحل الأساسي الأولي هي ايجاد مجموعة الحلول الأساسية المقبولة و المعبر عنها بالمعادلة (m+n-1)، فإذا كان لدينا مثلا 3 معادلات تعكس الطلب و 4 معادلات تعكس العرض تكون مجموعة الحلول الممكنة (6=3+4-1).

2-2 طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الطرق للوصول إلى الحل الأساسي الأولي و تقوم هذه الطريقة على البدأ في التوزيع من المصادر إلى المراكز، فإننا نبدأ بالخانة (1.1)، و نعطيها أكبر قيمة ممكنة و هذه القيمة تكون مقيدة بأصغر قيمة بين عرض المصدر 1 و طلب المركز 1 أي Min (S1.D1) .

و عند الانتقال إلى الخانة 2 نكون أمام حالتين:

- اما ان المصدر الأول قد نقل كل ما لديه و المركز الأول لم يتلقى كامل الطلب، و بالتالي هو بحاجة إلى اكمال النقص من مصدر آخر، و عليه ننتقل إلى السطر الثاني للنقطة (2.1).و نعطيه أكبر قيمة ممكنة مع مراعات القيم الهامشية.
- إما أن المركز الأول قد حصل على كل ما يحتاج إليه و المصدر الأول لم يتخلص من كل ما لديه من المعروض و بالتالي يجب عليه توجيه الفائض إلى مركز آخر، و عليه التنقل يكون نحو العمود التالي للنقطة (1.2)، و تخصص لها أكبر قيمة ممكنة مع المحافظة على المتطلبات الهامشية.

مثال: (مولاي بوعلام، محاضرات و تطبيقات في بحث العمليات، جامعة البويرة،2017/2016)

تحوي احدى المؤسسات الانتاجية على ثلاث مخازن في مواقع مختلفة كما أن لها ثلاث مراكز توزيع، كانت تكاليف النقل للوحدة الواحدة من السلع و حجم التخزين في كل مخزن و الاحتياجات لكل مركز توزيع مبينة في الجدول التالي :

مراكز / مصادر	D1	D2	D3	العرض
A	31 300	21 100	42	400
B	20	21 800	30 200	1000
C	23	20	15 600	600
الطلب	300	900	800	2000 / 2000

- نبدأ بأول خانة (1.1) و نلاحظ أن أقل قيمة بين الطلب و العرض هي 300 و بالتالي يمكن للمصدر A أن يمنح المركز D1 300 وحدة ، و بالتالي يتم تلبية طلبية المركز D1.
- ننتقل إلى المركز D2، تقدر طلبيته بـ 900 وحدة و تبقى في المصدر A 100 وحدة يمنحها له.
- ثم ننتقل إلى المصدر Bو الذي يحوي 1000 وحدة فيمنح 800 وحدة المتبقية لطلبية D2. و بالتالي يتم تلبيه طلبية D2.
- ثم ننتقل إلى المركز D3، الذي تقدر طلبيته بـ 800 وحدة يتحصل على 200 وحدة من المصدر B، و 600 وحدة من المصدر C .

نلاحظ بعد عمليات النقل أن الجدول في توازن $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

و أيضا عدد الخلايا المملوءة خمسة خلايا و هي تساوي عدد الحلول الممكنة (3+3-1).

و التكلفة الاجمالية للنقل :

$$Z=\sum_{i=1,j=1}^{m,n} C_{ij}X_{ij}=(31*300)+(21*100)+(21*800)+(30*200)+(15*600)$$

$$=43200$$

3-2 اختبار أمثلية الحل :

إن الحل الأساسي المتوصل إليه هو حل أولي و قد لا يكون هو الحل الامثل للمسألة.

و لمعرفة ما إذا كان هذا الحل هو الذي يؤدي بنا إلى حل المسألة نستخدم طريقتين:

أ/ طريقة التخطي :

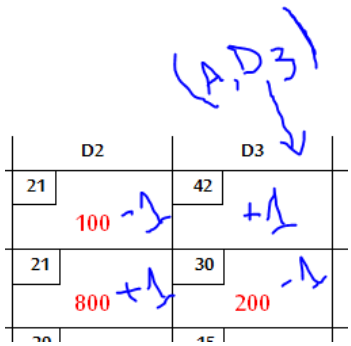
حيث تقوم من خلال هذه الطريقة بالتعامل مع الخلايا غير الداخلة في الحل و التي من المرجح أنها تقوم بتدنئة التكاليف الكلية عند ادخالها للحل الاساسي، و عليه يجب علينا ايجاد قيم التكاليف الحدية (تكلفة الوحدة الواحدة) لكل خلية غير داخلة في الحل.

مثال : في المثال السابق كان جدول الحل الاساسي

	D1	D2	D3	العرض
A	31 / 300	21 / 100	42	400
B	20	21 / 800	30 / 200	1000
C	23	20	15 / 600	600
الطلب	300	900	800	2000 / 2000

نبدأ بالخلية A .D3 إذا مررنا وحدة واحدة عبرها يختل التوازن و نعدله بإضافة و طرح (+-1)

و يكون بالشكل الموالي :



$\delta = (1*42)+(-1*21)+(1*21)+(-1*30) = 12$

δ: التكلفة الحدية

بنفس الطريقة نستمر مع الخلايا الفارغة :

الخلية B.D1 : $\delta = 20 - 31 + 21 - 21 = -11$

الخلية C.D1 : $\delta = 23 - 31 + 21 - 21 + 30 - 15 = 7$

الخلية C.D2 : $\delta = 20 - 21 + 30 - 15 = 14$

نلاحظ أن هناك تكلفة حدية سالبة، و منه الحل الاساسي لا يعتبر الامثل و هناك مسار يغطي تكلفة أقل، و بالتالي نحسن النموذج عبر ادخال الخلية التي تحوي اقل تكلفة و هي الخلية B.D1.

و نقوم بإضافة أو طرح أقل قيمة متواجدة في الزوايا السالبة.

و في المثال السابق:

	D1	D2
A	31 -Λ 0 ~~300~~	21 400 Λ ~~100~~ ×
B	20 +Λ 300	21 500 -Λ ~~800~~

و منه يصبح النموذج المصحح بعد ادخال الخلية B.D1:

	D1	D2	D3	العرض
A	31	21 400	42	400
B	20 300	21 500	30 200	1000
C	23	20	15 600	600
الطلب	300	900	800	2000 / 2000

بنفس الطريقة السابقة نتحقق من أمثلية الحل :

الخلية A.D1 : $\delta = 31 - 21 + 21 - 20 = 11$

الخلية A.D3 : $\delta = 42 - 30 + 21 - 21 = 12$

الخلية C.D1 : $\delta = 23 - 20 + 30 - 15 = 18$

الخلية C.D2 : $\delta = 20 - 21 + 30 - 15 = 14$

و عليه كل التكاليف الحدية موجبة و بالتالي نقبل بهذا الحل على أنه الامثل.

و من الملاحظ أن التكاليف ستنخفض بمقدار $\delta_{2.1} * 300 = 11 \times 300 = 3300$

$$39900 = 3300 - 42300$$

و بحساب التكلفة الاجمالية من خلال الحل الامثل نجد :

$$Z = \sum_{i=1,j=1}^{m,n} C_{ij} X_{ij} = (21*400)+(20*300)+(21*500)+(30*200)+(15*600)$$

$$= 39900$$

ب/ طريقة التوزيع المعدل:

تقوم هذه الطريقة على فروض أن Vj تعبر عن الأعمدة (المراكز) و Ui تعبر عن الأسطر (المصادر) و تنقسم هذه الطريقة إلى مرحلتين:

- مرحلة أولى نتعامل فيها مع القيم الداخلة في الحل الأساسي و نبدأ في حل المعادلات $U_i+V_j=C_{ij}$ مع اعتبار أن Ui لأول معادلة مساوي لـ صفر 0. ثم نجد قيم Ui، Vj الداخلة في الحل.
- و في المرحلة الثانية نتعامل مع القيم الخارجة من الحل الأساسي و نجد القيم الحدية حيث نعبر عنها بالعلاقة : $\delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

و في المثال السابق :

$U_1 + V_1 = 31 \rightarrow U_1 = 0 . V_1 = 31$

$U_1 + V_2 = 21 \rightarrow V_2 = 21 .$

$U_2 + V_2 = 21 \rightarrow U_2 = 0 .$

$U_2 + V_3 = 30 \rightarrow V_3 = 30 .$

$U_3 + V_3 = 15 \rightarrow U_3 = -15 .$

δ	$\delta_{IJ} = C_{ij} - U_i - V_j$	$U_i . V_j$
12	42- 0 - 30	$U_1 . V_3$
-11	20- 0 - 31	$U_2 . V_1$
7	23 - (-15) -31	$U_3 . V_1$
14	20 - (-15) - 21	$U_3 . V_2$

ونلاحظ أن هناك قيمة حدية سالبة أي لا يعتبر هذا الحل الامثل و نقوم بتعديل النموذج بنفس طريقة التخطي ثم نختبر بنفس الطريقة أمثلية الحل إلى أن نصل إلى ان جميع القيم الحدية موجبة لكي نقبل أمثلية الحل عندئذ.

4-2 طريقة اقل تكلفة :

و هي من خلال تسميتها تعتمد على البدأ بملأ الخلايا انطلاقا من تتبع اقل التكاليف حيث نبدأ من الخلية التي تحمل أقل تكلفة و نقوم بتعبئتها كما رأينا في طريقة الزاوية الشمالية الغربية قم ننتقل إلى الخلية التي تحمل التكلفة الأعلى منها و هكذا إلى أن نتم الجدول، و من الملاحظ أنه في حالة تساوي تكلفتين عادة نقوم بالاختيار العشوائي و لكن نصطلح في هذه الحالة على تعبئة الخلية التي تعطيني أكبر قيمة منقولة.

و المثال الموالي يوضح ذلك :

	N1	N2	N3	العرض
M1	3	2	4	25
M2	1	4	3	30
M3	4	2	5	35
الطلب	20	50	20	90 / 90

	N1	N2	N3	العرض
M1	3	2 15	4 10	25
M2	1 20	4	3 10	30
M3	4	2 35	5	35
الطلب	20	50	20	90 / 90

و بنفس الطرق السابقة يمكننا التأكد من أمثلية الحل.

5-2 طريقة فوجل :

و تسمى أيضا بطريقة الفروقات، حيث تقوم هذه الطريقة على ايجاد الحل الأولي عبر تحديد الفرق بين أقل تكلفتين أفقيا و عموديا، حيث يطلق على هذه الفروقات (أرقام فوجل)، ثم نختار أكبر رقم من الفروقات سواء في السطر أو العمود ثم نختار التكلفة الأقل المقابلة لهذا السطر أو العمود مع وجود ملاحظة أنه في حال تساوي أكثر من سطر أو عمود في القيمة الكبرى للفروقات نختار السطر أو العمود الذي يحتوي على تكلفة أقل.

ثم في المرحلة الموالية نملأ هذه الخانة (التي تحوي أقل تكلفة) ثم نعيد نفس الكرة مع الفروقات الثانية و الثالثة إلى غاية الوصول إلى الحل الأولي.

و بالعمل بالمثال السابق نجد الحل الأولي باستخدام طريقة فوجل كمايلي :

	N1	N2	N3	العرض	Δ_1	Δ_2	Δ_3
M1	3	2 15	4 10	25	1	2	2
M2	1 20	4	3 10	30	2	1	1
M3	4	2 35	5	35	2	3	
الطلب	20	50	20	90			
Δ_1	2	2	1				
Δ_2		2	1				
Δ_3		2	1				
Δ_4			1				

و بنفس الطرق السابقة نتحقق من أمثلية الحل إما باستخدام طريقة التخطي أو باستخدام طريقة التوزيع المعدل.

المصادر المعتمدة:

- محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية،الجزائر،2006،
- علي مكيد، بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية، الجزء2، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2016.
- مولاي بوعلام، محاضرات و تطبيقات في بحث العمليات، جامعة البويرة،2017/2016