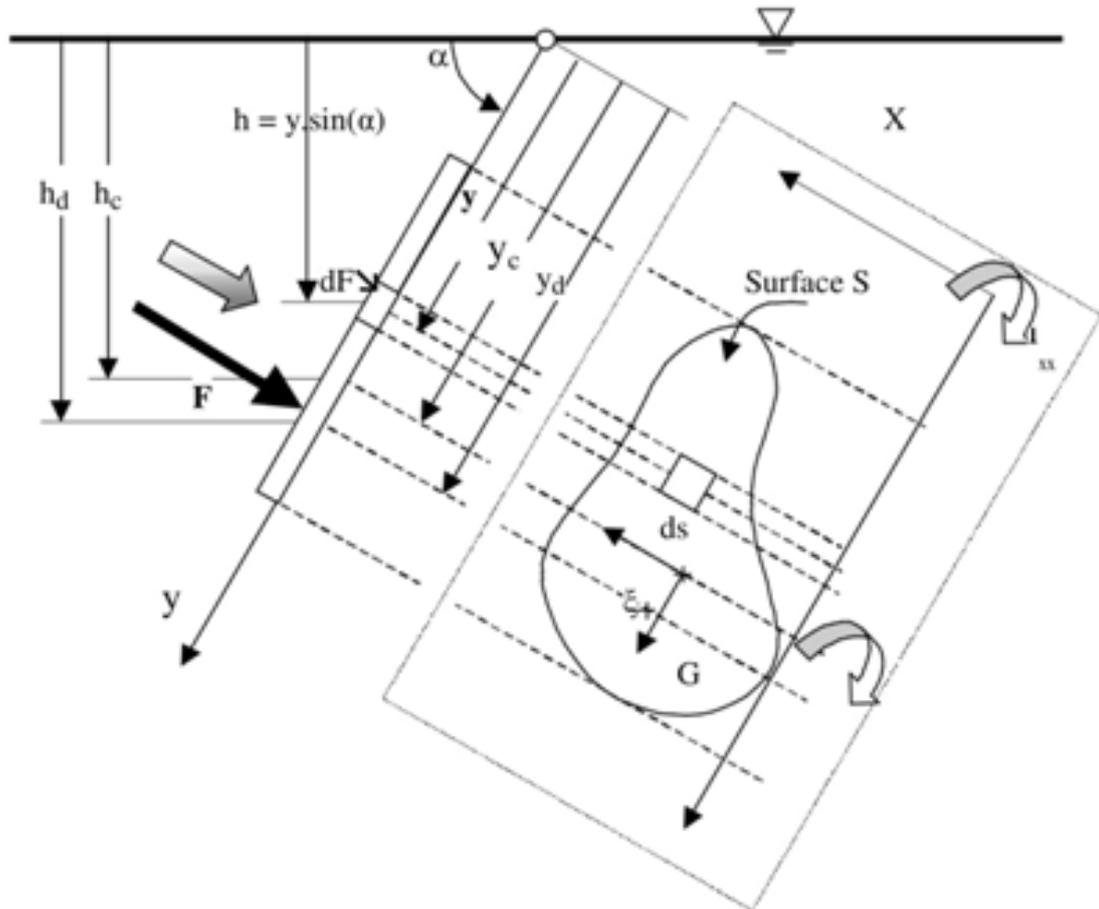


Forces de pression agissant sur les parois

1- Force de pression agissant sur une paroi plane :

Prenons le cas général d'une paroi plane de forme arbitraire, inclinée d'un angle quelconque α par rapport à l'horizontale avec une surface S



En choisissant une aire infiniment petite ds à la profondeur h , déterminons la force élémentaire dF qui agit sur ds :

$$dF = P \cdot ds = (P_0 + \gamma h) \cdot ds = P_0 \cdot ds + \gamma h \cdot ds \quad (\gamma = \rho \cdot g)$$

P_0 : Pression agissant sur la surface libre (généralement c'est la P_{atm})

$$h = y \cdot \sin \alpha \quad (y : \text{coordonnée du centre de l'aire } ds)$$

Afin de déterminer la force latérale totale (la résultante F) on intègre suivant S :

$$F = P_0 \cdot \int ds + \gamma \int h ds = P_0 \cdot S + \gamma \sin \alpha \int y ds$$

$\int y ds = y_c \cdot S$: C'est le moment statique de la surface S par rapport à l'axe OX, il est égale au produit de la surface par la coordonnée de son centre de gravité (point c).

Par conséquent on a :

$$F = P_o.S + \gamma \sin \alpha \cdot y_c \cdot S = P_o.S + \gamma \cdot h_c \cdot S \quad (h_c = \sin \alpha \cdot y_c)$$

donc : $F = (P_o + \gamma \cdot h_c) \cdot S$

qui signifie que : « La pression totale d'un liquide sur une paroi plane est égale au produit de l'aire de la paroi par la pression hydrostatique au centre de gravité de cette surface ».

au cas où la pression $P_0 = P_{atm}$, la force effective qui agit sur une paroi plane est égale à :

$$F_R = \gamma \cdot h_c \cdot S \quad (\gamma = \rho \cdot g)$$

Point d'application de la force de pression agissant sur une paroi plane :

Pour déterminer ce point d'application, appliquons l'équation des moments qui stipule que : « le moment de la résultante par rapport à un axe quelconque est égale à la somme des moments des forces composantes ».

Dans notre cas : $F_r \cdot y_d = \int y dF$

Nous savons que $F = \gamma \cdot h_c \cdot S$ ou $F = \gamma \cdot y_c \sin \alpha \cdot S$

et $\int y dF = \int \gamma \cdot \sin \alpha \cdot y \cdot y \cdot ds = \gamma \cdot \sin \alpha \int y^2 ds$ (car $h = y \sin \alpha$)

où $\int y^2 ds = I_x =$ le moment d'inertie de la surface S par rapport à Ox

donc

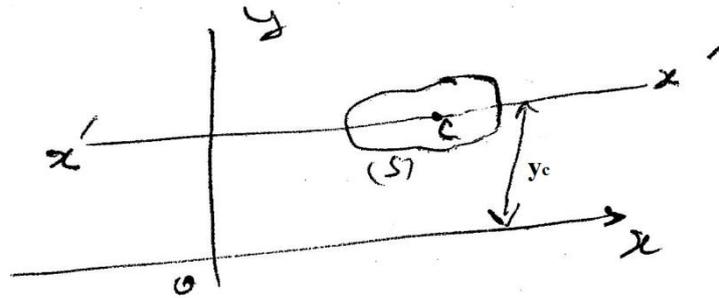
$$\gamma \cdot y_c \sin \alpha \cdot S \cdot y_d = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot I_x \quad \rightarrow \rightarrow y_d = \frac{\gamma \cdot \sin \alpha \cdot I_x}{\gamma \cdot y_c \sin \alpha \cdot S}$$

$$\text{donc } y_d = \frac{I_x}{y_c \cdot S}$$

En tenant compte du thèème de Huyghens $I_x = I_{x_0} + y_c^2 \cdot S$

« Le moment d'inertie de S par rapport à OX est égale au moment d'inertie de S par rapport à un axe passant par son centre de gravité augmenté du produit de cette surface par le carré de la distance à OX de son centre de gravité»

où I_{x_0} : Moment d'inertie de la surface S par rapport à l'axe parallèle à l'axe Ox et qui passe par le centre de gravité de cette surface.



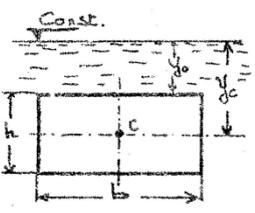
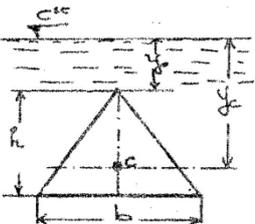
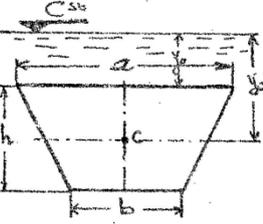
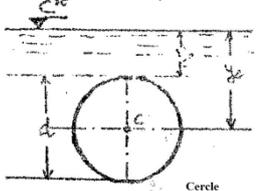
On a finalement : $y_d = y_c + \frac{I_{x_0}}{y_c \cdot S}$ ou bien $h_d = h_c + \frac{I_0}{hc \cdot \check{s}}$

\check{s} : projection verticale de la paroi considérée

I_0 : Moment d'inertie de la surface \check{w} par rapport à l'axe Ox et qui passe par le centre de gravité de cette surface.

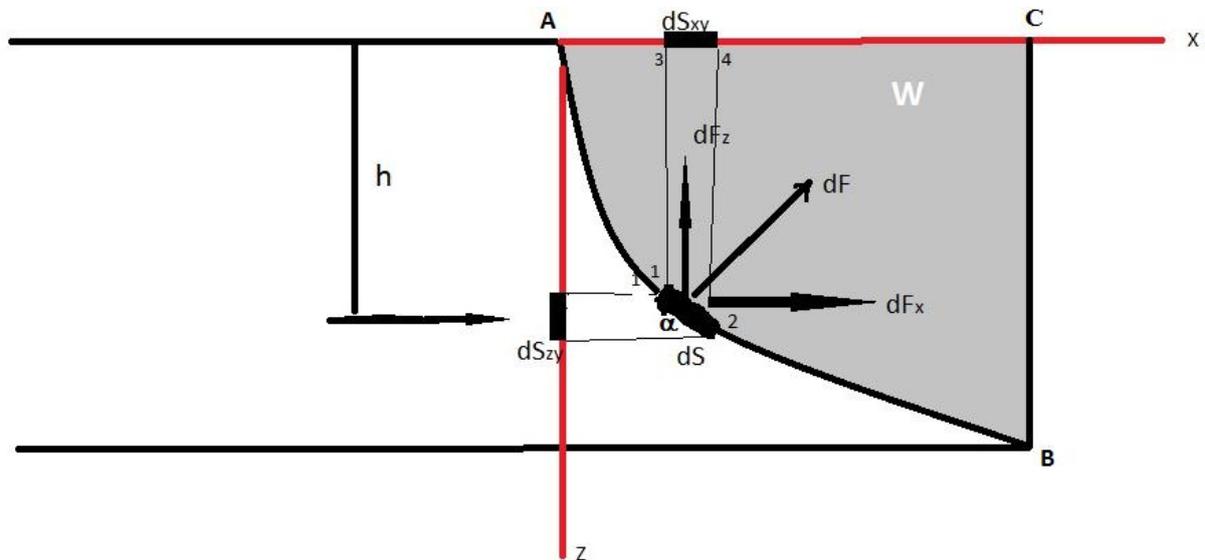
On remarque bien que le point d'application est plus bas que le centre de gravité de la surface de la paroi. La distance entre ces deux points est: $h_{dc} = \frac{I_0}{hc \cdot \check{s}}$

Voici les moments d'inertie de quelques formes usuelles :

Figures	Moment d'inertie I_0	y_c	Surface S
 <p>Rectangle</p>	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$y_0 + \frac{h}{2}$	$b \cdot h$
 <p>Triangle</p>	$\frac{b \cdot h^3}{36}$	$y_0 + \frac{2}{3} \cdot h$	$\frac{b \cdot h}{2}$
 <p>Trapèze</p>	$\frac{h^3 (a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)}$	$y_0 + \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$	$\frac{h(a+b)}{2}$
 <p>Cercle</p>	$\frac{\pi d^4}{64}$	$y_0 + \frac{d}{2}$	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$

2- Force de pression hydrostatique agissant sur des parois curvilignes
 (courbes: cylindriques, sphériques...)

Soit AB une paroi curviligne (cylindrique par exemple), penons une aire élémentaire dS qu'on décompose en dS_{xy} et dS_{zy}



On a : $\cos \alpha = dS_{xy}/dS$ et $\sin \alpha = dS_{zy}/dS$

La force élémentaire agissant sur l'aire dS est égale : $dF = \gamma h \cdot dS$ ($\gamma = \rho \cdot g$)

Où h : la profondeur à laquelle se trouve le centre de gravité de l'aire ds

Décomposons la force dF en dF_x et dF_z , nous obtenons :

$$dF_x = dF \cdot \sin \alpha = \gamma \cdot h \cdot dS \sin \alpha$$

$$dF_z = dF \cdot \cos \alpha = \gamma \cdot h \cdot dS \cos \alpha$$

α : l'angle d'inclinaison de l'aire ds par rapport à l'horizontale.

De ce fait on a :

$$dS \sin \alpha = dS_{zy} \quad dS_{zy} : \text{Projection de } dS \text{ sur le plan ZOY}$$

$$dS \cos \alpha = dS_{xy} \quad dS_{xy} : \text{Projection de } dS \text{ sur le plan XOY}$$

donc

$$dF_x = \gamma \cdot h \cdot dS_{zy} \quad \gggggggg \gg F_x = \gamma \int h dS_{zy} = \gamma \cdot h_c \cdot S_{zy}$$

$$dF_z = \gamma \cdot h \cdot dS_{xy} \ggggggggg F_z = \gamma \int h dS_{xy} = \gamma \int dW = \gamma \cdot W$$

car : $\int h dS_{zy} = h_c \cdot S_{zy} =$ **moment statique de la surface S_{zy} P/R à l'axe OY.**

h_c : profondeur du centre de gravité de la projection verticale S_{zy} de la paroi cylindrique considérée AB .

$dW = h \cdot dS_{xy} =$ volume élémentaire du prisme 1.2.3.4 (voir schéma)

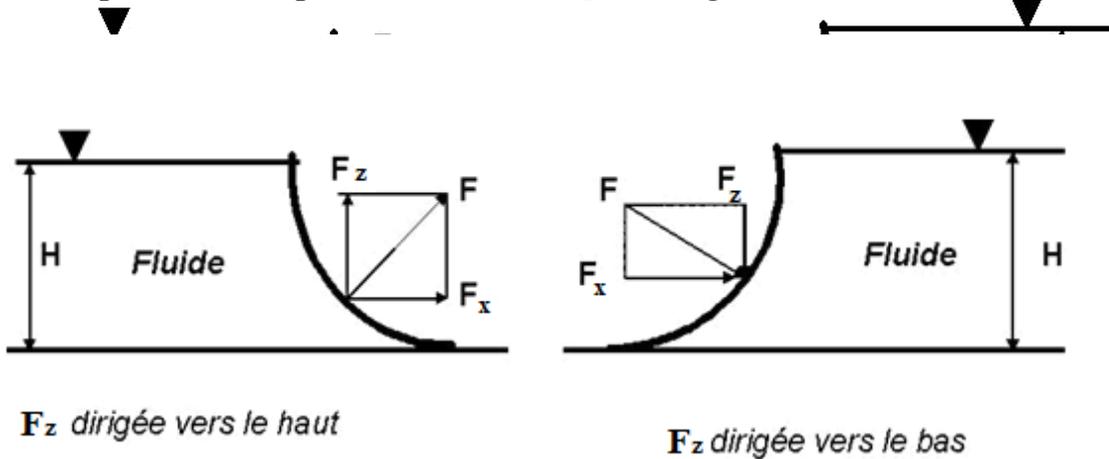
donc :

$$F_x = \gamma \cdot h_c \cdot S_{zy} \quad \text{et} \quad F_z = \gamma \cdot W$$

La composante verticale F_z de la force de pression agissant sur une paroi cylindrique AB est égale au produit du poids spécifique du liquide considéré par le W du prisme ABC (voir schéma)

Il y a une règle simple qui permet de déterminer le volume de pression W : « **Le volume de pression W est le volume qui se trouve entre la paroi cylindrique considérée et les plans verticaux tracés à partir des bouts de cette paroi et le plan piézométrique (en gris dans le schéma)** »

- Au cas où le volume de pression W est construit sur la surface non mouillée de la paroi, la composante verticale F_z est dirigée vers le haut.
- Au cas où le volume de pression W est construit sur la surface mouillée de la paroi, la composante verticale F_z est dirigée vers le bas.



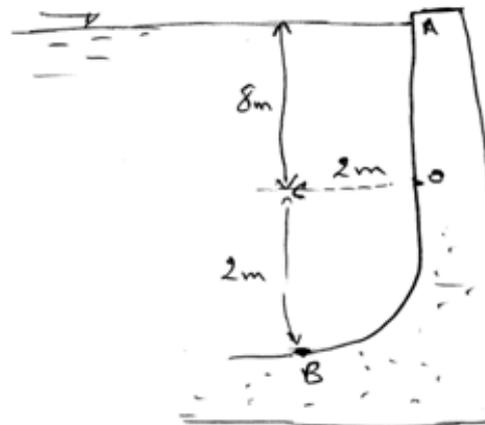
Après avoir trouvé les composantes horizontale et verticale (F_x et F_z), il est facile de déterminer la force totale :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$$

TD2 : Calcul des forces hydrostatiques agissant sur des parois planes et curvilignes

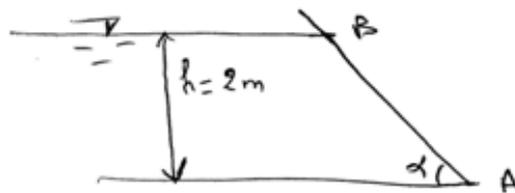
Exercice 1

- Un barrage est constitué d'une partie AO de 8m de hauteur et d'une partie circulaire OB de 2m de rayon.
1. Calculer l'action de l'eau (force hydrostatique) sur la surface AO .
 2. Calculer l'action de l'eau sur la surface OB .
 3. Déterminer la force globale exercée par l'eau sur le barrage ($b = 1\text{m} = \text{largeur}$)



Exercice 2

- Déterminer la force hydrostatique exercée sur la paroi inclinée AB et le moment de cette force P/R au point A . Quelle serait la valeur du poids de la vanne si on veut la maintenir stable?
- La largeur de la vanne AB est $b = 0,8\text{m}$, $h = 2\text{m}$, $\alpha = 45^\circ$

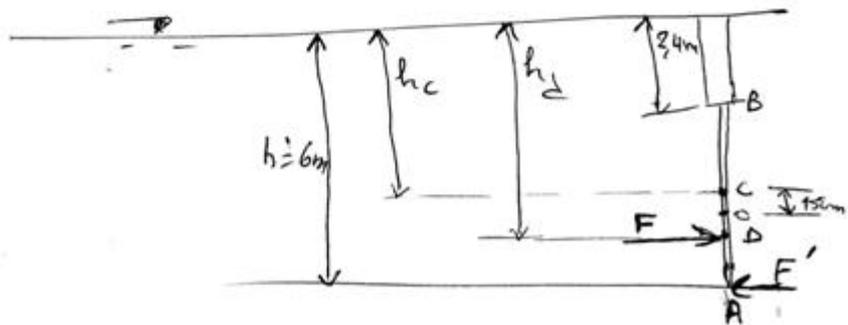


Exercice 3 :

On demande de montrer que la force de pression hydrostatique agit sur une paroi AB verticale rectangulaire de profondeur h et de largeur unité ($b=1$) est égale à $\gamma \frac{h^2}{2}$ et que son point d'application est situé à $\frac{2}{3}h$.

Exercice 4 :

Une porte AB de 3,6 m de haut et de 1,50 m de large est placée verticalement et pivote autour d'un point situé à 15 cm au dessous de son centre de gravité. La profondeur totale de l'eau est de 6 m. Quelle force horizontale F doit être appliquée au bas de la porte pour qu'elle reste en équilibre?



Solution:

Exercice 1.

1- $F_1 = \gamma h_{c1} S_1$ - sur la paroi plane AO

$$S_1 = a \times b = 8 \times 1 = 8 \text{ m}^2$$

$$h_{c1} = \frac{1}{2} OA = \frac{8}{2} = 4 \text{ m}$$

$$\Rightarrow F_1 = 1000 \times 4 \times 8 = 32000 \text{ kgf}$$

$$h_d = h_{c1} + \frac{I_{01}}{h_{c1} S_1} \quad \left(\begin{array}{l} I_{01} = \frac{b \cdot OA^3}{12} = \frac{1 \times 8^3}{12} \\ = 42,66 \text{ m}^4 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow h_d = 5,33 \text{ m}$$

2. Paroi courbe OB.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$$

$$F_x = \gamma h_{c2} S_2 \quad (h_{c2} = AO + \frac{1}{2} R = 8 + 1 = 9 \text{ m})$$

$$= 1000 \times 9 \times 2 \quad S_2 = 2 \text{ m} \times 1 = 2 \text{ m}^2$$

$$F_x = 18000 \text{ kgf}$$

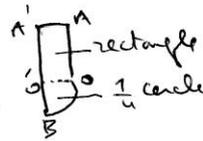
$$h_{d2} = h_{c2} + \frac{I_{02}}{h_{c2} S_2} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_{02} = \frac{1 \times 2^3}{12} \\ h_{c2} = 9 \text{ m} \\ S = 2 \text{ m}^2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow h_{d2} = 9,037 \text{ m}$$

$$F_z = \gamma W \quad \left(W = \frac{1}{4} \text{ Cercle} + \text{rectangle } OAA'O \right)$$

$$= \frac{1}{4} (\pi R^2 \times b) + (8 \times 2 \times b)$$

$$R = 2 \text{ m}, \quad b = 1 \text{ m}$$



$$\Rightarrow F_z = 19140 \text{ kgf}$$

$$\Rightarrow F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} \Rightarrow F = 26274,31 \text{ kgf}$$

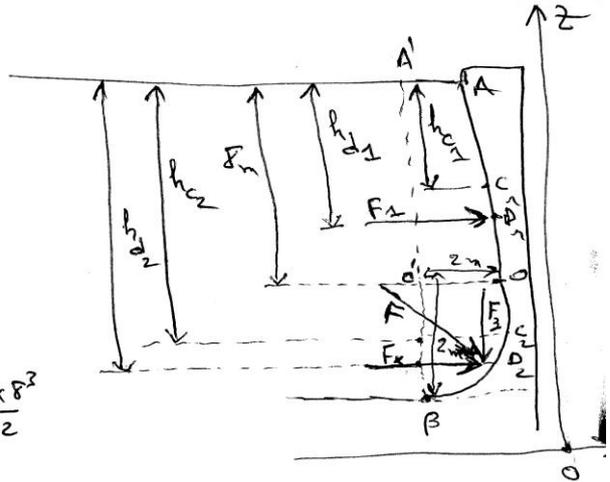
$$\tan \theta = \frac{F_z}{F_x} = 1,06 \Rightarrow \theta = \arctan \frac{F_z}{F_x} = 46,8^\circ$$

Si force globale du barrage ?

- Par rapport à OX: $F_x = F_1 + F_x = 32000 + 18000 = 50000 \text{ kgf}$ (F_z n'existe pas ($F_{z1}, F_{z2} = 0$))

- Par rapport à OZ: $F_z = F_{z1} - F_{z2} = 0 - 19140 = -19140 \text{ kgf}$

Donc force globale: $F_{\text{globale}} = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{50000^2 + 19140^2} = 53538,20 \text{ kgf}$



exercice : $h=2, \alpha=45^\circ, b=0,8m$

$F = \gamma h_c S$

$S = AB \times b$

$\sin \alpha = \frac{h}{AB} \Rightarrow AB = \frac{h}{\sin \alpha} = 2,82m$

$\Rightarrow S = 2,82 \times 0,8 = 2,256m^2$

$\sin \alpha = \frac{h_c}{BC} \Rightarrow h_c = BC \sin \alpha = \frac{AB \sin \alpha}{2} = 1m$

$\Rightarrow F = 1000 \times 1 \times 2,256 = 2256 kgf$

$h_d ?$

$\sin \alpha = \frac{h_d}{y_d} \Rightarrow h_d = y_d \sin \alpha$

$y_d = y_c + \frac{I_0}{y_c S} = \frac{AB}{2} + \frac{\frac{b AB^3}{12}}{\frac{AB}{2} (AB \times b)} \quad (y_d = BD)$
 $= 1,88m$

$\Rightarrow h_d = 1,33m$

2° / Moment / A : $\sum M_{F/A} = \sum M_{G/A} \Leftrightarrow \boxed{F \cdot AD = G \times AM} \Rightarrow G = \frac{F \cdot AD}{AM}$

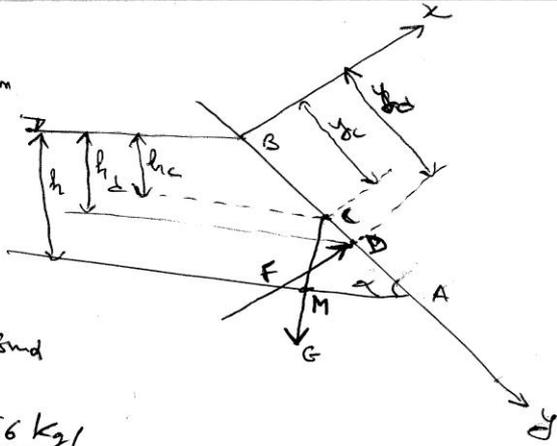
$F = 2256 kgf$

$AD = (AB - BD) = (2,82 - 1,88)$
 $= AB - y_d =$

$\Rightarrow M_{F/A} = F \cdot AD = 2256 (2,82 - 1,88)$
 $= 2120,64 kg \cdot m$

$M_{G/A} = G \cdot AM$ ($\cos \alpha = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AM = AC \cos \alpha = \frac{AB}{2} \cos \alpha = 0,997 \approx 1m$)

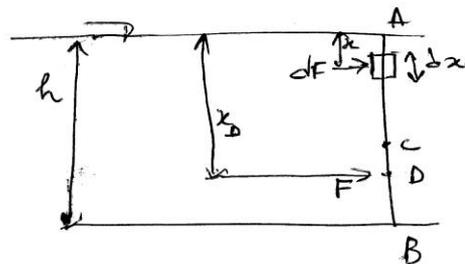
à la stabilité :
 donc $G = \frac{F \cdot AD}{AM} = 2120,64 kgf$



Exercice 3 :

Correction TD 2-3

1. Prenons un elt de surface ds
de la paroi AB à une profondeur x .
on a $ds = dx \cdot b = dx$ ($b=1$)



on a $dF = \gamma x ds = \gamma x dx$

$$\Rightarrow F = \int_{(S)} dF = \int_0^h \gamma x dx = \gamma \int_0^h x dx = \gamma \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^h$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \gamma \frac{h^2}{2}}$$

2/ x_D ? appliquons l'équation des moments

"le moment résultant = somme des moments partielles"

$$\text{donc } M_{\text{résultant}} = F \cdot x_D \quad \text{et} \quad \sum M_{\text{partielle}} = \int_0^h dF \cdot x$$

$$\sum M_{\text{partielle}} = \int_0^h \gamma x dx \cdot x = \int_0^h \gamma x^2 dx = \gamma \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \gamma \frac{h^3}{3}$$

d'où $F x_D = \sum M_{\text{partielle}} \Leftrightarrow F x_D = \gamma \frac{h^3}{3}$

$$\gamma \frac{h^2}{2} \times x_D = \gamma \frac{h^3}{3} \Rightarrow \boxed{x_D = \frac{2}{3} h}$$

Exercice 4

calcul de la force qui s'exerce sur AB
 $F = \gamma h_c S$ $\left\{ \begin{array}{l} S = AB \times b = 3,6 \times 1,5 = 5,4 \text{ m}^2 \\ h_c = 2,4 + \frac{3,6}{2} = 4,2 \text{ m} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow F = 1000 \times 4,2 \times 5,4 = 22680 \text{ kgf}$$

son pt d'application h_D ?

$$h_D = h_c + \frac{I_0}{h_c S} \quad \left\{ \begin{array}{l} I_0 = \frac{b \cdot AB^3}{12} \\ = \frac{1,5 \cdot 3,6^3}{12} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow h_D = 4,457 \text{ m}$$

condition pour que la porte reste en équilibre

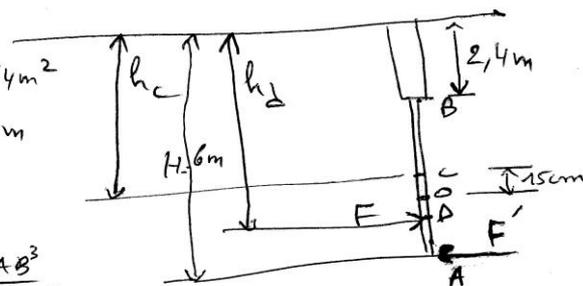
$$\sum F_0 = \sum F_0' \Leftrightarrow F \cdot OD = F' \cdot AO$$

$$OD = OA - OC = 0,257 - 0,15 = 0,107 \text{ m} \quad (OC = h_D - h_c)$$

$$OA = H - h_1 = 6 - 4,457 = 1,543$$

$$\Rightarrow F' = \frac{F \cdot OD}{AO}$$

$$\boxed{F' = 1572 \text{ kgf}}$$



Stabilité des corps flottants

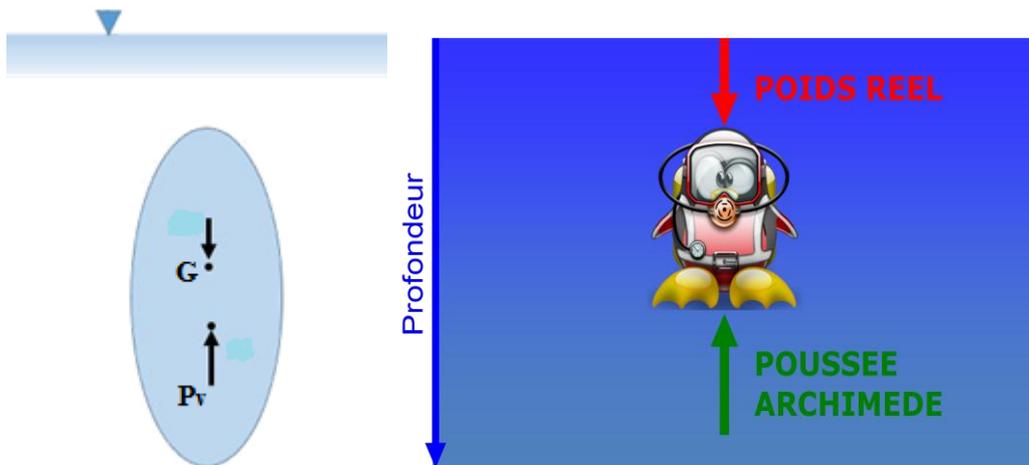
1. Principe d'Archimede (212 Av.Jc)

« Tout corps plongé dans un liquide subit de la part de ce dernier une **Poussée verticale** de bas en haut égale au poids du liquide déplacé ».

$$P_v = \gamma \cdot W \quad \text{où } W : \text{Volume du corps considéré}$$

γ : poids spécifique du liquide
 P_v : Poussée verticale

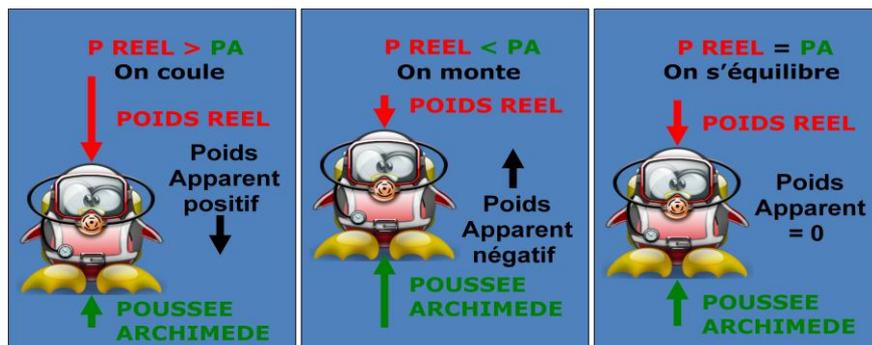
Le point d'application de cette poussée est appelé **le centre de carène**, il correspond au centre de gravité du volume plongé (carène).



2. Equilibre des corps flottants :

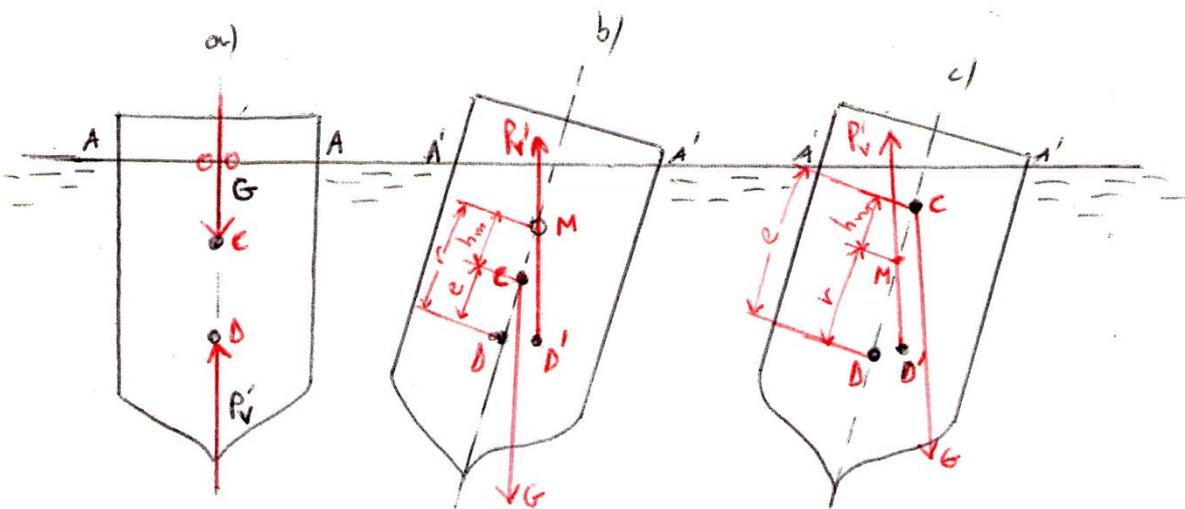
Suivant la position du poids du corps G et de la poussée verticale P_v trois cas sont possibles :

1. $G > P_v \rightarrow$ le corps coule
2. $G < P_v \rightarrow$ le corps émerge
3. $G = P_v \rightarrow$ le corps flotte



Pour qu'un corps flottant soit en équilibre, il faut en plus de l'égalité des forces $G = P_v$, que le moment total de ces forces soit égale à zéro. Cette dernière condition est respectée quand le centre de gravité du corps C se trouve sur la même verticale que le centre de carène D .

Un autre problème intéressant et important associé aux corps immergés ou flottants concerne la stabilité des corps. Un corps est dit être dans une position d'équilibre stable si, lorsqu'il est déplacé, il revient à sa position d'équilibre. À l'inverse, il se trouve dans une position d'équilibre instable si, lorsqu'il est légèrement déplacé, il se déplace dans une nouvelle position d'équilibre.



- 1- La ligne d'intersection de la surface libre du liquide avec la surface latérale du corps flottant est appelée ligne de flottaison (ligne AA et AA')
- 2- Le point d'intersection de la poussée verticale P_v avec l'axe de symétrie verticale du corps est appelé Métacentre (point M)
- 3- La distance entre le centre de carène D et le métacentre M est appelée **rayon métacentrique (r)**
- 4- La distance entre le centre de gravité C et le métacentre M est appelée **distance métacentrique (h_m)**
- 5- e est la distance entre C et D

➤ L'équilibre sera stable (fig b) au cas où $r > e$ ou $h_m > 0$

➤ L'équilibre sera instable (fig c) au cas où $r < e$ ou $h_m < 0$

Donc pour déterminer la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant il faut connaître la valeur du rayon métacentrique r .

On peut démontrer que le rayon métacentrique est égale à $r = \frac{I}{W}$

I = moment d'inertie (quadratique) de la surface du plan de flottaison S par rapport à l'axe d'inclinaison O.O (fig a) .

W = Volume de carène c-a-d volume de la partie du corps plongée dans le liquide.

TD 3 : Flottaison: Equilibre des corps flottants

Exercice 2

Une pierre pèse 54 kg à l'air et 24 kg quand elle est immergée dans l'eau. Calculer son volume et sa densité.

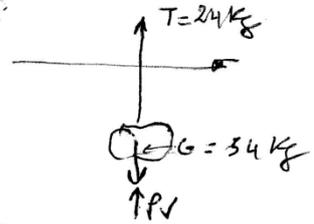
$$\sum F = 0 \Rightarrow G - T - P_V = 0$$

$$P_V = G - T = 54 - 24 = 30 \text{ kg}$$

$$P_V = \gamma W \Rightarrow W = \frac{P_V}{\gamma} = 0,03 \text{ m}^3$$

$$d = \frac{G}{P_V} = \frac{54}{30} = 1,8$$

$$G = mg = \rho_c W_c g = \gamma_c W_c = d \gamma W_c = d P_V \Rightarrow d = \frac{G}{P_V}$$



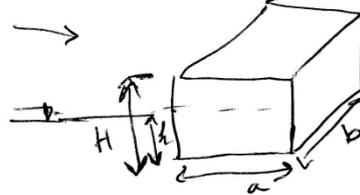
Exercice 2, Vérifier l'équilibre de

$$a = 2 \text{ m}$$

$$b = 8 \text{ m}$$

$$H = 0,8 \text{ m}$$

$$G = 7,84 \cdot 10^4 \text{ kg}$$



1/ h? profondeur de carene? (niveau d'eau)

$$G = P_V \Rightarrow G = \gamma W = \gamma h \cdot a \cdot b$$

$$h = \frac{G}{\gamma a b} = 0,50 \text{ m}$$

2/ le rayon métacentrique r?

$$r = \frac{I}{W} = \frac{b a^3}{12 h \cdot a \cdot b} = 0,65 \text{ m}$$

$$I = \frac{b a^3}{12}$$

$$W = h \cdot a \cdot b$$

3/ e? (distance entre CG c et centre de carene D)

$$e = \frac{H}{2} - \frac{h}{2} = 0,40 - 0,25 = 0,15 \text{ m}$$



4/ on a $r > e$ $0,65 > 0,15 \Rightarrow$ Equilibre et stable.

Exercice 3

Quelle est la fraction de volume d'un morceau de métal solide de densité 7,25 qui flotte en stabilité à la surface d'un récipient de mercure de densité 13,57?

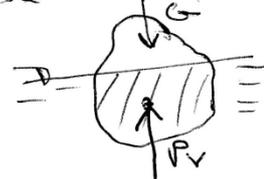
$$\sum F = 0 \Rightarrow G - P_V = 0 \Leftrightarrow G = P_V$$

Poids du corps = poussée (poids de mercure déplacé)

$$G = P_V \Leftrightarrow d \cdot W = d' \cdot W'$$

$$\text{Le rapport de volume } \frac{W'}{W} = \frac{7,25}{13,57} = 0,535$$

ainsi la fraction de volume située au dessus du mercure = $1 - 0,535 = 0,465$



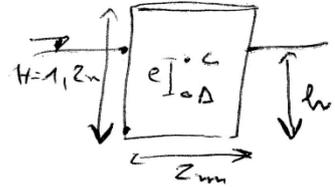
Exercice 4

Un cylindre plein homogène de 2m de diamètre et de 1,2m de long pèse 1884 Kg et flotte sur la surface de l'eau. On demande de vérifier son équilibre.

1. La profondeur de la carène h ?

$$G = P_V$$

$$G = \gamma W = \gamma h \pi r^2 \Rightarrow h = \frac{G}{\gamma \pi r^2} = 0,6 \text{ m.}$$



2. rayon métacentrique r^2

$$r = \frac{I}{W} = \frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\pi r^2 h} = \frac{\pi r^4}{4 \pi r^2 h} = \frac{r^2}{4h} = 0,4166 \text{ m}$$

3. La distance entre CG "c" et le centre de la carène "D", e ?

$$e = \frac{H}{2} - \frac{h}{2} = \frac{1,2}{2} - \frac{0,6}{2} = 0,3 \text{ m}$$

4. on a donc $r > e$ ($0,4166 > 0,3$) cela signifie que l'équilibre du cylindre est stable.

Exercice 5 :

on jette dans l'eau un objet en forme de poussoir de 20cm d'épaisseur, 20cm de large et 40cm de long à une profondeur de 50cm et on trouve 5Kg. Quelle est son poids dans l'air et sa densité ?

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow G - P_V - T = 0$$

$$G = P_V + T = 5 + P_V$$

$$P_V = P_{\text{poussoir}} = \rho \times \text{vol} = \rho \times \text{placé} = \gamma W$$

$$= 1000 (0,2 \times 0,2 \times 0,4) = 16 \text{ kg}$$

$$\text{donc } G = 5 + 16 = 21 \text{ kg}$$

$$\text{et } d = \frac{G}{P_V} = \frac{21}{16} = 1,31$$

