**Un exemple simple de structure en traction.**

On s'intéresse au système réticulé, représenté figure 1, formé de trois barres verticales identiques (longueur *l*), numérotées de 1 à 3, fixées à leur extrémité supérieure (points *A', B’* et *C'*) par des articulations sans frottement, et reliées entre elles en partie inférieure à un barreau *rigide,* les points *A, B* et *C* représentant également des articulations *sans frottement*. Les seules contraintes "généralisées" du système sont donc les efforts *N* , *i*1,2,3 *i* de *traction-compression* dans les barres. Le chargement est constitué d'une force verticale d'intensité *Q*, comptée positivement vers le bas, appliquée au point *D* milieu de *BC*, et croissant progressivement à partirde zéro (*Q:* 0) .

 **

Figure 1 : Calcul élastoplastique d'un système réticulé.

Les barres ont un comportement ***élastique parfaitement plastique*** schématisé par le diagramme

 ( ,) *i i N* de la figure 2. *S* désigne la section des barres, *E* le module d'Young du matériau constitutif, supposé homogène, et *L* la limite d'élasticité en traction-compression. Le tableau ci-dessous, homologue de celui de la figure 17 du chapitre 1, récapitule les différentes écritures de la loi de comportement élastoplastique pour la barre n°*i*. On observe en particulier que le principe du travail plastique maximal se traduit ici par le fait que la barre s’allonge (resp. se raccourcit) plastiquement lorsque la limite d’élasticité étant atteinte en traction (resp.compression), la valeur de l’effort est maintenue constante.

 



**1.1. Phase de comportement élastique**

Les équations permettant de mener à bien la résolution du problème sont classiquement :

***Les équations d'équilibre***, valables indépendamment de la loi de comportement des barres.

Elles résultent ici de l'équilibre global en *résultante* (verticale) et en *moment* (par exemple par rapport au point d’application de la charge) du barreau horizontal soumis à l'action de la charge ***Q*** et des efforts ***Ni***exercés par les barres. Soit immédiatement :



1. La relation de ***compatibilité géométrique*** entre allongements consiste ici tout simplement à exprimer que les points *A, B, C* restent alignés.



Elle permet, à travers les relations (2.2), de rajouter une troisième équation au système (2.1), dont

la résolution donne alors



le déplacement vertical *q* du point d’application du chargement valant dès lors :



Cette solution n'est valable que dans la mesure où le comportement des barres demeure

*purement élastique*, c'est-à-dire tant que ***N*3 *< L***, soit



***Qe***  représente la ***limite d'élasticité*** initiale de la structure. Elle correspond à la plastification en traction de la barre n°3. La réponse globale le la structure, représentée sous la forme d’une courbe donnant l’effort *Q* en fonction du déplacement *q* de son point d’application est représentée sur la

figure 3a, tandis que l’évolution correspondante des efforts des trois barres est donnée sur la

figure 3b.

***Figure 3 : Réponse de la structure en phase élastique et évolution des efforts dans les barres***

**1.2. Phase élastoplastique**

Poursuivant le chargement au-delà de la limite d'élasticité du système, on fait l'hypothèse de

travail, qu’il conviendra de vérifier *a posteriori****,*** que la ***barre n°*3 *reste plastifiée en traction***



Cette hypothèse nous permet alors de déterminer les efforts dans les deux autres barres à partir

des *équations d’équilibre* (2.1)) :



Le comportement des barres n°s 1 et 2 *restant élastique* il vient en vertu de (2.2)



d'où en tenant compte de la relation de *compatibilité géométrique* (2.3) :



Cette dernière relation montre que la loi de comportement de la barre n°3 et en particulier la ***règle d'écoulement plastique*** est bien vérifiée. En effet de façon générale, cette loi, exprimée en ***taux de variation***, s'écrit



Cette relation est bien vérifiée puisque d’après (2.10) :

 