المحتويات:

تعريف المصفوفة: هي عبارة عن جدول من الأعداد الحقيقية، ويسمى كل سطر من عناصر المصفوفة صفا (سطرا) ويسمى كل عمود من عناصر المصفوفة عمودا. لتكن $(a_{i,j})$ هي عناصر المصفوفة A فإننا نكتب:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{m,1} & & \cdots & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

ونقول أن المصفوفة A من الدرجة (m,n) حيث:

m : عدد الصفوف أو الأسطر. **n :** عدد الأعمدة.

العنصر (ai,j) يقع في السطر i والعمود j. **يرمز عادة** لهذه المصفوفة بالرمز: $A = (a_{i,j})$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{العمود الأول} & \text{العمود الثاني} & \text{العمود الثالث} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} -2 & 8 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{السطر الأول} \\ \leftarrow \text{السطر الثاني} \end{array} \end{array}$$

ملاحظات:

1. المصفوفة الصفية هي المصفوفة المكونة من صف واحد أي من الدرجة او الشكل (1,n) .
2. المصفوفة العمودية هي المصفوفة المكونة من عمود واحد أي من الدرجة او الشكل (m ,1) .
3. المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز (0).
4. نقول على مصفوفة مربعة أنها مصفوفة مثلثية علوية إذا كان كل عناصرها التي تقع أسفل القطر أصفارا.

المصفوفة المثلثية العليا:

وهي المصفوفة المربعة الشكل

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

5. نقول على مصفوفة مربعة أنها مصفوفة مثلثية سفلية إذا كان كل عناصرها التي تقع أعلى القطر أصفارا.

المصفوفة المثلثية الدنيا: هي المصفوفة المربعة من الشكل:

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال عددي :

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

B: مصفوفة مثلثية علوية. **C**: مصفوفة مثلثية سفلية.

6. المصفوفة القطرية هي المصفوفة المثلثية العلوية والمثلثية السفلية

مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. مصفوفة الوحدة أو المصفوفة الوحدوية هي التي عناصرها القطرية تساوي الواحد وبقية كل العناصر كلها أصفار ويرمز لها بالرمز I_n من الدرجة (n,n).

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. المصفوفة المتناظرة هي المصفوفة المربعة التي تكون عناصرها متناظرة بالنسبة للقطر الرئيسي($a_{i,j} = a_{i,j}$)

$$A=\begin{pmatrix} a & d & t \\ d & b & e \\ t & e & c \end{pmatrix}$$

9. **منقول مصفوفة**: للحصول على منقول المصفوفة نجعل الأسطر أعمدة والأعمدة أسطرا.

مثال عددى:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}_{(3,2)} \qquad A^T=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{(2,3)}$$

I. المصفوفات والعمليات عليها[1]:

1. مجموع مصفوفتين:

لتكن $A = (a_{i,j})$ و $B = (b_{i,j})$ مصفوفتين من الدرجة (m,n) نعرف المصفوفة:

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$$

وتسمى مصفوفة الجمع بين المصفوفة A و المصفوفة B.

مثال: لتكن المصفوفتين التاليتين من الشكل (من الدرجة 3*3)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

مثال : جمع مصفوفتين

لتكن A و B مصفوفتين من الدرجة 3×4 حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 9 & 7 & 9 \\ 18 & 12 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

حاصل مجموع مصفوفتين

2. طرح مصفوفتين:

لتكن $A = (a_{i,j})$ و $B = (b_{i,j})$ مصفوفتين من الدرجة (m,n) نعرف المصفوفة:

$$A - B = (a_{i,j} - b_{i,j})$$

وتسمى مصفوفة الجمع بين المصفوفة A و المصفوفة B.

[1] من الان وصاعدا سنعتمد على الامثلة العملية أي التطبيقية في الشرح وحل التمارين مع تذكير مبسط للمحاضرات.

مثال: لتكن المصفوفتين التالتين من الشكل(من الدرجة 3*3)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} \end{pmatrix}$$

3. الضرب بعدد حقيقي:

لتكن $A = (a_{i,j})$ مصفوفة من الدرجة أي الشكل (m,n) و α عدد حقيقي.

نعرف المصفوفة $\alpha A = (\alpha * a_{i,j})$ ، و تسمى مصفوفة ضرب المصفوفة A بالعدد الحقيقي α.

$$2\times\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\times 5 & 2\times 2 \\ 2\times 3 & 2\times 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

حاصل ضرب عدد حقيقي في مصفوفة

4. جداء المصفوفات :

لتكن $A = (a_{i,j})$ و $B = (b_{i,j})$ مصفوفتين من الدرجة (m,n) و (n,p) على الترتيب.

يكون الجداء A*B معرفا (ممكننا) إذا كان عدد أعمدة A مساويا لعدد أسطر (صفوف) المصفوفة B.

بفرض A*B = C حيث $C = (c_{i,j})$ فإن: $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$ $\qquad c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$

$$A*B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{23} \\ . & . & . & & \\ . & . & . & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & b_{23} \\ . & . & . & & \\ . & . & . & & \\ b_{n1} & b_{n2} & . & . & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & . & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & . & . & c_{2p} \\ . & . & . & & \\ . & . & . & & \\ c_{m1} & c_{m2} & . & . & c_{mp} \end{pmatrix}$$

حيث:

$$c_{11}=a_{11}*b_{11}+a_{12}*b_{21}+a_{13}*b_{31}+\dots+a_{1n}*b_{n1}$$

$$c_{1p}=a_{11}*b_{1p}+a_{12}*b_{2p}+a_{13}*b_{3p}+\dots+a_{1n}*b_{np}$$

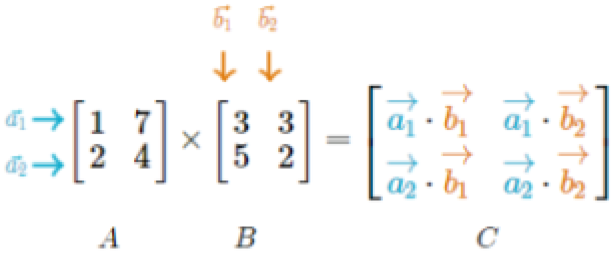
$$c_{21}=a_{21}*b_{11}+a_{22}*b_{21}+a_{23}*b_{31}+\dots+a_{2n}*b_{n1}$$

$$c_{m1}=a_{m1}*b_{11}+a_{m2}*b_{21}+a_{m3}*b_{31}+\dots+a_{mn}*b_{n1}$$

من أجل تبسيط الحسابات نأخذ المثال التالي:

شرط إمكانية ضرب المصفوفات:

$$(m*n)*(n*p)=(m*p)$$



طريقة الضرب في المصفوفات

$$\begin{bmatrix}1&7\\2&4\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}3&3\\5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1*3+7*5&1*3+7*2\\2*3+4*5&2*3+4*2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}38&17\\26&14\end{bmatrix}$$

مثال توضيحي بالرموز:

بفرض: $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

فيكون:

$$A * B = \begin{bmatrix} (a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31}) & (a_{11} \times b_{12} + a_{12} \times b_{22} + a_{13} \times b_{32}) \\ (a_{21} \times b_{11} + a_{22} \times b_{21} + a_{23} \times b_{31}) & (a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} + a_{23} \times b_{32}) \end{bmatrix}$$

مثال بالأرقام:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1) & (1 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 0) \\ (-1 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1) & (-1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

حل التمرين 04 من السلسلة رقم 01.

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&1&5\\2&-1&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&5\\-1&0&3\\1&4&2\end{pmatrix}$$

$$A*B=\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&1&5\\2&-1&4\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1&2&5\\-1&0&3\\1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&14&16\\8&28&33\\7&20&15\end{pmatrix}$$

$$B*A=\begin{pmatrix}1&2&5\\-1&0&3\\1&4&2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&1&5\\2&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21&-4&32\\3&-2&10\\23&1&30\end{pmatrix}$$

يتضح جليا أن: $A*B\neq B*A$

حل التمرين 05 من السلسلة رقم 01.

$$\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\\4&3\end{pmatrix}_{(3,2)}*\begin{pmatrix}-1&-1&2&3\\2&-1&4&1\end{pmatrix}_{(2,4)}$$

$$=\begin{pmatrix}3*(-1)+1*2&3*(-1)+1*(-1)&3*2+1*4&3*3+1*1\\2*(-1)+(-1)*2&2*(-1)+(-1)*(-1)&2*2+(-1)*4&2*3+(-1)*1\\4*(-1)+3*2&4*(-1)+3*(-1)&4*2+3*4&4*3+3*1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-4&10&10\\-4&-1&0&5\\2&-7&20&15\end{pmatrix}_{(3,4)}$$

$$\begin{pmatrix}-1&2&3\\1&0&4\\2&-1&3\end{pmatrix}_{(3,3)}*\begin{pmatrix}1&5&3&-1\\2&1&4&2\\1&0&1&1\end{pmatrix}_{(3,4)}=\begin{pmatrix}6&-3&8&8\\5&5&7&3\\3&9&5&-1\end{pmatrix}_{(3,4)}$$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&2\\3&-1&4\\1&3&2\end{pmatrix}_{(3,3)}*\begin{pmatrix}-1&4\\3&-1\\2&1\end{pmatrix}_{(3,2)}=\begin{pmatrix}2&-1\\2&17\\12&3\end{pmatrix}_{(3,2)}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}_{(3,2)} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{(2,5)} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 15 & 7 \\ 10 & 5 & 3 & 25 & 11 \end{pmatrix}_{(3,5)}$$

حل التمرين 08 من السلسلة رقم 01.

حساب الجداءات الممكنة:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}_{(5,1)} * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 4 \end{pmatrix}_{(1,4)} = \begin{pmatrix} 2*1 & 2*4 & 2*9 & 2*4 \\ 1*1 & 1*4 & 1*9 & 1*4 \\ (-3)*1 & (-3)*4 & (-3)*9 & (-3)*4 \\ 4*1 & 4*4 & 4*9 & 4*4 \\ 5*1 & 5*4 & 5*9 & 5*4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 8 & 18 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 4 \\ -3 & -12 & -27 & -12 \\ 4 & 16 & 36 & 16 \\ 5 & 20 & 45 & 20 \end{pmatrix}_{(5,4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{(4,2)} * \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 14 \\ 19 & 28 & 33 \\ 10 & 25 & 16 \\ 12 & 9 & 22 \end{pmatrix}_{(4,3)}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ 14 & 6 & 11 \\ 10 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{(2,4)} * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(4,3)} = \begin{pmatrix} 7 & 21 & 15 \\ 10 & 32 & 10 \end{pmatrix}_{(2,3)}$$

II. المحددات.

لتكن المصفوفة المربعة (**عدد الاسطر او الصفوف يساوي الى عدد الأعمدة**) A(n,n) .

محدد المصفوفة A هو العدد الحقيقي det(A) أو $|A|$ و الذي يعطى بالعلاقة التالية: $\det(A)=|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$

حيث: A_{ij} هي المصفوفة المتبقية عند حذف السطر i و العمود j من المصفوفة A.

1. إذا كانت مصفوفة $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ نعرف محددها بما يلي: $\det(A)=|A|=ad-bc$

2. إذا كانت المصفوفة تكتب على الشكل: $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ نعرف محددها كما يلي:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$
$$=a(ei-hf)-b(di-gf)+c(dh-eg)$$
$$=aei+bgf+cdh-ahf-bdi-ceg$$

3. طريقة أخرى لحساب محدد مصفوفة من الدرجة الثالثة.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det(A)=|A|=\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

ملاحظات:

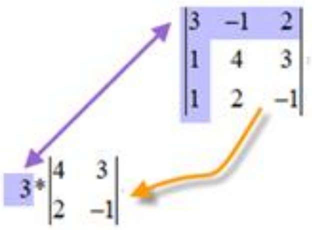
1. إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن: $\det(A)=\det(A^T)$
2. محدد المصفوفة القطرية، المثلثية علوية أو سفلية يساوي الى جداء عناصر القطر الرئيسي.
3. إذا كانت A مصفوفة مربعة و تحتوي على صف أي سطر أو عمود من الأصفار فإن محددها يساوي الصفر.
4. إذا كانت A مصفوفة مربعة وتحتوي على سطرين أو عمودين متساويين أو بينهما علاقة رياضية (ككتابة أحدهما بدلالة الأخر سواء السطرين أو العمودين) فإن محددها يساوي الصفر.
5. عند تبديل صفين أو عمودين فإننا نضرب محدد المصفوفة في (-1).

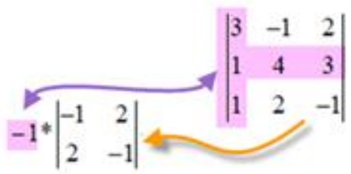
حل التمرين 07 من السلسلة رقم 01.

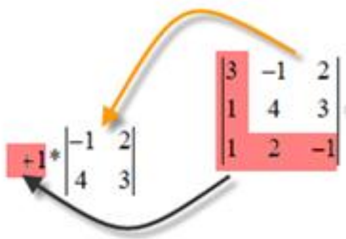
حساب المحدد.

طريقة01:

$$\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=3*\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}-1*\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}+1*\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}$$
$$=3*(4*(-1)-2*3)-1*((-1)*(-1)-2*2)+1*((-1)*3-2*4)$$
$$=-38$$







الإشارة المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة

$$\begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}$$

طريقة02:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$= 3*4*(-1) + (-1)*3*1 + 2*1*2 - 2*4*1 - 3*3*2 - (-1)*1*(-1)$$
$$= -12 - 3 + 4 - 8 - 18 - 1$$
$$= -38$$

طريقة03:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{matrix}$$

$$= 3*4*(-1) + (-1)*3*1 + 2*1*2 - 2*4*1 - 3*3*2 - (-1)*1*(-1)$$
$$= -12 - 3 + 4 - 8 - 18 - 1$$
$$= -38$$

في هذه الحالة المصفوفة مثلثية علوية، قيمة المحدد تساوي الى جداء العناصر القطرية **(القطر الرئيسي)**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1*1*4*4*2*2 = 64$$

القطر الرئيسي

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{array}{c} \text{السطر الأول} \\ \text{السطر الثاني} \\ \text{السطر الثالث} \\ \text{السطر الرابع} \\ \text{السطر الخامس} \end{array} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

السطر الثالث هو عبارة عن ضعف السطر الأول

نفس الحالة السابقة، إلا أنها تتعلق بالأعمدة في هذه المصفوفة حيث:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 6 & -3 \\ 5 & 10 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 6 & -3 \\ 5 & 10 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

وجود علاقة بين العمودين الأول والثاني حيث العمود الثاني هو ضعف العمود الأول

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)*\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)*((-2)*(-1))*\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)*(-2)*(-1)*(-1) = 2$$

شرح كيفية الحصول على المحدد:

L1: السطر او الصف الأول
L2: السطر الثاني
L3: السطر الثالث
L4: السطر الرابع

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{نحتفظ بالسطر الأول كما هو}} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

نجمع السطرين الأول والثاني

السطر الثالث طرح السطر الأول

السطر الرابع طرح السطر الأول

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)*\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)*((-2)*(-1))*\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)*(-2)*(-1)*(-1) = 2$$

$$\begin{vmatrix} x & -2y \\ -x & y \end{vmatrix} = x*y-(-x)*(-2y) = x*y-2x*y$$
$$= -x*y = -xy$$

*ملاحظة: يترك للطالب حساب بقية المحددات بغية التمرن عليها.

حل التمرين 09 من السلسلة رقم 01.

$$\begin{vmatrix} 43251 & 43751 \\ 23264 & 23764 \end{vmatrix} = 43251*23764 - 23264*43751 = 9993500$$

ملاحظة: يمكن كتابة المحدد السابق على الشكل التالي.

$$\begin{vmatrix} x & x+a \\ y & y+a \end{vmatrix} = x(y+a) - y(x+a) = xy + ax - yx - ay$$

$$= ax - ay = a(x-y)$$

$$x = 43251 \qquad y = 23264 \qquad a = 500$$

$$x + a = 43751 \qquad y + a = 23764$$

ومنه بالتطبيق العددي ينتج:

$$\begin{vmatrix} 43251 & 43751 \\ 23264 & 23764 \end{vmatrix} = 500*(43251 - 23264)$$

$$= 500*19987 = 9993500$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

نجمع جميع الأسطر ونضعها بدل السطر الأخير

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5*\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

نخرج 5 كعامل مشترك من السطر الأخير

نجمع السطر الثاني مع الأول

نجمع السطر الأخير مع الأول

$$= 5*\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5*(-1)\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$5*(-1)*(4*2 - 3*4) = 20$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 \end{vmatrix}$$

يمكننا ببساطة ملاحظة العلاقات الموجودة **بين أسطر المصفوفة** (نفس الأمر بالنسبة للأعمدة)، مثلا: السطر الثالث والسطر الأخير عبارة عن مضاعفات للسطر الأول.

بالنسبة للأعمدة: العمود الثاني ، الثالث، الرابع والخامس عبارة عن مضاعفات للعمود الأول.

بالإعتماد على خصائص المحدد نقول أن محدد المصفوفة معدوم أي يساوي الصفر.

$$\begin{vmatrix} a & ab & a & ac \\ a & b & a & ac \\ 1 & b & 1 & c \\ 1 & b & -1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ab & a & ac \\ 0 & b(1-a) & 0 & 0 \\ 1 & b & 1 & c \\ 1 & b & -1 & c \end{vmatrix} = b(1-a)\begin{vmatrix} a & a & ac \\ 1 & 1 & c \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix}$$

$$= b(1-a)a\begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & c \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix} = b(1-a)ac\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

يمكننا التوقف هنا لنقول أن المحدد يساوي الصفر(وجود سطر أو عمود مكرر).

$$= b(1-a)ac\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وجود سطر عناصره تساوي الصفر وبالتالي المحدد يساوي الصفر.

***ملاحظة: على الطالب التمرن على حل بقية المحددات.**

III. معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة).

تعريف:

نقول أن مصفوفة A من الدرجة n لها معكوس إذا وجدت مصفوفة B من الدرجة n ، تحقق ما يلي: $AB = BA = I$

ويرمز لمعكوس المصفوفة A بالرمز: A^{-1}.

1. إذا كان للمصفوفة A و B معكوس فإن: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن A هي معكوس المصفوفة A^{-1}.
3. إذا كان للمصفوفة A معكوس و r≠0 فإن rA تقبل معكوس يساوي: $(rA)^{-1} = \frac{1}{r} * A^{-1}$.
4. إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن A^T تقبل معكوس يساوي: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. إذا كان للمصفوفة A معكوس $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$
6. مقلوب المصفوفة A يعطى بالعلاقة التالية:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * B^T$$

****B = (b_{ij}) هي مصفوفة ناتجة من A حيث:** $b_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$

**** A_{ij} هي المصفوفة الناتجة من خذف السطر i و العمود j.**

**** تسمى المصفوفة $(B)^T$ بالمصفوفة المرافقة أو المصاحبة للمصفوفة A**

ملاحظة: توجد طريقتين لأيجاد معكوس المصفوفة، سيتم التعرف عليهما من خلال حل التمارين.

حل التمرين 01 من السلسلة رقم 02.

1. **الطريقة الأولى.**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 4*1 - 2*1 = 2 \neq 0$$

بما أن قيمة محدد المصفوفة تختلف عن الصفر فإن معكوس المصفوفة موجود ويمكن حسابه.

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(B)^T$$

حساب المصفوفة المرافقة أو المصاحبة:

$$a_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad a_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$a_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad a_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \longleftrightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A * A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} * A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 1 \neq 0$$

بما أن قيمة المحدد تختلف عن الصفر فإنه يمكننا حساب مقلوب المصفوفة (معكوس المصفوفة).

حساب المصفوفة المرافقة:

$$b_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 8\end{vmatrix} \qquad b_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 8\end{vmatrix} \qquad b_{31}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}$$

$$b_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 8\end{vmatrix} \qquad b_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{vmatrix} \qquad b_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$b_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix} \qquad b_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix} \qquad b_{33}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & -4 & 6\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

تغيير إشارة العناصر بالإعتماد على القانون:

$$b_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

يمكننا كتابة منقول المصفوفة B ^{T} على النحو التالي:

B^T = Adj(A)

$$B^T=\begin{pmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=1*\begin{pmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A*A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad \det(A)=11\neq 0$$

بما أن قيمة المحدد تختلف عن الصفر فإنه يمكننا حساب مقلوب المصفوفة (معكوس المصفوفة) .

حساب المصفوفة المرافقة أو المصاحبة:

$$b_{11}=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\qquad b_{21}=-\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}\qquad b_{31}=\begin{vmatrix}-1&2\\1&1\end{vmatrix}$$

$$b_{12}=-\begin{vmatrix}3&1\\1&1\end{vmatrix}\qquad b_{22}=\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\qquad b_{32}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}$$

$$b_{13}=\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}\qquad b_{23}=-\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}\qquad b_{33}=\begin{vmatrix}1&-1\\3&1\end{vmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-1&2\\2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-1&2\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-1\\3&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-3&5\\5&-1&-3\\-3&5&4\end{pmatrix}$$

$$B^T=\begin{pmatrix}-1&5&-3\\-3&-1&5\\5&-3&4\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{11}*\begin{pmatrix}-1&5&-3\\-3&-1&5\\5&-3&4\end{pmatrix}$$

$$A*A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}*\frac{1}{11}*\begin{pmatrix}-1&5&-3\\-3&-1&5\\5&-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

2. الطريقة الثانية.

$$\langle A|I\rangle \to \langle I|A^{-1}\rangle$$

$$\left\langle\begin{array}{cc|cc}3 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{cc|cc}1 & 4 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 1 & 0\end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{cc|cc}1 & 4 & 0 & 1\\ 0 & -14 & 1 & -3\end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{cc|cc}1 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14}\end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{4}{14} & \frac{2}{14}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14}\end{array}\right\rangle$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{4}{14} & \frac{2}{14}\\ \frac{-1}{14} & \frac{3}{14}\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

ملاحظة: عند استعمال الطريقة الأولى ستتحصل على نفس معكوس المصفوفة.

حساب المحدد: $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 3*4-1*(-2) = 14$

حساب المصفوفة المرافقة: $B = \begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \to B^T = \begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix} = Adj(A)$

ومنه معكوس المصفوفة هو:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(B)^T$$

وهي نفس النتيجة السابقة $A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right\rangle \rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -7 & -1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -2 & -3 & 0 & 1\end{array}\right\rangle \rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} & 0\\ 0 & -4 & -2 & -3 & 0 & 1\end{array}\right\rangle$$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-10}{7} & \frac{-9}{7} & \frac{-4}{7} & 1\end{array}\right\rangle \rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{-4}{10} & \frac{7}{10}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{21}{70} & \frac{-14}{70} & \frac{1}{10}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{4}{10} & \frac{-7}{10}\end{array}\right\rangle$$

$$\rightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{-35}{70} & 0 & \frac{5}{70}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{21}{70} & \frac{-14}{70} & \frac{7}{70}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{4}{10} & \frac{-7}{10}\end{array}\right\rangle$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{-5}{10} & 0 & \frac{5}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{-2}{10} & \frac{1}{10}\\ \frac{9}{10} & \frac{4}{10} & \frac{-7}{10}\end{pmatrix} = \frac{1}{10} * \begin{pmatrix}-5 & 0 & 5\\ 3 & -2 & 1\\ 9 & 4 & -7\end{pmatrix}$$

شرح مبسط لكيفية إجراء العمليات الحسابية حتى الوصول الى معكوس المصفوفة

$$\begin{array}{r} \text{السطر الأول (الصف الأول)} \\ \text{السطر الثاني (الصف الثاني)} \\ \text{السطر الثالث (الصف الثالث)} \end{array} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \xrightarrow{L2-3L1} \\ \xrightarrow{L3-3L1} \end{array} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{array}{c} -1/7*L2 \\ \xrightarrow{L3+4*L2} \end{array} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{-7/10*L3} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-10}{7} & \frac{-9}{7} & \frac{-4}{7} & 1 \end{array} \right\rangle$$

$$\begin{array}{c} L1-L3 \\ L2-1/7L3 \end{array} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{-4}{10} & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{21}{70} & \frac{-14}{70} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{4}{10} & \frac{-7}{10} \end{array} \right\rangle \xleftrightarrow{L1-2L2} \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-35}{70} & 0 & \frac{5}{70} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{21}{70} & \frac{-14}{70} & \frac{7}{70} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{10} & \frac{4}{10} & \frac{-7}{10} \end{array} \right\rangle$$

I   معكوس المصفوفة

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{10} & 0 & \frac{5}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{-2}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} & \frac{4}{10} & \frac{-7}{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} * \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 9 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

**ملاحظة: يترك للطالب التمرن على ايجاد معكوس المصفوفتين المتبقيتين