حل سلسلة التمارين رقم 03.

التمرين الأول.

1. كتابة الأنظمة الخطية على الشكل المصفوفي:

$$(S_1)\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$(S_2)\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ 2x_1 - x_2 = 5 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(S_3)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. **ملاحظة: بما أننا سنتطرق لطرق حل الأنظمة في التمرين الموالي، يترك للطالب الإجابة عن السؤال الثاني.

يمكن إتباع الخطوات التالية:

من المعادلة الأولى نتحصل على

بتعويض قيمة X 1 في المعادلة الثانية نتحصل على

$$(S_1)\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 9 \end{cases} \qquad (S_1)\begin{cases} x_1 = 3 + x_2 \\ 2(3 + x_2) + x_2 = 9 \end{cases}$$

$$(S_1)\begin{cases} x_1 = 3 + x_2 \\ 6 + 2x_2 + x_2 = 9 \end{cases}$$

$$(S_1)\begin{cases} x_1 = 3 + x_2 \\ 6 + 3x_2 = 9 \end{cases} \qquad (S_1)\begin{cases} x_1 = 3 + x_2 \\ x_2 = \dfrac{9-6}{3} = 1 \end{cases} \qquad (S_1)\begin{cases} x_1 = 3 + 1 = 4 \\ x_2 = \dfrac{9-6}{3} = 1 \end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة الأولى نتحصل على قيمة المتغير

يمكننا التحقق بسهولة من صحة النتائج المتحصل عليها كما يلي:

$$\begin{cases} 4 - 1 = 3 \\ 2 * 4 + 1 = 9 \end{cases}$$

التمرين الثاني. إستعمال ثلاثة طرق لإيجاد حلول الأنظمة الخطية.

الطريقة الأولى: طريقة غوص.

$$(S_1)\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right\rangle$$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right\rangle \to \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right\rangle \to \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right\rangle$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ -3x_2-2x_3=-2 \\ -2x_3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=-2 \end{cases}$$

الطريقة الثانية: طريقة معكوس المصفوفة.

نظام المعادلات السابق يكتب على الشكل المصفوفة كما يلي : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

وهو من الشكل: $AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}B$

حساب معكوس مصفوفة المعاملات :

$$\left\langle\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -4 & -4 & 0 & 1\end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1\end{array}\right\rangle$$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{array}\right\rangle$$

$$\left\langle\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{array}\right\rangle$$

الان يمكننا ايجاد حلول نظام المعادلات:

$$\begin{pmatrix}-1 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -4\\ -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}}\ \boxed{B} = \boxed{X}$$

بتعويض الحلول نتأكد من صحة النتائج كما يلي:

$$\begin{cases}1+2+2(-2)=-1\\ 2*1-1*2+2(-2)=-4\\ 4*1+2+4*(-2)=-2\end{cases}$$

الطريقة الثالثة: طريقة كرامر.

إذا كان محدد المصفوفة A غير معدوم فإن للجملة حل وحد يعطى بالعلاقة :

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \qquad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

حيث:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

حساب المحددات (**سيتم وضع قيم المحددات مباشرة بغية منح الطالب فرصة لتعميق مكتسباته حول حساب المحددات**)

$$\det(A) = 6 \qquad \det(A_1) = 6 \qquad \det(A_2) = 12 \qquad \det(A_3) = -12$$

ومنه :

$$x_1 = \frac{6}{6} = 1 \quad x_2 = \frac{12}{6} = 2 \qquad x_3 = \frac{-12}{6} = -2$$

الطريقة الأولى: طريقة غوص.

$$(S_5)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 \end{array} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \end{array} \right\rangle$$

وتكون الحلول كما يلي:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=2 \\ -3x_2-3x_3-3x_4=-1 \\ x_3-3x_4=2 \\ 4x_4=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2-2x_2-x_3-x_4 \\ x_2=\dfrac{-1+3x_3+3x_4}{-3} \\ x_3=2+3x_4 \\ x_4=\dfrac{-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2-2(\dfrac{10}{3})-(\dfrac{-7}{3})-(\dfrac{-5}{4}) \\ x_2=\dfrac{-1+3(\frac{-7}{4})+3(\frac{-5}{4})}{-3}=\dfrac{10}{3} \\ x_3=2+3(-\dfrac{5}{4})=\dfrac{-7}{4} \\ x_4=\dfrac{-5}{4} \end{cases}$$

$$x_1=\frac{-5}{3} \qquad x_2=\frac{10}{3} \qquad x_3=\frac{-7}{4} \qquad x_4=\frac{-5}{4}$$

الطريقة الثانية: طريقة معكوس المصفوفة.

حساب معكوس مصفوفة المعاملات :

$$\left\langle\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\rangle$$

$$\left\langle\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right\rangle$$

$$\left\langle\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -3 & -3 & 0 & \frac{-5}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-6}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{-2}{4} \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -2 & -2 & -3 & \frac{10}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{-2}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{-10}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 & \frac{14}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{-10}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right\rangle$$

الان يمكننا ايجاد حلول نظام المعادلات:

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 & \frac{14}{12} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{-10}{12} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{-2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{-7}{4} \\ \frac{-5}{4} \end{pmatrix}$$

الطريقة الثالثة: طريقة كرامر.

الحلول تحسب بالعلاقات التالية: $x_4 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)}$ $\quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$ $\quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$ $\quad x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$

حيث:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

حساب المحددات:

$$\det(A) = -12 \qquad \det(A_1) = 20 \qquad \det(A_2) = -40 \qquad \det(A_3) = 21 \qquad \det(A_4) = 15$$

ومنه الحلول هي:

$$x_1 = \frac{20}{-12} \qquad x_2 = \frac{-40}{-12} \qquad x_3 = \frac{21}{-12} \qquad x_4 = \frac{15}{-12}$$

أي بعد التبسيط:

$$x_1 = \frac{-5}{3} \qquad x_2 = \frac{10}{3} \qquad x_3 = \frac{-7}{4} \qquad x_4 = \frac{-5}{4}$$

**ملاحظة: يترك للطالب حل بقية الأنظمة الخطية بغية التمرن عليها.

التمرين الثالث. حل الأنظمة الخطية باستعمال طريقة غوص.

$$(s_2)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي يكتب كما يلي:

$$\left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right\rangle$$

ومنه:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Leftrightarrow x_1 = 5 - (3) - (2) = 0 \\ -x_2 - 3x_3 = -9 \Leftrightarrow x_2 = -(-9 + 2 * 3) = 3 \\ -x_3 = -2 \Leftrightarrow x_3 = 2 \end{cases}$$

أي أن : $x_1 = 0 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 2$

$$(S_3)\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+3x_3-x_4=2 \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}$$

الشكل المصفوفي يكتب كما يلي:

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right\rangle \sim \left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-14}{3} & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right\rangle$$

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{-14}{3} & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right\rangle$$

تمت المقايضة بين السطرين الثالث والرابع

ومنه الحلول هي: $x_4=-2 \quad x_3=-\frac{3}{2} \quad x_2=\frac{3}{2} \quad x_1=-\frac{3}{2}$

التمرين الرابع.

إيجاد قيم لامدا حتى يكون للجملة حلا وحيدا، هنا نطبق الحل بطريقة كرامر.

$$(s_2)\begin{cases} 2x_1-x_2=\lambda \\ 3x_1+2x_2=4 \end{cases}$$

حلول الجملة بطريقة كرامر هي:

حساب محدد مصفوفة المعاملات: $\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2*2-3*(-1)=7\neq 0$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda - 4(-1) = 2\lambda + 4$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2*4 - 3\lambda = 8 - 3\lambda$$

$$x_1 = \frac{2\lambda + 4}{7} \qquad x_2 = \frac{8 - 3\lambda}{7}$$

ومنه يجب تحقق ما يلي:

$$2\lambda + 4 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -2$$

$$8 - 3\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{8}{3}$$

$$(S_3)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \lambda x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

حلول الجملة بطريقة كرامر هي:

حساب محدد مصفوفة المعاملات:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+\lambda & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 * \begin{vmatrix} 2+\lambda & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (2+\lambda)*3 - 2*3 = 3\lambda$$

حتى يكون للجملة حل وحيد يجب أن يختلف محدد مصفوفة المعاملات عن الصفر. $|A| = 3\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 12 \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \lambda - 8 \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\lambda - 4$$

من خلال ما سبق: $\lambda \neq \frac{4}{5} \qquad \lambda \neq 8 \qquad \lambda \neq 0$
