# Chapitre II : La conduction

## 2.1. Point de vue macroscopique du mécanisme de conduction:

La matière est composée d'atomes (qui font éventuellement partie de molécules) et ces atomes ne sont jamais totalement fixes : ils vibrent et ces vibrations peuvent se transmettre de proche en proche aux atomes voisins et c'est ce phénomène qui correspond à un transfert de chaleur par conduction. La chaleur est ainsi transmise des particules les plus agitées (celles qui ont donc la température la plus élevée) vers les particules les moins agitées (celles qui ont la température la plus faible) [].

Dans les fluides (liquides et gaz) la diffusion de l'énergie thermique intervient quand, au cours de son mouvement de translation, une particule cède une partie de sa quantité de mouvement à d'autres particules lors de collisions. Et dans les solides, la conduction thermique est assurée conjointement par les électrons de conduction et par les vibrations du réseau cristallin (phonons). Les phonons sont des quantités élémentaires (quantifiées) d'énergie de vibration se déplaçant dans un solide à la vitesse du son propre à la substance. La manière dont les phonons interagissent dans le solide détermine leurs propriétés, telles que la diffusion thermique. Les isolants électriques, par exemple, ont généralement une conductivité thermique faible  et ces solides sont considérés comme des isolateurs thermiques (comme le verre, les matières plastiques, le caoutchouc, les céramiques et la pierre). Ceci est dû au fait que dans les solides, les atomes et molécules ne sont pas libres de se déplacer [].

Les métaux, toutefois, présentent une forte conductivité thermique. En effet, leur structure permet une diffusion de l'énergie cinétique par les électrons de conduction, légers et extrêmement mobiles. C'est pourquoi il existe, dans les métaux, une corrélation presque parfaite entre la conductivité électrique et la conductivité thermique. La conductivité électronique prédomine dans les métaux parce que les électrons sont délocalisés, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas liés à un atome et qu'ils se comportent comme un gaz quantique [].

## 2.2. Quelque définitions – Notations:

### 2.2.1. Régime permanent - Régime transitoire:

La température en un point d'un système à un instant donné dépend de la position de ce point par rapport à un repère fixe de coordonnées []:

- $\theta = \theta\ (x, y, z)$ $\theta$ en °C
- $T = T\ (x, y, z)$ T en K

- Si la température de tous les points du système est indépendante du temps, on dit que le régime est **permanent [].**
- Si la température dépend du temps, on dit que le régime est **transitoire.** Dans ce cas, on peut écrire []:
  - $\theta = \theta\ (x, y, z, t)$
  - $T = T\ (x, y, z, t)$

### 2.2.2. Surface isotherme :

On appelle **surface isotherme** $\theta_0$ la représentation dans l'espace de l'équation $\theta_0 = \theta\ (x, y, z)$ à un instant donné [].

- En régime **permanent**, les surfaces isothermes restent fixes [].
- En régime **transitoire**, les surfaces isothermes peuvent se déplacer et se déformer [].

### 2.2.3. Gradient de température :

On appelle **gradient de température** en un point M (x, y, z) d'un système à un instant donné, le vecteur de composantes ∂θ/∂x, ∂θ/∂y, ∂θ/∂z, soit []:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\vec{k}$$

Ce vecteur est **normal** à la surface isotherme passant par le point M.

### 2.2.4. Flux de chaleur :

Est la quantité de chaleur transférée par unité de temps **$\Phi = dQ/dt$**

Un flux de chaleur s'exprime donc en Joules/s, c'est-à-dire en Watt c'est une puissance [].

### 2.2.5. Densité de flux de chaleur :

Est la quantité de chaleur transférée par unité de temps par unité de surface [].
Une densité de flux de chaleur s'exprime donc W/m$^2$ **$\varphi = \Phi/s = dQ / S\,dt$**

## 2.3. Formulation d'un problème de transfert de chaleur :

### 2.3.1. Loi de Fourier (1822) :

Le transfert de chaleur spontané dans un corps solide, d'une zone de température élevée vers une autre zone de température plus basse obéit à la loi dite de Fourier (établie mathématiquement par Jean Baptiste Biot en 1804 puis expérimentalement par Fourier en 1822) [].

Considérons un transfert élémentaire de chaleur Q entre deux plans indéfinis portés aux températures *T* et *T+dT*. Ces deux plans délimitent une portion de solide et sont supposés perpendiculaires à un axe *Ox*. La loi de Fourier exprime naturellement que la chaleur échangée est proportionnelle : à la surface d'échange, à la différence de température entre les deux parois, au temps écoulé et qu'elle est inversement proportionnelle à la distance entre les deux plans. (Figure7) donne un schéma de principe sur la conduction à une dimension, le long de l'axe Ox [].

Soit : $\emptyset = \frac{dQ}{dt} = \lambda s \frac{dT}{dx}$ (loi de Fourier)

*S* est la surface d'échange (perpendiculaire à l'axe *Ox*),
*dT* est l'écart de température entre les deux plans séparés de *dx*,
*dt* désigne le temps que dure l'expérience.
Est **λ** le coefficient de proportionnalité appelé conductivité thermique ou conductance spécifique [].

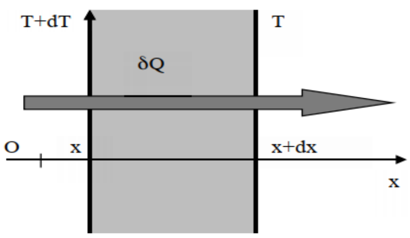



Figure. 6[]

Dans le problème simplifié ci-dessus on a implicitement considéré un mécanisme de conduction unidimensionnel perpendiculaire à l'axe des *x*. Dans un cas général de mécanisme tridimensionnel on exprimera une densité de flux de chaleur selon chacune des directions principales d'un repère orthonormé (*O x,y,z*) []

$$\vec{\varphi} = \frac{\vec{\emptyset}}{S} = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial X}\vec{\imath} + \frac{\partial T}{\partial Y}\vec{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial Z}\vec{k}\right) = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,\text{T}$$

### 2. 3.2 La conductivité thermique :

La conductivité thermique (souvent notée *k* dans les pays anglo-saxons) exprime, de par sa définition, l'aptitude d'un matériau à conduire la chaleur [].

La conductivité thermique s'exprime en **$W.m^{-1}.K^{-1}$**. Cette grandeur dépend de plusieurs paramètres, et l'on doit noter []:

- la nature physico-chimique du matériau ;
- la nature de la phase considérée (solide, liquide, gaz) ;
- la température ;
- l'orientation dans les matériaux anisotropes.

La conductivité thermique dépend de la température lorsque l'on considère des plages étendues de leur variation. Dans ce cas on pourra cependant souvent considérer une variation linéaire avec *T*, sous la forme []:

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 + b\left(T - T_0\right)\right)$$

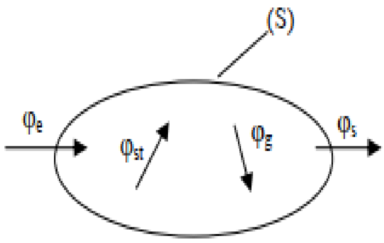
Dans cette expression, le paramètre $0$ désigne la conductivité évaluée à $T=T_0$ et *b* est une constante expérimentale, qui reste faible dans de nombreux cas, tant que la variation de température elle-même n'est pas trop importante. Dans certains cas toutefois, cette dépendance linéaire n'est pas suffisante, et il faut alors prendre en compte des termes d'ordre supérieur, quadratique, cubique, etc[].

### 2.3.3. Bilan d'énergie :

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être [] :

$\varphi_{st}$ flux de chaleur stocké
$\varphi_g$ flux de chaleur généré
$\varphi_e$ flux de chaleur entrant
$\varphi_s$ flux de chaleur sortant

Dans le système (S)




On applique alors le 1er principe de la thermodynamique Pour établir le bilan d'énergie du système (S) []:

$$\boxed{\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st}}$$

### 2.3.4. Equation générale de la conduction :
#### 2.3.4.1. En coordonne cartésienne :

On considère un volume élémentaire (volume de contrôle) dv = dx dy dz, en coordonnées cartésiennes [].

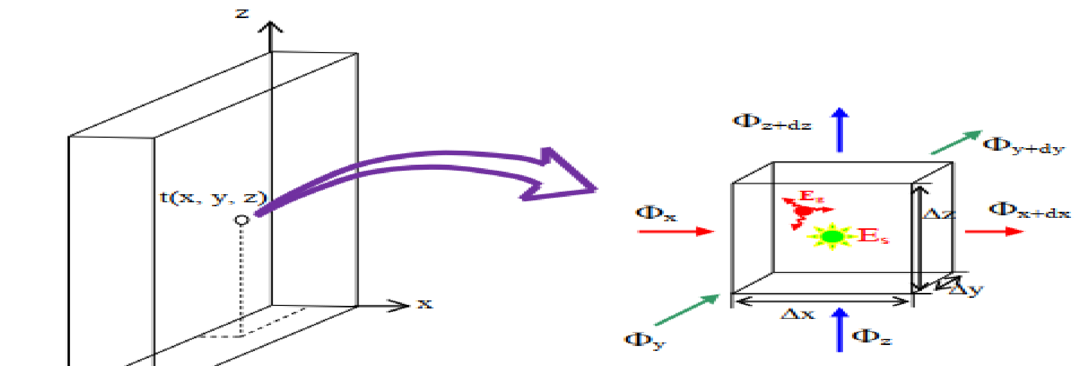



Figure.7 : volume de contrôle en coordonnes cartésiennes []

Le volume de contrôle est soumis à un ensemble de quantité d'énergie à ses surfaces limitrophes (énergies entrante et sortante) et à l'intérieur (énergie générée et stockée) qui se résument comme suit [].

• Sur les faces avants (x, y, z) arrivent une certaine énergie entrante dans le volume de contrôle Qu'on désigne par le flux de chaleur : $\varphi_x$, $\varphi_y$, $\varphi_z$ [ ].

• Sur les facettes opposées (x+dx, y+dy, z+dz) il en sort des flux de chaleur []:

$$\varphi_{x+dx},\ \varphi_{y+dy},\ \varphi_{z+dz}.$$

Le développement en série de Taylor de l'une de ces expressions (exemple : $\varphi_{x+dx}$), cela donne [] :

$$\varphi_{X+dX} = \varphi_x + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} dx^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 \varphi_x}{\partial x^3} dx^3 + \cdots$$

Pour de petites valeurs de « dx », on aura une bonne approximation en négligeant les termes de la série de rang élevé ($dx^2$ et plus) [].

Ainsi, les flux sortant seront exprimés par les relations suivantes [] :

$$\varphi_{X+dX} = \varphi_x + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} dx$$
$$\varphi_{Y+dY} = \varphi_Y + \frac{\partial \varphi_Y}{\partial Y} dY$$
$$\varphi_{Z+dZ} = \varphi_Z + \frac{\partial \varphi_Z}{\partial Z} dZ$$

- A l'intérieur du volume de contrôle est générée une certaine énergie à cause de la présence de la source de chaleur. Cette énergie générée vaut []:

$$\varphi_g = \dot{q}\ dv = \dot{q}\ dx\ dy\ dz$$

Où $\dot{q}$ : flux généré par unité de volume [W/m³].

- Aussi à l'intérieur du volume de contrôle l'énergie est stockée sous forme d'énergie interne. Cette énergie stockée est égale à []:

$$\varphi_{st} = \rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dv$$

Etant donné la relation de thermodynamique suivante []:

$$h = u + pv ;$$

où

h : enthalpie,
u : énergie interne ;
p : pression
v : volume spécifique.

$$\Rightarrow dh = du + pdv + vdp$$

En présence de conduction dans les solides : dv = dp = 0

(dv = 0 veut dire que le volume de l'élément étudié ne varie pas sous l'effet des échanges de chaleur reçues, qui est une hypothèse du problème. Ainsi que pour la pression, pas de variation de pression, dp = 0) [].

$$\Rightarrow dh = du$$

$$c_v\, dT = c_p\, dT \;\Rightarrow c_v = c_p = c$$

La variation de l'énergie interne du volume de contrôle en fonction du temps est égal à []:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial T}{\partial t}$$

Ainsi, l'énergie stockée dans le volume de contrôle est égale à []:

$$\varphi_{st} = \rho\frac{\partial u}{\partial t} dv = \rho c\frac{\partial T}{\partial t} dv = \rho c\frac{\partial T}{\partial t} dxdydz$$

Maintenant que nous connaissons les différentes énergies soumises au volume de contrôle, appliquons la loi de conservation d'énergie à ce volume de contrôle [].

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st}$$

$$\varphi_X + \varphi_Y + \varphi_Z + \dot{q}dv = \varphi_{x+dx} + \varphi_{y+dy} + \varphi_{z+dz} + \rho c\frac{\partial T}{\partial t} dv$$

$$-\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} dx - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} dy - \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} dz + \dot{q}dv = \rho c\frac{\partial T}{\partial t} dv \quad (*)$$

D'après la loi de Fourier :

$$\varphi_x = -\lambda_x S_x \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda_x dydz\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\varphi_y = -\lambda_y S_y \frac{\partial T}{\partial y} = -\lambda_y dxdz\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\varphi_x = -\lambda_z S_z \frac{\partial T}{\partial z} = -\lambda_z dxdy\frac{\partial T}{\partial z}$$

En introduisant ces expressions dans l'équation (*) et en divisant tous les termes par dv nous obtenons la forme générale de l'équation de la chaleur []:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) dxdydz - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) dxdydz - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) dxdydz + \dot{q}dv = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dv$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) dv - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) dv - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) dv + \dot{q}dv = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dv$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

a) Si le milieu est isotrope : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$

b) Si le milieu est homogène, $\lambda$ n'est fonction que de T.

c) Les paramètres physiques (c, ρ) constants

d) Si de plus $\lambda$ est constant (écart modéré de température),

e) La déformation du volume élémentaire due à la variation de la température est négligeable [].

Nous obtenons l'équation:

$$\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

En divisant par $\lambda$ et en introduisant le coefficient de diffusivité de chaleur : $\alpha = \lambda / \rho\ c$, nous obtenons l'équation d'énergie qui peut être réécrite sous la forme suivante []:

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

- Si la conduction est stationnaire ($\partial T / \partial t = 0$) on retrouve l'équation de Poisson **[].**

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \frac{\dot{q}}{\lambda} = 0$$

- Si dans l'équation (2.3) il y a absence du terme de chaleur générée ($\dot{q} = 0$), l'équation est appelée : équation de diffusion [].

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

- Si la conduction est stationnaire ($\partial T/\partial t = 0$), en absence de la chaleur générée, l'équation porte le nom de Laplace []:

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] = 0$$

- Pour le cas d'étude de la conduction monodimensionnelle, stationnaire et sans source de chaleur l'équation (2.3) se réduit à [] :

$$\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial \emptyset_x}{\partial x}=0$$

Cette dernière expression nous indique qu'en régime stationnaire et en absence de source de chaleur, le flux reste constant [].

### 2.3.4.2. En Coordonnées cylindriques :

Les nouveaux paramètres sont : r, φ et z

sachant que : Le changement de variable suivantes :

x = r cos φ ;
y = r sin φ et
z = z

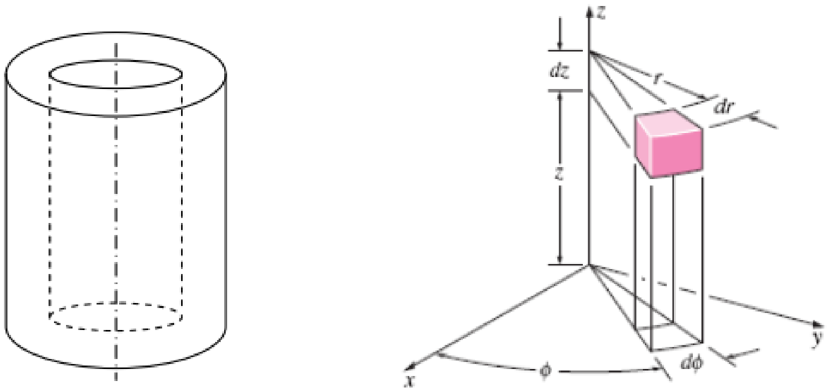



Figure. 8 Coordonnées cylindriques[]

On a: $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial r}\vec{er}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \emptyset}\overrightarrow{e\emptyset}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{ez}$

$$\vec{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}\vec{er}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \emptyset^2}\overrightarrow{e\emptyset}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{ez}$$

$$\vec{\nabla}^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\vec{er}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \emptyset^2}\overrightarrow{e\emptyset}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{ez}$$

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \emptyset^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

D'après l'équation générale de la conduction:

$$\nabla^2 T+\frac{\dot{q}}{\lambda}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \emptyset^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]+\frac{\dot{q}}{\lambda}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

### 2.3.4.3. En Coordonnées sphériques :

Les nouveaux paramètres sont : r, φ et θ

Sachant que : Le changement de variable suivantes : x= r sin θ cos φ,

Y = r sin θ sin φ et
z = r cos θ

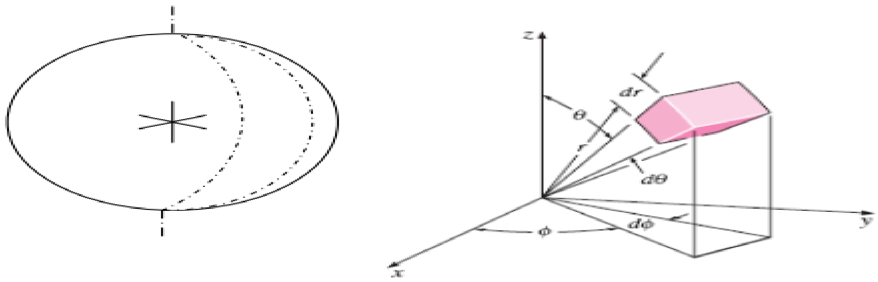


Figure. 9 Coordonnées sphériques []

$\nabla^2$ En coordonnées sphériques

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rT)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2} + \frac{\dot{q}}{\lambda} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

## 2. 4. Méthodes générales analytiques de résolution :

### 2. 4.1 Plaque plane (le mur simple):

On considère un mur d'épaisseur e, de conductivité thermique λ et de grandes dimensions transversales dont les faces extrêmes sont à des températures $T_0$ et $T_e$. []

Etant donné que l'étude est en régime stationnaire, en coordonnées cartésiennes à 1D et sans source de chaleur, l'équation d'énergie est la suivante []:

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}\right] + \cancel{\frac{\dot{q}}{\lambda}} = \cancel{\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right] = 0$$

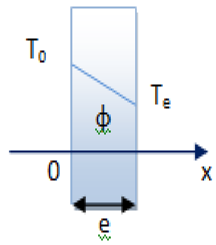



Figure10: Mur simple

Les conditions aux limites de 1er ordre (Dirichlet):

$T(x = 0) = T_0$ *et*

$T(x = e) = T_e$

Une première intégration de l'équation différentielle de 2ème ordre, donne []:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = C_1$$

Une 2ème intégration, nous donne []:

$$T = C_1 X + C_2 \qquad (**)$$

Les constant $C_1$ et $C_2$ sont déterminé à partir des conditions aux limites de 1er ordre (Dirichlet) [].

Pour x= 0 ⇨ $T=T_0$ ⇨ $C_2=T_0$
Pour x= 0 ⇨ $T=T_e$ ⇨ $C_1= (T_e - T_0) / e$

Introduisons les expressions de $C_1$ et $C_2$ dans l'équation (**).[]

$$T = \frac{\mathrm{T_e} - \mathrm{T_0}}{\mathrm{e}} \mathrm{X} + \mathrm{T_0}$$

Déterminons la densité du flux thermique. D'après la loi de Fourier on a []:

$$q = \varphi = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial X}$$

$$q = -\lambda\, \overrightarrow{grad}\, T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial X} = -\lambda\, C_1 = -\lambda \frac{(T_e - T_0)}{e}$$

$$q = \varphi = \lambda \frac{(T_0 - T_e)}{e} \qquad [w/m^2]$$

Le flux thermique.

$$\emptyset = q\, s = \frac{\lambda}{e}\, (T_0 - T_e) s \qquad [w]$$

Et si on donne le temps de passage du flux, on peut calculer la quantité de chaleur. []

$$Q = \emptyset\, t = q\, s\, t = \frac{\lambda}{e}\, (T_0 - T_e)\, s\, t \qquad [J]$$

## 2. 4.2 : Cas d'un mur simple en contact avec 2 fluides :

Considérons un mur en contact avec 2 fluides de température constantes $T_{\infty 1}$ et $T_{\infty 2}$ : (On suppose que $T_{\infty 1} > T_{\infty 2}$) []. Le problème est unidimensionnel,

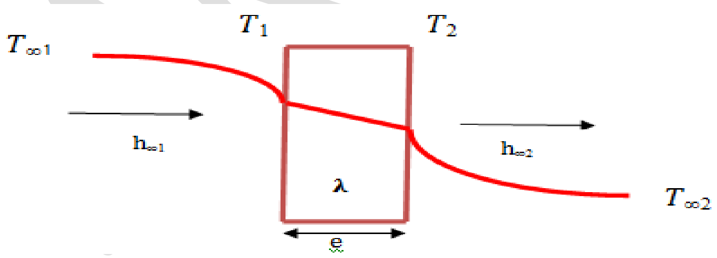



**Figure 11** : Mur simple en contact avec 2 fluides

Formulation du problème
Equation d'énergie :

$$\left[\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x}^2}\right] = 0$$

Conditions aux limites de 3ème ordre (Fourier) :

$$-\lambda \frac{\partial \mathrm{T}(\mathrm{x}=0,\mathrm{t})}{\partial \mathrm{x}} = \left| -\lambda \frac{\partial \mathrm{T}(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{x}} \right|_{\mathrm{x}=0} = \mathrm{h}_{\infty 1}\, (\mathrm{T}_{\infty 1} - \mathrm{T}_1)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x=e,t)}{\partial x} = \left| -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=e} = h_{\infty 2}\,(T_2 - T_{\infty 2})$$

**Résolution:**

Pour la résolution, nous utilisons la condition du flux constant. Car étant en régime stationnaire, on a la relation suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\Phi_{conv1} = \Phi_{cond} = \Phi_{\,conv2} = \Phi$$

Ou :

- A l'intérieur : $\emptyset$ flus thermique (par convection)

$$\emptyset = \varphi\, s = h_{\infty 1} s\,(T_{\infty 1} - T_1) \Longrightarrow (T_{\infty 1} - T_1) = \frac{\emptyset}{s\, h_{\infty 1}} \qquad (1)$$

- Parois $\emptyset$ flus thermique (par conduction)

$$\emptyset = \varphi\, s = \frac{\lambda}{e}\, s\,(T_1 - T_2) \Longrightarrow (T_1 - T_2) = \frac{\emptyset}{\frac{s\,\lambda}{e}} \qquad (2)$$

- A l'extérieur : $\emptyset$ flus thermique (par convection)

$$\emptyset = \varphi\, s = h_{\infty 2}(T_2 - T_{\infty 2}) s \Longrightarrow (T_2 - T_{\infty 2}) = \frac{\emptyset}{S\, h_{\infty 2}} \qquad (3)$$

(1)+(2)+(3) $\Longleftrightarrow$

$$(T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) = \emptyset \left( \frac{1}{s\, h_{\infty 1}} + \frac{1}{\frac{s\,\lambda}{e}} + \frac{1}{s\, h_{\infty 2}} \right)$$

$$\emptyset = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\left( \frac{1}{s\, h_{\infty 1}} + \frac{1}{\frac{s\,\lambda}{e}} + \frac{1}{s h_{\infty 2}} \right)}$$

Avec : La résistance thermique convective : $R_{\infty 1} = 1/(s\, h_{\infty 1})$

La résistance thermique convective : $R_{\infty 2} = 1/(s\, h_{\infty 2})$

La résistance thermique conductive : $R_\lambda = \frac{e}{s\,\lambda}$

Alors :

$$\emptyset = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{(R_{\infty 1} + R_\lambda + R_{\infty 2})} = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\sum_i R_i}$$

### 2. 4.3 Cylindre creux:

On considère un cylindre creux de conductivité thermique $\lambda$, de rayon intérieur $r_1$, de rayon extérieur $r_2$, de longueur L, les températures des faces internes et externes étant respectivement $T_1$ et $T_2$ (Figure 12). On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial. Le régime est  stationnaire, unidimensionnelle (1D) et sans source de chaleur.[]

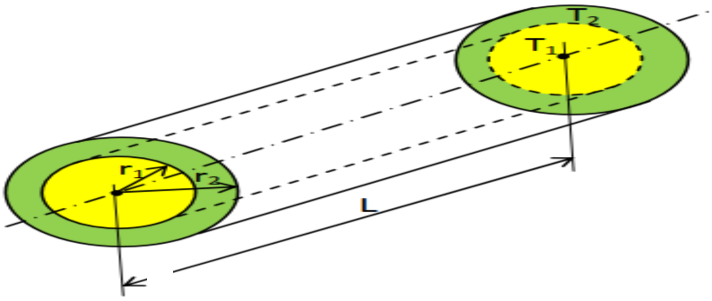



Figure12: Schéma des transferts dans un cylindre creux [].

L'équation d'énergie est de la forme suivante :

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \emptyset^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}\right] + \cancel{\frac{\dot{q}}{\lambda}} = \cancel{\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$$

$$r\,\frac{\partial T}{\partial r} = C_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_1}{r}$$

$$\int \partial T = \int \frac{C_1}{r}\,\partial r$$

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Les conditions aux limites

$(r = r_1) \quad \Longrightarrow \quad T_1 = T_{ch}$

$$T_{ch} = C_1 \ln r_1 + C_2 \qquad (1)$$

$(r = r_2) \quad \Longrightarrow \quad T_2 = T_{fr}$

$$T_{fr} = C_1 \ln r_2 + C_2 \qquad (2)$$

(1) et (2) $\quad \Longrightarrow \quad (T_{ch} - T_{fr}) = C_1 \ln r_1/r_2$

$\Longrightarrow \quad C_1 = (T_{ch} - T_{fr})/\ln r_1/r_2$

**Donc :** $C_2 = T_{ch} - (T_{ch} - T_{fr})/\ln r_1/r_2 \;\; \ln r_1$

$$T(r) = (T_{ch} - T_{fr})/\ln r_1/r_2 \ln r + T_{ch} - (T_{ch} - T_{fr})/\ln r_1/r_2 \;\; \ln r_1$$

$$\Longrightarrow \qquad T(r) = [(T_{ch} - T_{fr})/\ln (r_1/r_2)]\,(\ln r - \ln r_1) + T_{ch}$$

$$T(r) = T_{ch} + \frac{(T_{ch} - T_{fr})}{\ln r_1/r_2}(\ln {}^{r}/_{r_1})$$

Déterminons le flux de chaleur transmis à travers la paroi :

$$\varphi = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = -\lambda\frac{c}{r} = -\lambda\frac{(T_{ch} - T_{fr})}{r\ln r_1/r_2}$$

Alors que $\emptyset = \varphi s$ avec : $s = 2\,\pi\, r\, L$

$$\emptyset = -S\lambda\frac{(T_{ch} - T_{fr})}{r\ln r_1/r_2} = -2\,\pi\, r\, L\,\lambda\frac{(T_{ch} - T_{fr})}{r\ln r_1/r_2}$$

En appliquant l'analogie électrique, l'équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\emptyset = \frac{(T_{ch} - T_{fr})}{\frac{\ln r_2/r_1}{2\,\pi\, L\,\lambda}} = \frac{(T_{ch} - T_{fr})}{R_{th}}, \text{avec: } R_{th} = \frac{\ln r_2/r_1}{2\,\pi\, L\,\lambda}$$

## 2. 4. 4 Sphères creuse :

On considère une sphère creuse de conductivité thermique λ, de rayon intérieur $r_1$, de rayon extérieur $r_2$, les températures des faces internes et externes étant respectivement $T_1$ et $T_2$. On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial [].

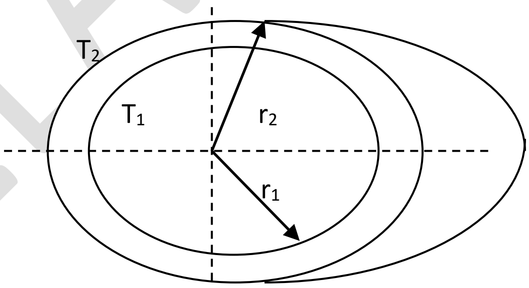



Figure13: Sphère creuse.

Le régime est stationnaire, unidimensionnelle (1D) et sans source de chaleur.
L'équation d'énergie est de la forme suivante []:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rT)}{\partial r^2} + \cancel{\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)} + \cancel{\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\emptyset^2}} + \cancel{\frac{\dot{q}}{\lambda}} = \times\,\cancel{\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(\mathrm{rT})}{\partial \mathrm{r}^2} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2(\mathrm{rT})}{\mathrm{dr}^2} = 0$$

$$\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left[\frac{\mathrm{d}}{\partial \mathrm{r}}(\mathrm{rT})\right] = \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left[\mathrm{T} + \mathrm{r}\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}}\right] = \frac{1}{\mathrm{r}}\left[\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}} + \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}} + \mathrm{r}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{T}}{\mathrm{dr}^2}\right] = 0$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{T}}{\mathrm{dr}^2} + \frac{2}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}}\right] = 0$$

On peut changer les variables:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{T}}{\mathrm{dr}^2} = \grave{\mathrm{u}}\ , \qquad \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}} = \mathrm{u}$$

$$[\mathrm{r}\ \grave{\mathrm{u}} + 2\ \mathrm{u}] = 0$$

$$\left[\mathrm{r}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dr}} + 2\ \mathrm{u}\right] = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{u}} = -2\int \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}}$$

$$\ln(\mathrm{u}) = -2\ln(\mathrm{r}) + \ln(\mathrm{c}_1) = -\ln(\mathrm{r}^2) + \ln(\mathrm{c}_1) = \ln\left(\frac{\mathrm{c}_1}{\mathrm{r}^2}\right)$$

$$(\mathrm{u}) = \frac{\mathrm{c}_1}{\mathrm{r}^2} = \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}} \rightarrow \mathrm{dT} = \frac{\mathrm{c}_1\mathrm{dr}}{\mathrm{r}^2} \rightarrow \mathrm{T(r)} = -\frac{\mathrm{c}_1}{\mathrm{r}} + \mathrm{c}_2$$

Pour déterminer les constantes $C_1$ et $C_2$, on doit utiliser les conditions aux limites relatives au cas considéré[] :

À $r = r_1$ $\quad \mathrm{T}(\mathrm{r}_1) = -\frac{\mathrm{c}_1}{\mathrm{r}_1} + \mathrm{c}_2 = \mathrm{T}_1 \quad (1)$

À $r = r_2$ $\quad \mathrm{T}(\mathrm{r}_2) = -\frac{\mathrm{c}_1}{\mathrm{r}_2} + \mathrm{c}_2 = \mathrm{T}_2 \quad (2)$

(1) - (2) :

$$\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 = \frac{\mathrm{c}_1}{\mathrm{r}_1} - \frac{\mathrm{c}_1}{\mathrm{r}_2} = -\mathrm{C}_1\left[\frac{1}{\mathrm{r}_1} + \frac{1}{\mathrm{r}_2}\right]$$

$$\mathrm{C}_1 = -\frac{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2}{\left[\frac{1}{\mathrm{r}_1} + \frac{1}{\mathrm{r}_2}\right]}$$

$$\mathrm{T}_1 = -\frac{\mathrm{c}_1}{\mathrm{r}_1} + \mathrm{c}_2 = \frac{\frac{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2}{\left[\frac{1}{\mathrm{r}_1} + \frac{1}{\mathrm{r}_2}\right]}}{\mathrm{r}_1} + \mathrm{c}_2$$

$$c_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{r_1\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right]}$$

$$T(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2 = \frac{T_1 - T_2}{\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right]}\frac{1}{r} + T_1 - \frac{T_1 - T_2}{r_1\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right]}$$

$$T(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2 = T_1 + \frac{\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right]}{\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right]}\ T_1 - T_2$$

$$T(r) = T_1 + \frac{\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right]}{\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right]}\ T_1 - T_2$$

La densité de flux thermique est donnée par :

$$\varphi = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r} = -\lambda\frac{c}{r^2} = -\lambda\frac{T_1 - T_2}{\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right]}\left(-\frac{1}{r^2}\right)$$

Alors que $\emptyset = \varphi s$ avec : $s = 4\ \pi\ r^2$

$$\emptyset = \varphi\ s = \lambda 2\ \pi\ r^2\ \frac{T_1 - T_2}{\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right]}\ \frac{1}{r^2}$$

$$\emptyset = \varphi\ s = 4\pi\lambda\ \frac{T_1 - T_2}{\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right]} = \frac{T_1 - T_2}{\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\Big/ 4\pi\lambda\right]}$$

En appliquant l'analogie électrique, l'équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\emptyset = \frac{T_1 - T_2}{\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\Big/ 4\pi\lambda\right]} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}, \text{avec } R_{th} = \frac{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}{4\pi\lambda}$$

### 2. 4. 5 : Cas d'un mur à multicouches en contact avec 2 fluides :

Considérons un mur à multicouches en contact avec 2 fluides de température constantes $T_{\infty 1}$ et $T_{\infty 2}$ (On suppose que $T_{\infty 1} > T_{\infty 2}$) []:

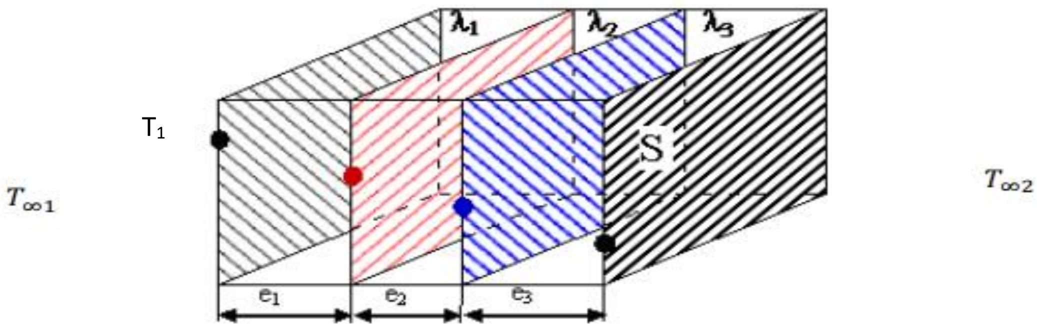



**Figure 14** : Mur simple en contact avec 2 fluides. []

Le problème est unidimensionnel,

- A l'intérieur : Ø flus thermique (par convection)

$$\emptyset = h_{\infty 1}(T_{\infty 1} - T_1)s \Longrightarrow (T_{\infty 1} - T_1) = \frac{\emptyset}{s\, h_{\infty 1}} \quad (1)$$

- Parois Ø flus thermique (par conduction)

$$\emptyset = \frac{\lambda_1}{e_1}(T_1 - T_2)s \Longrightarrow (T_1 - T_2) = \frac{\emptyset}{\frac{s\,\lambda_1}{e_1}} \quad (2)$$

- Parois Ø flus thermique (par conduction)

$$\emptyset = \frac{\lambda_2}{e_2}(T_2 - T_3)s \Longrightarrow (T_2 - T_3) = \frac{\emptyset}{\frac{s\,\lambda_2}{e_2}} \quad (3)$$

- Parois Ø flus thermique (par conduction)

$$\emptyset = \frac{\lambda_3}{e_3}(T_3 - T_4)s \Longrightarrow (T_3 - T_4) = \frac{\emptyset}{\frac{s\,\lambda_3}{e_3}} \quad (4)$$

- A l'extérieur : Ø flus thermique (par convection)

$$\emptyset = h_{\infty 2}(T_{\infty 2} - T_4)s \Longrightarrow (T_{\infty 2} - T_4) = \frac{\emptyset}{s\, h_{\infty 2}} \quad (5)$$

(1)+(2)+(3)+(4)+(5)

$$\Longleftrightarrow$$

$$(T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) = \emptyset\left(\frac{1}{s\,h_{\infty 1}} + \frac{1}{\frac{s\,\lambda_1}{e_1}} + \frac{1}{\frac{s\,\lambda_2}{e_2}} + \frac{1}{\frac{s\,\lambda_3}{e_3}} + \frac{1}{s\,h_{\infty 2}}\right)$$

$$\emptyset = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\left(\frac{1}{s\,h_{\infty 1}} + \frac{1}{\frac{s\,\lambda_1}{e_1}} + \frac{1}{\frac{s\,\lambda_2}{e_2}} + \frac{1}{\frac{s\,\lambda_3}{e_3}} + \frac{1}{s\,h_{\infty 2}}\right)}$$

Avec : La résistance thermique convective : $R_{\infty 1} = 1/(\mathrm{s}\ \mathrm{h}_{\infty 1})$

La résistance thermique convective : $R_{\infty 2} = 1/(\mathrm{s}\ \mathrm{h}_{\infty 2})$

La résistance thermique conductive : $\mathrm{R}_{\lambda_1} = \frac{e_1}{S\ \lambda_1}$

La résistance thermique conductive : $\mathrm{R}_{\lambda_2} = \frac{e_2}{S\ \lambda_1}$

La résistance thermique conductive : $\mathrm{R}_{\lambda_3} = \frac{e_3}{S\ \lambda_1}$

Alors :

$$\emptyset = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\left(R_{\infty 1} + \mathrm{R}_{\lambda_1} + \mathrm{R}_{\lambda_2} + \mathrm{R}_3 + R_{\infty 2}\right)} = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\sum_i R_i}$$

## 2. 4.6Cylindre concentrique:

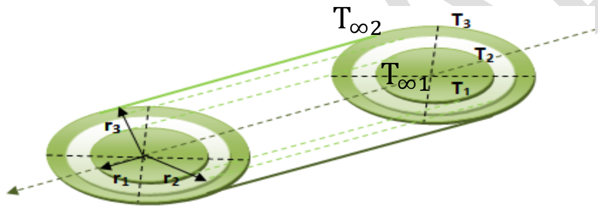



Figure15: Schéma des transferts dans un cylindre concentrique.

Le problème est unidimensionnel,

- A l'intérieur : $\emptyset$ flus thermique (par convection) (1) :

$$\emptyset = \mathrm{h}_{\infty 1}\mathrm{S}_1\,(\mathrm{T}_{\infty 1} - \mathrm{T}_1) = 2\mathrm{h}_{\infty 1}\pi\,\mathrm{r}_1\mathrm{L}(\mathrm{T}_{\infty 1} - \mathrm{T}_1) \rightarrow \quad (\mathrm{T}_{\infty 1} - \mathrm{T}_1) = \frac{\emptyset}{2\mathrm{h}_{\infty 1}\pi\,\mathrm{r}_1\mathrm{L}}$$

- Parois intérieur : $\emptyset$ flus thermique (par conduction) (2) :

$$\emptyset = \frac{(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)}{\frac{\ln \mathrm{r}_2/\mathrm{r}_1}{2\,\pi\,\mathrm{L}\,\lambda}} \quad \rightarrow (\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2) = \emptyset\frac{\ln \mathrm{r}_2/\mathrm{r}_1}{2\,\pi\,\mathrm{L}\,\lambda}$$

- Parois extérieur : $\emptyset$ flus thermique (par conduction) (3) :

$$\emptyset = \frac{(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_3)}{\frac{\ln \mathrm{r}_3/\mathrm{r}_2}{2\,\pi\,\mathrm{L}\,\lambda}} \quad \rightarrow (\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_3) = \emptyset\frac{\ln \mathrm{r}_3/\mathrm{r}_2}{2\,\pi\,\mathrm{L}\,\lambda}$$

- A l'extérieur : $\emptyset$ flus thermique (par convection) (4) :

$$\emptyset = h_{\infty 2}S_2\,(T_{\infty 2} - T_3) = 2h_{\infty 2}\pi\, r_3 L\,(T_{\infty 2} - T_3) \;\rightarrow\; (T_{\infty 2} - T_3) = \frac{\emptyset}{2h_{\infty 2}\pi\, r_3 L}$$

(1)+(2)+(3)+(4) :

$$(T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) = \frac{\emptyset}{2h_{\infty 1}\pi\, r_1 L} + \emptyset\frac{\ln r_2/r_1}{2\,\pi\,L\,\lambda} + \emptyset\frac{\ln r_3/r_2}{2\,\pi\,L\,\lambda} + \frac{\emptyset}{2h_{\infty 2}\pi\, r_3 L}$$

$$\emptyset = \frac{(T_{\infty 1} - T_{\infty 2})}{\left(\frac{1}{2h_{\infty 1}\pi\, r_1 L} + \frac{1}{\frac{\ln r_2/r_1}{2\,\pi\,L\,\lambda}} + \frac{1}{\frac{\ln r_3/r_2}{2\,\pi\,L\,\lambda}} + \frac{1}{2h_{\infty 2}\pi\, r_3 L}\right)}$$

Références


1. http://perso.univlemans.fr/~bcasta/Cours%20L3%20Echanges%20thermiques/Cours%20de%20thermique%20L3%20SPI%202017.pdf
2. https://fr.wikipedia.org/wiki/Conduction_thermique
3. https://www.uvt.rnu.tn/resources-uvt/cours/Distillation/chapitre2/pdf/chapitre2.pdf
4. https://www.techno-science.net/definition/3360.html
5. https://www.superprof.fr/ressources/scolaire/physique-chimie/terminale s/thermodynamique/transfets-thermiques.html#chapitre_transfert-thermique-par-conduction
6. https://www.univ-usto.dz/images/coursenligne/MTTH.pdf
7. http://www.thermique55.com/principal/thermique.pdf