Fonctions implicites

Si $b \neq 0$, l'équation $ax + by + c = 0$ définit une fonction $y = -(ax + c)/b$. Nous allons généraliser ce fait aux équations du type $f(x, y) = 0$ où f est une fonction différentiable : une fonction $\varphi(x)$ est définie implicitement près de $x = \alpha$ par l'équation *f* (*x*, *y*) = 0 si toutes les solutions de cette équation dans un voisinage de $(\alpha, \varphi(\alpha))$ sont sur le graphe $\{(x, y) \setminus y = \varphi(x)\}$ de φ.

Exemple

Si $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, l'équation *f* (*x*, *y*) = 0 est celle d'un cercle de rayon 1 centré en (0, 0). Ce cercle n'est pas globalement le graphe d'une fonction, cependant l'équation *f* (*x*, *y*) = 0 peut être résolue explicitement pour *y*. On trouve les deux solutions $y = \mp\sqrt{1 - x^2}$.

Les fonctions $\varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $\varphi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ sont définies implicitement par l'équation *f* (*x*, *y*) =0 près de *x* = 1.

Théorème *de la fonction implicite (cas d'une fonction à deux variables)*

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k au voisinage de $(x_0, y_0) \in D$. Si $f(x_0, y_0) = 0$ et $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$, alors il existe intervalle ouvert I contenant x_0 et une fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^k sur I telle que, pour tout $(x, y) \in D$ on ait :$f(x, y) = 0 \;\; implique \;\; y = \varphi(x)$

Et pour tout $x \in I,\; f\big(x, \varphi(x)\big) = 0 \;\; et \;\; \varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))}$

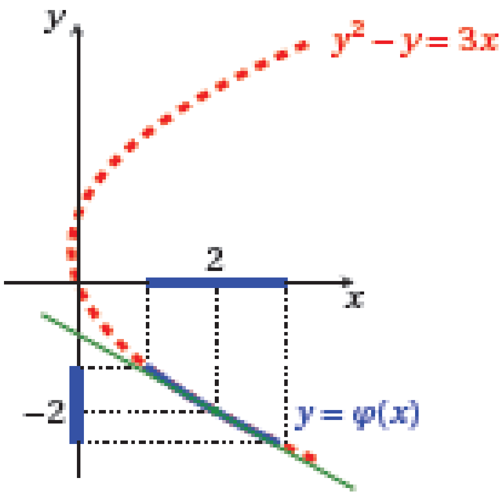
Et le droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = x_0$ a pour équation $y = \varphi'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Exemple

La fonction $y^2 - y = 3x$ défini implicitement au voisinage de (2, -2) une fonction $y = \varphi(x)$.

La droite tangente au graphe de la courbe d'équation $y = \varphi(x)$ a équation

$$y = (x-2)\frac{-\partial_x f(2,\varphi(2))}{\partial_y f(2,\varphi(2))} + (-2)$$
$$= (x-2)\frac{3}{2\varphi(2)-1} - 2$$
$$= \frac{-3}{5}x - \frac{4}{5}$$



Théorème *de la fonction implicite (cas d'une fonction à trois variables)*

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 au voisinage de $(x_0, y_0, z_0) \in D$. Si $f(x_0, y_0, z_0) = k$ (k constante réelle) et $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, alors il existe un ouvert $I \subset \mathbb{R}^2$ contenant (x_0, y_0) et une fonction φ de I dans R de classe C^1 sur I telle que $\varphi(x_0, y_0) = z_0$ et pour tout $(x, y) \in I$

$$f\big(x, y, \varphi(x, y)\big) = k\,, \qquad \partial_x \varphi(x, y) = -\frac{\partial_x f\big(x, y, \varphi(x, y)\big)}{\partial_z f\big(x, y, \varphi(x, y)\big)},$$

$$\partial_y \varphi(x, y) = -\frac{\partial_y f\big(x, y, \varphi(x, y)\big)}{\partial_z f\big(x, y, \varphi(x, y)\big)} \qquad .$$

Exercice

On considère la courbe plane d'équation $\quad ye^x + e^y \sin(2x) = 0 \qquad\qquad (*)$

1. Vérifier que l'équation $(*)$ définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de (0, 0).
2. Calculer $\varphi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(0, \varphi(0))$.
3. En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (*x*, *y*) tend vers (0,0) en étant sur la courbe.

Correction.

On pose $f(x, y) = ye^x + e^y \sin(2x)$

1. On note que (0,0) est une solution de l'équation $f(x, y) = 0$. On a

$$\partial_x f(x, y) = ye^x + 2e^y \cos(2x)\ \partial_x f(0,0) = 2$$
$$\partial_y f(x, y) = e^x + e^y \sin(2x)\ \partial_y f(0,0) = 1$$

Puisque $\partial_y f(0,0) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \varphi(x)$

définie au voisinage de 0 tel que $f\big(x, \varphi(x)\big) = 0$

2. On a: $\varphi'(0) = -\frac{\partial_x f(0,0)}{\partial_y f(0,0)} = -2$

donc l'équation de la droite tangente à φ en $x = 0$ est $y = -2x$.

3. On a

$$\lim_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ f(x,y)=0}} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}$$
$$= \lim_{x\to 0} \varphi'^{(x)}$$
$$= \varphi'(0)$$
$$= -2$$