Université de Djelfa L'année universitaire 2019/2020

Module : Analyse 4 2 Année LMD (MI)

Série № 05

Exercice 01 :

On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = x^4 - y^2$ au point (x_0, y_0, z_0) = (2;3;7). Sa réponse est : $z = 4x^3(x-2) - 2y(y-3)$.

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
2. Quelle est l'erreur commise par l'étudiant ?
3. Donner la réponse correcte.

Exercice 02 :

Trouver les points sur le paraboloïde z = 4x2 +y2 où le plan tangent est parallèle au plan x+2y+ z = 6.
Même question avec le plan 3x + 5y -2 z =3.

Exercice 03 :

On considère la courbe plane d'équation

$$xe^y + e^x \sin(2y) = 0 \qquad (*)$$

1. Vérifier que l'équation $(*)$définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de (0, 0).
2. Calculer $\varphi'(0)$et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φen le point $(0, \varphi(0))$.
3. En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (x, y) tend vers (0,0) en étant sur la courbe.

Exercice 04 :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \frac{x^2y}{2} + x^2 + y^3 - 4y$. Soit l'équation f (x, y) = 3.
Montrer qu'elle définit implicitement au voisinage de (0, - 3) une fonction $y = \varphi(x)$ et calculer l'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 0$.

Exercice 05 :

On suppose que (1,1) est un point critique d'une fonction f dont les dérivées secondes sont continués. Dans chaque cas, que peut-on dire au sujet de f ?

1. $\partial_{xx} f(1,1) = 4,\ \partial_{yy} f(1,1) = 2,\ \partial_{xy} f(1,1) = 1$
2. $\partial_{xx} f(1,1) = 4,\ \partial_{yy} f(1,1) = 2,\ \partial_{xy} f(1,1) = 3$

Exercice 06 :

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

- $f(x,y) = \frac{x^2y}{2} + x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y$
- $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 1$
- $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

Trouver les points critiques de la fonction f et établir leur nature.

Exercice 07 :

On définit $f(x,y) = x^2 + y^2(1+\alpha) - 2xy - 2\alpha y + \alpha$ où α est un paramètre réel.

1. Enoncer les conditions nécessaires des extremums. Déterminer leur solution (x_0, y_0)
2. (x_0, y_0) est-il un extremum? Discuter suivant les valeurs du paramètre α.

Exercice 08 :

On considère l'équation $x^2 + 4y^2 + 2y^4 + z^2 + \sin z = 0$.

1. Vérifier qu'elle définie une et une seule fonction $z = \varphi(x,y)$ au voisinage de (0, 0, 0).
2. Montrer que le point (0,0) est un point stationnaire (critique) pour $z = \varphi(x,y)$ et en établir sa nature.