Equations differentielles :

1. A variables séparées :

forme générale : $y' = f(x) \cdot g(y)$

Méthode de résolution $\Leftrightarrow$ $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

Ainsi $\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$

exemple :
- $y' = y(y+1)$
- $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1}$
- $y' = \sin(x) \cdot \cos y$
- $2yy'(1+e^x) = e^x$
- $y'\sin x = y\ln(y)$ avec $y(\frac{\pi}{2}) = e$

- EDL du premier ordre :

forme générale $y' + P(x)y = Q(x)$ ... (1)

Méthode de résolution :

- si $Q(x) \equiv 0$ $\Rightarrow$ $y' + P(x)y = 0$

$\Rightarrow$ EDL Homogène.

$\Rightarrow$ les variables se separent

$y_H = C \cdot e^{-\int P(x)dx}$ ..

- on suppose dans cette formule que la grandeur C est fonction de x. $C(x)$.
- on substitue dans l'equation (1)

$y = C(x) e^{-\int P(x)dx}$

$\Rightarrow$ $y_G = y_H + y_p$,

ص

expls:

$$(2+x)y' = 2-y$$

$$x^3y' - x^2y = 1$$

$$xy' + y = \cos x$$

3) Equations differentielles linéaires du second ordre à coefficients constantes :

~~De~~ forme générale :

$$a y'' + b y' + c y = f(x) \quad \ldots \text{①}$$

La solution générale de l'equation ① peut se mettre sous forme

$$y_G = y_H + y_p$$

① $y_H = ?$

La solution de l'eq $a y'' + b y' + c y = 0 \quad \ldots \text{②}$

on a l'equation caractéristique

$$a K^2 + b K + c = 0$$

donc $\Delta = b^2 - 4ac$

1. $\Delta > 0$ K_1, K_2

$$y_H = C_1 e^{K_1 x} + C_2 e^{K_2 x}$$

2. $\Delta = 0$ $K_1 = K_2 = K$

$$y_H = (C_1 + C_2 x) e^{Kx}$$

3. $\Delta < 0$

$$K_1 = \alpha + i\beta$$
$$K_2 = \alpha - i\beta$$

$$y_H = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

ص

$y_p = ?$ $f(x) = ?$

polynôme de dégré n

1ere cas : $f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$

- α n'est pas racine de l'eq Caractéristique

$$y_p = Q_n(x)\, e^{\alpha x}$$

- α est racine de l'eq caracteristique

$$y_p = x\, Q_n(x)\, e^{\alpha x}$$

- α est racine double de l'eq caractéristique

$$y_p = x^2\, Q_n(x)\, e^{\alpha x}$$

2eme cas $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$

$N = \max(n, m)$

- $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'eq Carac

$$y_p = e^{\alpha x}\left[U_N(x)\cos\beta x + V_N(x)\sin\beta x\right]$$

- $\alpha + i\beta$ est racine de l'eq Car

$$y_p = x\, e^{\alpha x}\left[U_N(x)\cos\beta x + V_N(x)\sin\beta x\right]$$

exple: $2y'' - y' - y = 4x e^{2x}$

$y'' - 2y' + y = x e^{x}$

$y'' + y = \sin x$

ص

exemple:

$$\begin{cases} \Delta > 0 & y'' + 2y' - 3y = 0 \\ \Delta = 0 & 9y'' - 6y' + y = 0 \\ \Delta < 0 & 9y'' + y = 0 \end{cases}$$

- $2y'' - y' - y = 4x e^{2x}$
- $y'' - 2y' + y = x e^{x}$
- $y'' + y = x \sin x$
- $y'' + 2y' + 2y = e^{x} \sin x$
- $y'' - 5y' + 6y = (x^2+1)e^{x} + x e^{2x}$
- $y'' - 2y' + 5y = x e^{x} \cos 2x - x^2 e^{x} \sin 2x$.

- $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$
- $y'' + 9y = \cos 2x$
- $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$

ص