avril 2015

ch 02 : Systèmes d'equations linéaires :

1. **Déf** un système d'equations lineaires est un ensemble d'équations de forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

avec :

- a_{ij} Coefficients Connus
- b_i second membre (ctes Connues)
- La matrice $A = (a_{ij})$, matrice de système, son rang appelé rang du système (r).
- si $b_i = 0$ le système est dit homogène

rang d'une matrice : est égale à l'ordre maximum d'une matrice carrée extraite de déterminant non nul.

exple :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad r = 3$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} \qquad r = 2$$

2. Résolution par la méthode de Cramer:

Le système (S) est équivalent à :

$$A\,X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Formule de cramer :

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

A_j obtenue de A en remplaçant le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne par le vecteur b.

exple:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -3 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

3. Résolution par substitution:

exple:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 7y = -2 \end{cases}$$

nous réecrivons la première ligne sous la forme $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$

Nous obtenons un système équivalent

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ 2x - 7\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x\right) = -2 \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \\ x = \frac{3}{25} \end{cases}$$

avril 2015

ch 02 : Systèmes d'équations linéaires:

1. Déf un système d'équations linéaires est un ensemble d'équations de forme:

$$(S) : \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

avec:

- a_{ij} coefficients connus
- b_i second membre (ctes connues)
- La matrice $A = (a_{ij})$, matrice de système, son rang appelé rang du système (r),
- si $b_i = 0$ le système est dit homogène

rang d'une matrice: est égale à l'ordre maximum d'une matrice carrée extraite de déterminant non nul.

exple:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad r = 3$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} \qquad r = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{25} \\ y = \frac{8}{25} \end{cases}$$

4- Résolution par inversion de matrice:

on a $AX = Y$

La solution est donnée par:

$$X = A^{-1} Y.$$

expl:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 7y = -2 \end{cases}$$

5. Methode de Pivot de Gauss:

L'ensemble des solutions ne change pas si on effectue sur les equations les operations élémentaires suivantes:

- changer l'ordre des équations;
- multiplier une equation par une cte non nulle
- ajouter à une équation une combinaison linéaires des autre équations.

Ces operations sont résumer ainsi:

$L_i \leftarrow L_j$, $L_i \rightarrow aL_i + bL_j$, $a \neq 0$

exemple : $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - z = 5 \\ x - z = 5 \end{cases}$

on éffectue les operations $L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \to L_3 - L_1$

donc $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -3y + z = 3 \\ -2y = 4 \end{cases}$

on échange L'ordre des variable y et z

afin d'obtenir le système echelonné.

$\begin{cases} x - z + 2y = 1 \\ z - 3y = 3 \\ -2y = 4 \end{cases}$

La résolution en « partant du bas »

Conduit à $y = -2$

puis $z = 3 + 3(-2) = -3$

et enfin $x = 1 + (-3) - 2(-2) = 1$

06. Méthode de Gauss-Jordan :

La transformation de Gauss-Jordan Consiste à transformer le système équivalent dont le bloc gauch est l'identité :

explei
$$\begin{cases} x + 3y + z = 10 \\ x - 2y - z = -6 \\ 2x + y + 2z = 10 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & -2 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -5 & -2 & -16 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \end{array}\right] \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & -2 & -16 \end{array}\right] \quad L_3 \to L_3 - L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_2 / -5 \\ L_3 \to L_3 / -2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad L_1 \to L_1 - 3L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad L_1 \to L_1 - L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 \;,\; y = 2 \;,\; z = 3$$

(1)

Rang d'1 système linéaire: c'est le rang de A

exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} \qquad r = 2.$$

rang de A = L'ordre maximum d'1 matrice carrée extraite de déterminant non nul.

Cas Général du système de n équations à p inconnus:

$$(S) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1r}x_r + \dots a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nr}x_r + \dots a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

- les r premières équations s'appellent équations principales.
- les r premières inconnus sont les inconnus principales les autres non principales.

on peut envisager deux cas:

a) $r = n$; alors $p \geq n$ (rang du système égale au nombres d'equations)

on donne au inconnus non principales $(p-r)$ des valeurs arbitraires, on obtient $x_1, \dots, x_n$ en résolvant par les formules de Cramer.

ص

- La resolution de ce système donne une solution unique. (dépend des inconnus non principales)

exple 1

$$\begin{cases} 2x+3y+z+t=4 \\ x+2y-z-2t=1 \\ 3x+5y+2z=5 \end{cases}$$

$x = 5 - \frac{11t}{2}$

$y = -2 + \frac{7}{2}t$

$z = \frac{1}{2}t$

exple 2:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1+2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}$$

b) $r<n$ le système est compatible (a des solutions) sssi tous les déterminants d'ordre $r+1$ extraits sont nuls.

exple:

$$X \begin{cases} x+2y-z+t=8 \\ x+y+t=6 \\ 3x-2y+5z+t=2 \\ x+2y-z+3t=14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ 3x+y-5z=0 \\ 4x-y+z=3 \\ x+3y-13z=-6 \end{cases}$$

$x=1$

$y=2$

$z=1$

On peut résumer ce qui précède par:

②

théorème de Fontené - Rouchés

Soit (S) un système de n équations a p inconnus. de rang r.

a - $r = n$: on attribue des valeurs arbitraires aux $p-r$ inconnues, le r inconnues principales sont donnés par le système de Cramer.

b. $r < n$ et si l'un au moins des determinants caracteristiques de (S) est non nul, (S) n'a pas de solution.

c. $r < n$ et si $n-r$ determinants caracteristiques de (S) sont nuls, (S) se réduit aux r équations principales.

exple:

$$\begin{cases} x + y + 2z = -2 \\ x + 2y + 3z = a \\ 3x + 5y + 8z = 2 \\ 5x + 9y + 13z = b \end{cases}$$

$r = 2$

pour que (S) ait des solutions, $a = 2$, $b = 6$

det Cara $= 0$

$$\begin{cases} x + y = -2z - 2 \\ x + 2y = -3z + 2 \end{cases}$$

ص