Chapitre 03 : les integrales :

1. principles régles d'intégration

1. si $F'(x) = f(x)$ alors $\int f(x)\,dx = F(x) + C$
où C est une constante arbitraire.

2. $\int A f(x)\,dx = A \int f(x)\,dx$ A cte
3. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.
4. si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ et $u = \varphi(x)$
alors $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

2. table d'intégrales types

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \qquad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C \qquad a > 0$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad a > 0$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x = \sin x + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\,ctg x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c$$

$$= \cancel{\ln | tg x}$$

exples:

1. $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$
3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$
4. $\int x^2 e^{x^3}\, dx$

1. changement de variable:

En posant $x = \varphi(t)$

exple:

$\int x\sqrt{x-1}\, dx$ $\quad t = \sqrt{x-1}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}\, dx$ $\quad u = 5x-2$

$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$ $\quad u = x^2$

04/04/2017

intégration par parties:

$$\int u v' \, dx = uv - \int v u' \, dx$$

exple:

- $\int x \ln x \, dx$
- $\int e^x \cos x \, dx$
- $\int \ln x \, dx$

Intégration des fonctions rationnelles :

théorème de décomposition des fonctions rationnelles :

soit f une fonction rationnelle :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont de polynômes, le dégré du numérateur $P(x)$ étant inferieur au dégré du dinominateur $Q(x)$.

on peut toujours écrire $\frac{P}{Q}$ comme somme d'un polynome ;

- d'élément simples de première espèce $\frac{\alpha}{(x-a)^K}$
- d'éléments simples de deuxième espèce

$$\frac{\alpha x + B}{(x^2+bx+c)^K} \quad \text{avec} \quad \Delta = b^2-4ac < 0$$

exemples de décompositions :

1. $$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{B}{x+2} \qquad (\alpha = 1/3 \,,\, B = -1/3)$$

2. $$\frac{2x+3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{\alpha_1}{(x-1)} + \frac{\alpha_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x+2)}.$$

$$\alpha_1 = 1/9 \qquad \alpha_2 = 5/3 \qquad B = -1/9$$

3. $$\frac{x^3}{x^3-1} = \frac{x^3-1+1}{x^3-1} = 1 - \frac{1}{x^3-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= 1 - \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

$$a = 1/3 \qquad b = -1/3 \qquad c = 2/3$$

Intégration des éléments simples:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

exemples:

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)} = \int \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1}$$

$a = -1/4$

$b = 5/2$ $\quad c = 1/4$

$$= -\frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{5}{2(x-1)} + c$$

 20/05/2015

Intégration des fonctions trigonométriques:

1) integrales du types: $\int \sin^m x \cos^n x \, dx = I_{m,n}$ $n,m \in \mathbb{N}$ ... (1)

(1). $m = 2k+1$

$$\Rightarrow I_{m,n} = -\int \sin^{2k} x \cos^n x \, d(\cos x)$$
$$= -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \, d(\cos x)$$

de m̂ si n est impair

explе 01 ; $I = \int \sin^{10} x \cos^3 x \, dx$
$$= \int \sin^{10} x \,(1-\sin^2 x)\, d(\sin x)$$
$$= \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + C$$

(2). si m et n sont des nombres positifs pairs, on transforme l'expression qui se trouve sous le signe de l'integrale (1) à l'aide des formules
$$\begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$$

exple: $\int \cos^2 3x \sin^4 3x \, dx$
$$= \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \sin^2 3x \, dx$$
$$= \int \frac{\sin^2 6x}{4} \cdot \frac{1-\cos 6x}{2} \, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 6x - \sin^2 6x \cos 6x \, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 12x}{2} - \sin^2 6x \cos 6x \, dx$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18}\sin^3 6x\right) + C$$

ص

~~③ $m=-u$ et $n=-v$ sont des nombres négatifs entiers de même parité ;~~

$$I_{m,n} = \int \frac{dx}{\sin^u x \cos^v x}$$

② integrales de type :

$$\int \sin mx \cos nx \, dx$$

$$\int \sin mx \sin nx$$

$$\int \cos mx \cos nx$$

on utilise les formules :

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right)$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]$$

exple : $\int \sin 9x \sin x \, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 8x - \cos 10x \, dx$$

$$= \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{20}\sin 10x + C$$

exples : $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$

$$\int \cos(ax+b) \cos(ax-b) \, dx$$

③ integrales de type $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

R : est une fonction rationnelle.

1. à l'aide de changement de variable

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

$\Rightarrow \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

expl: $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = I$

en posant $t = tg\frac{x}{2}$.

$$I = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t}$$

$$= \ln(1+t)+c$$

$$= \ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|+c$$

• $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$

le changement $tg x = t$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$x = \operatorname{arctg} t \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

<u>expl</u>: $\displaystyle I = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$

$$tg x = t \qquad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{1+2t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(t\sqrt{2})}{1+(t\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2})+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\, tg x)+c$$

ص