Matrices:

1) **Def** on appelle matrice de type (n,p) à coefficients dans K un tableau à n lignes et à p colonnes d'éléments a_{ij} ~~dans~~ K.

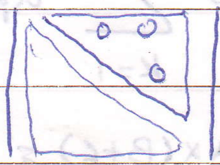
avec i désignant les lignes

j " les colonnes.

a_{ij} coefficients ou termes de la matrice.

2) propriétés:

- Deux matrice $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont égales si elles ont
  - $\hat{m}$ nbre de lignes
  - $\hat{m}$ nbre de colonnes
  - $a_{ij} = b_{ij}$
- La matrice type (n,n) est appelée matrice carrée d'ordre n
  - La suite des éléments $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ est appelée diagonale principale.
  - La somme des éléments diagonaux est appelée trace de la matrice. $Tr\, M$
- matrice carrée diagonale si $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$
- matrice carrée triangulaire inferieur (superieure) si $a_{ij} = 0$ lorsque $i < j$ $(i > j)$

exple:  inf carree d'ordre n

- matrice diagonale dont les termes sont égaux à 1 appelée matrice d'identité d'ordre n.

- matrice carrée symétrique ⟹ $a_{ij} = a_{ji}$
  - antisymétrique $a_{ij} = -a_{ji}$

③ Opérations sur les matrices :

- Addition de matrices : si $A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$ deux matrices de type (m,n)

  $A + B = C$ avec $(C = a_{ij} + b_{ij})$

- multiplication d'1 matrice par un scalaire :

  $$c\,(a_{ij}) = (c\,a_{ij})$$

- produit matriciel :

  $A = (a_{ij})$ une matrice de (m,n)

  $B = (b_{ij})$ " " " (n,p)

  C.à.d (nbre de colonne de A = nbre de lignes de B)

  La matrice $C = A \times B$ et la matrice $C = (C_{ij})$ avec

  $$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ $\quad$ $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

$\lambda (A \times B) = \lambda A \times B = A \times \lambda B$

- transposition

La transposée de A notée A^t =

$$A^t = (b_{ki}) \quad \text{avec} \quad b_{ki} = a_{ik}$$

$$^t(\lambda . A+B) = \lambda A^t + B^t$$

$$^t(A \times B) = {}^tA \times {}^tB$$

$$^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$$

A

Les Déterminants :

cas d'1 Matrice d'ordre 2 :

Soit $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

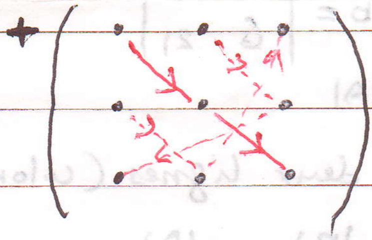
on appelle determinant de A le nombre

$$|A| = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

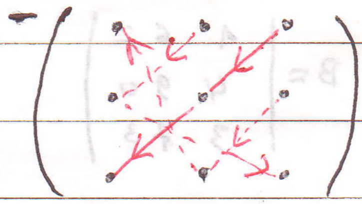
cas d'1 matrice d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1ère Méthode : Méthode de sarrus



$$+(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13})$$



$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$

2ème Méthode :

$$A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

propriétés des déterminants:

a. $\det A = \det A^t$

b. si A a une ligne (colonne) de zéros alors

$$|A| = 0$$

c. si A a deux lignes (colonnes) identiques $\Rightarrow \det A = 0$

d. si A est une matrice triangulaire

alors $\det A =$ produit des éléments diagonaux

e. B une matrice obtenue a partir de la matrice A:

e1. multiplication d'1 lignes (colonne) de A par un scalaire K $\Rightarrow \det B = K \det A$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 21 \end{vmatrix}$$

$$|B| = 3|A|$$

e2. en échangeant deux lignes (colonnes) de A

$$\Rightarrow |B| = -|A|$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 9 & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix} \qquad |B| = -|A|$$

e3. en additionnant un multiple d'1 ligne (colonne) de A a un autre $\Rightarrow |A| = |B|$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \qquad |B| = |A|$$

f. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Inversion d'1 matrice :

matrice inversible $\Rightarrow A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Condition d'existence :

A^{-1} existe $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

calcul de A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^{t}(\text{com } A)$$

↳ Comatrice de A

- Com A est obtenue en remplaçant chaque élément de A pas son Cofacteur
- ${}^{t}(\text{comA})$ est appelée matrice Adjointe de A A^*

Matrice adjoint

$A = [a_{ij}]$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots \\ \alpha_{12} & & \\ \vdots & & \\ a_{1n} & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

exple :
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

A^{-1} , $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ $A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 12 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

ص

Fevrier 2017

operations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'1 matrice:

une opération élémentaire sur les lignes (colonnes) d'1 matrice consiste à:

- remplacer une ligne L_i par la ligne $L_i + L_j$ (avec $i \neq j$)
- echanger deux lignes.
- multiplier une ligne par un scalaire non nul.

Methode de calcul de l'inverse:

1. former la matrice $[A | I_n]$
2. échelonner et reduire cette matrice ~~de façon~~ pour obtenir la matrice $[I_n | X]$

alors $X = A^{-1}$

exemple:

ص

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \rightarrow \\ L_3 - L_1 \rightarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 3L_3 \\ L_3 \rightarrow -L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Fevrier 2017

exemple 3 calculer le determinant de A

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & -3 & -1 & 10 \\ 0 & -\frac{14}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{19}{5} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - \frac{2}{5} L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1 \\ L_4 \to L_4 - \frac{1}{5} L_1 \end{array}$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 7 & 1 & -12 \\ -3 & -1 & 10 \\ -14 & -7 & 19 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 7 & 1 & -12 \\ 0 & -\frac{4}{7} & \frac{34}{7} \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_2 + \frac{3}{7} L_1 \\ L_3 \to L_3 + \frac{14}{7} L_1 \end{array}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 7 \cdot \frac{1}{7} \begin{vmatrix} -4 & 34 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 38,$$

exemple 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[A \vdots I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_1 \to L_1 - 3L_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_1 \to L_1 - 3L_3$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de passage et changement de base

(i) Matrices Associées à une application Lineaires

Soit E, F deux éspaces vectoriels de dimensions fini :

$B_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E

$B_F = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$ " " F

f une application linéaire de E dans F

~~te~~

Les vecteurs $f(e_1), f(e_2), \dots f(e_n) \in F$

soit

$$f(e_j) = a_{1j} \cdot e'_1 + a_{2j} e'_2 + \dots a_{mj} \cdot e'_m$$

La matrice

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{array} \right| \end{array}$$

est appelé matrice associée a f relativement aux base B_E, B_F

$$A = M_f(B_E, B_F)$$

2) Matrice de passage : E espace vectoriel de dimension n. $B = (e_1, e_2, \dots e_n)$ ~~une base de E~~ et $B' = (e'_1, e'_2, \dots e'_n)$ deux base de E.

les vecteurs de B' peuvent séxprimer dans B Selon les relations :

$$e'_1 = \alpha_{11} e_1 + \alpha_{21} e_2 + \alpha_{31} e_3 + \dots + \alpha_{n1} e_n$$

$$e'_2 = \alpha_{12} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \dots + \alpha_{n2} e_n$$

$$\vdots$$

$$e'_n = \alpha_{1n} e_1 + \dots + \alpha_{nn} e_n$$

On appelle matrice de passage de B a B' La matrice ~~de passage~~ P définie par :

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} e'_1 & \dots & \dots & e'_n \end{matrix} \end{array}$$

La matrice P^{-1} Sera donc la matrice de passage de B' a B

exemple : Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$

et $B' = (\underbrace{e_1 - e_2 + e_3}_{e'_1}, \underbrace{e_1 + e_2 - e_3}_{e'_2}, \underbrace{e_1 - e_3}_{e'_3})$

trouver $P_{B \to B'}$ et $P^{-1}_{B' \to B}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

③ théorème:

Soit E_1, E_2 deux espace vectoriels

- B_1, B'_2 deux base de E_1
- B_2, B'_2 " " " E_2
- P la matrice de passage de B_1 à B'_1
- Q " " " B'_2 à B'_2

Si f une application linéaire de E_1 dans E_2

$$A = M_f(B_1, B_2) \quad \text{et} \quad B = M_f(B'_1, B'_2)$$

$$\text{on a} \quad B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

le schéma ci-dessous indique les bases par rapport auxquelles les matrices sont écrites;

$$\begin{array}{ccccccc}
E_1 & \xrightarrow{Id_{E_1}} & E_1 & \xrightarrow{f} & E_2 & \xrightarrow{Id_{E_2}} & E_2 \\
(B'_1) & P & (B_1) & A & (B_2) & Q^{-1} & (B'_2)
\end{array}$$

$$B$$

- si f un endomorphisme de E ; B, B' deux base de E

$$A = M_f(B) \qquad A' = M_f(B')$$

P matrice de passage de B à B'

$$\Rightarrow A' = P^{-1} A P .$$

exemple :

- E, F deux espace vectoriel de dimension $3, 2$ respectivement
- (e_1, e_2, e_3) une base de E
- (u_1, u_2) " " de F
- f une application linéaire de E dans F définie par :

$$f(e_1) = u_1 + u_2$$
$$f(e_2) = 2u_1$$
$$f(e_3) = u_1 - u_2$$

1- trouver la matrice M associée à f relativement aux base e_i et u_i

2. On considère les vecteurs :

$$e'_1 = e_1 + e_2 \qquad u'_1 = u_1 + u_2$$
$$e'_2 = e_2 + e_3 \qquad u'_2 = -u_1 + u_2$$
$$e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$$

- determiner la matrice de passage P des (e_i) au (e'_i) et la matrice de passage Q de (u_i) au (u'_i)

- déduire la matrice B associée à f par rapport aux base (e'_i) et (u'_i).

ص

exemple 1:

- E e.v de dimension 3 muni d'une base B_E
- F " " 4 " " " B_F
- f L'application de E dans F

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 - 2x_3, -3x_1 + x_2 + x_3, -2x_1 - 2x_2 - 2x_3, -x_1 + 3x_2 + x_3)$$

exple 2:

E e.v dim $E = 2$ $B_E = (e_1, e_2)$

F e.v dim $F = 3$ $B_F = (u_1, u_2, u_3)$

1. Determiner A_f associée à f

$$f(x_1, x_2) = (-3x_1 - 4x_2, 4x_1 - 4x_2, -3x_1 + 2x_2)$$

2. Determiner $f(3,-3)$
3. Determiner l'image des vecteurs de B_E

$$f(e_1), f(e_2)$$