Université : ZIANE Achour DJELFA
Faculté : sciences exactes et informatique
Département : physique
Niveau : 1ère année master
Spécialité : énergétique et énergie renouvelable/physique des matériaux
Module : interaction lumière-matière
Enseignant : Dr. LAHOUAL Mohamed

Nom: ……………………
Prénom: …………………

TD : 05
TD : Probabilité de transition

Solutions

Solution 5.1

Nous pouvons écrire l'équation de la probabilité de transition

$$C_b{}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{ba}(t')e^{i\omega_0 t'}dt'$$

Comme la perturbation est constante dans le temps, on peut mettre $\widehat{H}'$ en dehors de l'intégrale

$$C_b{}^{(1)}(t) = -\frac{iH'_{ba}}{\hbar}\int_0^t e^{i\omega_0 t'}dt' = \frac{H'_{ba}}{\hbar\omega_0}\left[e^{i\omega_0 t} - 1\right]$$

$$= -\frac{H'_{ba}}{\hbar\omega_0}e^{i\omega_0 t/2}\left[e^{i\omega_0 t/2} - e^{i\omega_0 t/2}\right]$$

$$= -\frac{H'_{ba}}{\hbar\omega_0}e^{(i\omega_0 t/2)}\sin(i\omega_0\, t/2)$$

$$\left|C_b{}^{(1)}(t)\right|^2 = \frac{4}{\hbar^2}\frac{\left|H'_{ba}\right|^2}{\omega_0^2}sin^2(\omega_0\, t/2)$$

2) de ce résultat, il est clair que la probabilité de transition varie harmoniquement.

3) sa fréquence angulaire est $\omega_0/2$ et son amplitude de vibration est

$$\frac{4}{\hbar^2}\frac{\left|H'_{ba}\right|^2}{\omega_0^2} = \frac{4\left|H'_{ba}\right|^2}{(E_b - E_a)^2}$$

Solution 5.2

La probabilité de transition est

$$C_{|1\rangle}{}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{10}(t')e^{i\omega_0 t'}dt'$$

Ou

$$H_{10}^{'} = \langle 1|H^{'}|0\rangle$$

$$\omega_{10} = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}$$

$$C_{|1\rangle}{}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^{\infty} \exp(i\omega_{10}t)\, e^{-\alpha t}\langle 1|H_0|0\rangle dt$$

$$= \frac{\langle 1|H_0|0\rangle}{i\hbar}\left[\frac{\exp[-(\alpha - i\omega_{10})t]}{-(\alpha - i\omega_{10})}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\langle 1|H_0|0\rangle}{i\hbar}\frac{1}{(\alpha - i\omega_{10})}$$

La probabilité de transition de l'état $|0\rangle$ à l'état $|1\rangle$ est

$$P_{10} = \left|C_{|1\rangle}{}^{(1)}\right|^2 = \frac{|\langle 0|H_0|1\rangle|^2}{\hbar^2(\alpha - i\omega_{10})^2}$$

Solution 5.3

a) Commençons par écrire

b)

$$\psi = c_1(t)e^{iE_1t/\hbar}|1\rangle + c_2(t)e^{iE_2t/\hbar}|2\rangle$$

Mettons-la dans l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \big(H_0 + \hbar V(t)\big)\psi$$

Nous obtenons

$$\dot{c}_1 = -i\bar{V}_0 \cos\omega t\; e^{-i\omega_0 t}c_2$$

$$\dot{c}_2 = -i\bar{V}_0^* \cos\omega t\; e^{i\omega_0 t}c_1$$

Apres l'application de l'approximation de l'onde rotative, nous obtenons

$$\dot{c}_1 = -i\bar{V}_0 e^{-i(\omega-\omega_0)t}c_2$$

$$\dot{c}_2 = -i\bar{V}_0^* e^{-i(\omega-\omega_0)t}c_1$$

Les conditions initiales sont $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$ et $\dot{c}_2(0) = -i/2\bar{V}_0^*$, $\dot{c}_1(0) = 0$. L'élimination de c_1 par une double différentiation nous aurons

$$\ddot{c}_2 + i(\omega - \omega_0)\dot{c}_2 + \frac{1}{4}|\bar{V}_0|^2 c_2 = 0$$

La solution itérative est $e^{i\mu t}$ et l'équation résultante

$$-\mu^2 - (\omega - \omega_0)\mu + \frac{1}{4}|\bar{V}_0|^2 = 0$$

Les racines sont

$$\mu_\pm = \frac{1}{2}\left(-(\omega - \omega_0) \pm [(\omega - \omega_0)^2 + |\bar{V}_0|^2]^{1/2}\right)$$

Et la solution complète de l'équation de Schrödinger est

$$c_2(t) = A_+ e^{i\mu_+ t} + A_- e^{i\mu_- t}$$

Les coefficients $A_\pm$ peuvent être fixés des conditions initiales pour avoir

$$c_2(t) = -\frac{|\bar{V}_0|^2}{2} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + |\bar{V}_0|^2}\left(e^{i\mu_+ t} - e^{i\mu_- t}\right)$$

Ou

$\Omega = [(\omega - \omega_0)^2 + |\bar{V}_0|^2]^{1/2}$

Est la fréquence de Rabi. Alors la solution pour l'évolution du niveau excité est

$$c_2(t) = -\frac{i}{\Omega}\bar{V}_0^* e^{-i(\omega-\omega_0)t/2} \sin\frac{1}{2}\Omega t$$

La probabilité en question découle de ce résultat. Le renversement est atteint quand $\sin\frac{1}{2}\Omega t = 1$, qui se produit dans $\pi - pulse$ de durée π/Ω.

Solution 5.4

Dans un modèle semi-classique les atomes sont quantifiés, mais la lumière n'ai pas quantifiée. L'atome est décrit par l'hamiltonien, et l'effet de la lumière est pris comme un terme additionnel à l'hamiltonien. L'évolution du système est obtenue par la résolution de l'équation de Schrödinger avec l'hamiltonien total. La résolution de l'équation est impossible analytiquement et il faut alors avoir recours à l'approximation. L'effet de l'oscillation des champs est pris comme une perturbation dans l'hamiltonien de l'atome sans interaction, cela conduit à la théorie de la perturbation dépendante du temps ou son résultat le plus utile est la règle d'or de Fermi. Cela nous dit la probabilité d'obtenir une transition d'un niveau à un autre sous la perturbation dépendante du temps.

$|1\rangle$ et $|2\rangle$ représentent les deux niveaux atomiques. E_1et E_2sont les énergies propres de ces deux états. Lorsque cet atome interagit avec un champ, l'hamiltonien contient les éléments de transition pour sauter de $|1\rangle$ à $|2\rangle$ et vice versa. Nous avons les opérateurs de création $|2\rangle\langle 1|$ et annihiliation $|1\rangle\langle 2|$.

L'équation de Schrödinger est

$$\left(E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| + \gamma e^{i\omega t}|1\rangle\langle 2| + \gamma e^{-i\omega t}|2\rangle\langle 1|\right)|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle$$

En substituant la fonction d'onde

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)e^{-iE_1t}|1\rangle + c_2(t)e^{-iE_2t}|2\rangle$$

Nous obtenons les deux équations

$$\frac{\gamma}{\hbar}c_2 = i\dot{c}_1 e^{i(\omega_{12}-\omega)t}$$

$$\frac{\gamma}{\hbar}c_1 = i\dot{c}_2 e^{i(\omega_{12}-\omega)t}$$

c'est un système d'équations couplés qui se résout pour c_2 par la dérivation de la deuxième équation et la substituer dans la première équation. Nous obtenons

$$\ddot{c}_2 - i(\omega_{21}-\omega)\dot{c}_2 + \frac{\gamma^2}{\hbar^2}c_2 = 0$$

$$\mu^2 - (\omega_{21}-\omega)\mu - \frac{\gamma^2}{\hbar^2} = 0$$

Qui a deux racines

$$\mu_{1,2} = \frac{\omega_{21}-\omega}{2} \pm \left(\sqrt{\gamma^2/\hbar^2 + (\omega-\omega_{21})^2/4}\right)$$

Alors

$$c_2(t) = Ae^{-i\mu_1 t} + Be^{-i\mu_2 t}$$

Mais $c_2(0) = 0$, alors $A = -B$. La solution est alors

$$|c_2|^2 = 4A^2 sin^2(\Omega t)$$

Dans la résonance, nous avons

$$|c_2|^2 = sin^2(\gamma t/\hbar)$$

Pour $|c_2|^2 = 1$

$$\frac{\gamma t}{\hbar} = \frac{\pi}{2}$$

Et nous obtenons ainsi le temps de renversement

$$t = \frac{\pi\hbar}{2\gamma}$$

$$t = 1.65 \times 10^{-10}$$