CHAPITRE III

Cinématique des fluides:

Introduction:

Il s'agit de l'étude des fluides en mouvement
On attracha à faire une description des écoulements
sans avoir recours au calcul des formes mises en jeu.

1. Description d'Euler et de Lagrange

1.1. Description lagrangienne :

* Il s'agit d'une description de l'écoulement qui consiste à suivre dans l'espace fluide, la position d'une particule choisi en fonction du temps.

$$\boxed{x = f(X, t)}$$

Où : x : La position de M à t.

X : la position de M à $t = 0$.

On nomme : $X = (X_1, X_2, X_3)$ position de lagrange.

* Il consiste à exprimer la valeur de toute grandeur physique dans la configuration actuelle en fonction des variables de Lagrange

$$\boxed{B = B(X, t)}$$

où B : est une grandeur physique attrachée à la particule M (la pression p, la vitesse V ...)

1.2. Description Eulerienne :

Cette description définit le mouvement du système matériel (S) par la donnée à chaque instant de la vitesse $\vec{v}$ de la particule située au point géométrique M dans la configuration actuelle Ω_t.

$$\boxed{\forall t, \forall M \in \Omega_t, \vec{v} = \vec{v}(M, t)}$$

avec : $M = M(x_1, x_2, x_3)$. x_i Variable d'Euler.

Ainsi toute grandeur physique b est donc un champ de la forme

$$\boxed{b = b(x, t)}$$

avec : x point occupé par différentes particules à des valeurs différentes du temps

A chaque instant t il passe une particule au point x, jamais la même, de vitesse v de masse volumique ρ. de pression p.

1.3 Relation entre les deux descriptions

ϕ et ψ sont bijectives, on peut les inverser:

$$x = \phi(X,t). \quad X = \psi(x,t)$$

Ainsi pour passer de Euler à Lagrange:

$\forall t, \forall X \in \Omega^0, \forall x \in \Omega^t$ on doit résoudre le système differentiel suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(x.t) \\ x(t=0) = X \end{cases}$$

On obtient $x = \phi(X,t)$ on note:

$$\vec{v}(x.t) = \vec{v}(\phi(X.t),t) = \vec{V}(X.t)$$

Et pour toute grandeur physique b:

$$\boxed{b(x.t) = b(\phi(X.t),t) = B(X.t)}$$

pour passer de Lagrange à Euler

$$x = \phi(X.t) \longrightarrow X = \psi(x.t)$$

d'où

$$\vec{V}(X,t) = \vec{V}(\psi(x.t),t) = \vec{v}(x.t)$$

et de même avec une grandeur physique b quelconque:

$$\boxed{B(X.t) = B(\psi(x.t),t) = b(x.t)}$$

2 Dérivée particulaire (ou totale):

la dérivée particulaire d'une grandeur intensive x (vectorielle ou scalaire), notée $\dfrac{Dx}{Dt}$ C'est la dérivée parrapport au temps de cette grandeur x en suivant la particule de fluide dans son mouvement.

*** En représentation Lagrangienne:**

$$\boxed{\frac{DB}{Dt} = \frac{DB}{Dt}(X.t) = \frac{\partial B}{\partial t}}$$

En représentation Eulerienne

$$b = b(x,t)$$

$$\frac{Db}{Dt} = \frac{D}{Dt}\left(b(\phi(x,t),t)\right) = \frac{\partial b}{\partial t}(\phi(x,t),t) + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\boxed{\dot{b} = \frac{Db}{Dt} = \frac{\partial b}{\partial t}(x,t) + \nabla_x(b)\, v(x,t)}$$

Calcule de l'accélération en Lagrange.

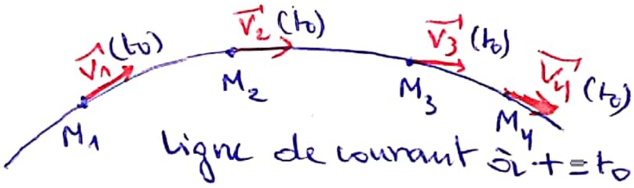
$$\boxed{\vec{a}(X,t) = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \phi}{\partial t}(X,t) = \frac{\partial^2 \phi(X,t)}{\partial t^2}}$$

En Euler:

$$\boxed{\vec{a}(x,t) = \frac{D\overrightarrow{v(x,t)}}{Dt} = \frac{\partial \overrightarrow{v(x,t)}}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla_x \cdot v} \cdot \vec{v}}$$

3.1 Ligne de courant:

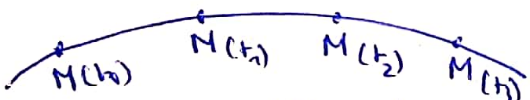
Définie à un instant donné, la courbe qui en chacun des points est tangente au vecteur vitesse.



Ligne de courant à $t = t_0$.

3.2 Trajectoire

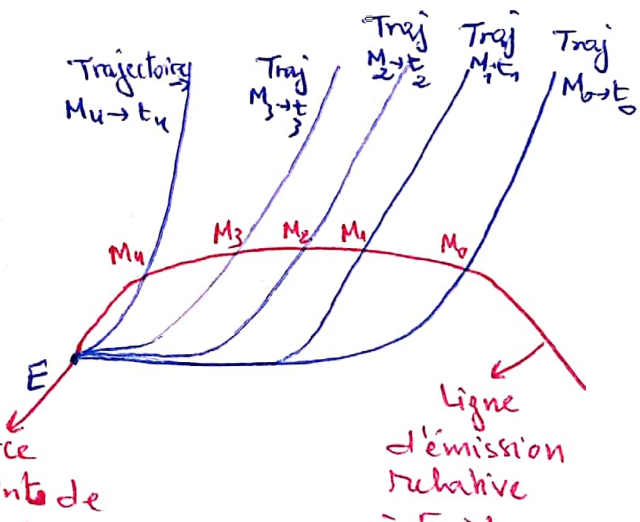
C'est l'ensemble des positions occupées successivement par une même particule de fluide au cours du temps.



Trajectoire de la particule M

3.3 La ligne d'émission:

Toutes les particules étant perssées par un même point E sont situées à l'instant t_s sur une courbe applée "ligne d'émission" relative au point "E" à l'instant t. La figure explique cette définition.



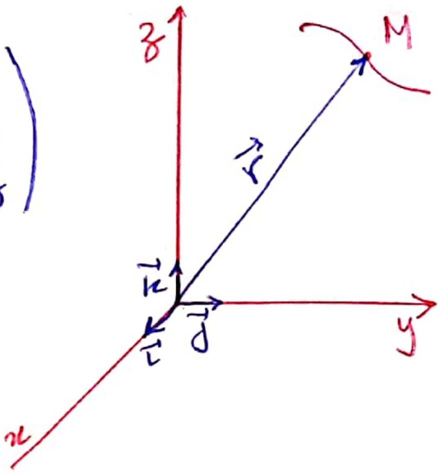
III. Cinématique des fluides.

1- Étude des champs des vitesses

a- Vecteur position

* En coordonnées cartésiennes

$$\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



b- Vecteur de vitesse:

* En coordonnées cartésiennes:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

alors: $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

c-à-d $\quad \vec{V}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} u = \dfrac{dx}{dt} = u(x.y.z.t) \\ v = \dfrac{dy}{dt} = v(x.y.z.t) \\ w = \dfrac{dz}{dt} = w(x.y.z.t) \end{cases}$$

c- Vecteur de l'accélération:

* En coordonnées cartésiennes.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j} + \frac{dw}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \qquad \vec{a}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Soit f une fonction définie par: $f = f(x.y.z.t)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

Donc: $\quad du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz + \dfrac{\partial u}{\partial t}dt$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial U}{\partial z}$$

Donc: $\boxed{a_x = \frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + W\frac{\partial U}{\partial z}}$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dT + \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Donc: $\boxed{a_y = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} + W\frac{\partial V}{\partial z}}$

$$dW = \frac{\partial W}{\partial t} dT + \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Donc: $\boxed{a_z = \frac{\partial W}{\partial t} + U\frac{\partial W}{\partial x} + V\frac{\partial W}{\partial y} + W\frac{\partial W}{\partial z}}$

Alors les composantes de l'accélération en coordonnées cartésiennes s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} a_x = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + W\frac{\partial U}{\partial z} \\ a_y = \frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} + W\frac{\partial V}{\partial z} \\ a_z = \frac{\partial W}{\partial t} + U\frac{\partial W}{\partial x} + V\frac{\partial W}{\partial y} + W\frac{\partial W}{\partial z} \end{cases}$$

On définie le vecteur Nabla par $\vec{\nabla} = \vec{grad}$

$$\vec{\nabla} = \vec{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Donc:

$$\vec{\nabla} U = \vec{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

et on a: $\vec{V} = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k}$

$$\Rightarrow \quad \vec{V} \cdot \vec{\nabla} U = U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + W\frac{\partial U}{\partial z}$$

Ce qui nous permettons d'écrire:

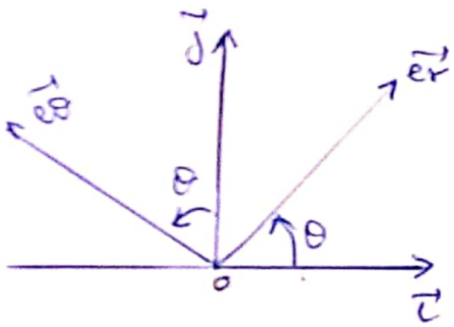
$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\partial U}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla} U = \dfrac{DU}{Dt} \\ a_y = \dfrac{\partial V}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla} V = \dfrac{DV}{Dt} \\ a_z = \dfrac{\partial W}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla} W = \dfrac{DW}{Dt} \end{cases}$$

Remarque: $\dfrac{D}{Dt}$: dérivé particulière

Donc : $\boxed{\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla} V}$

* En coordonnées cylindriques

a/ vecteur position:



$$\begin{cases} \vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$$

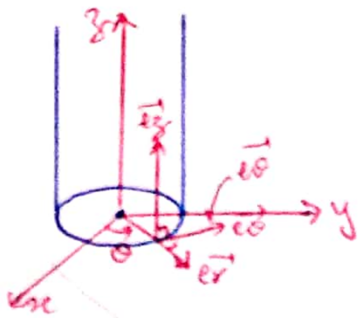
$$\frac{d\vec{e_r}}{d\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = \vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e_r}}{d\theta} = \vec{e_\theta} \;. \quad \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d\vec{e_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\vec{e_r}}{d\theta} = \vec{e_\theta} \\ \dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{j} = -(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) = -\vec{e_r}$$

$$\frac{d\vec{e_\theta}}{dt} = \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e_r}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\vec{e_r} \\ \dfrac{d\vec{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e_r} \end{cases}$$

On définie **le** vecteur position en coordonnées cylindriques par:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{OM} = r\,\vec{e_r} + z\cdot\vec{e_z}}$$

b/ Vecteur des vitesses

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\vec{e_r}}{dt} + \frac{dz}{dt}e_z + z\frac{de_z}{dt}$$

$$d\vec{e_r} = -\sin\theta\, d\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, d\theta\, \vec{j}$$

$$d\vec{e_r} = d\theta\, \vec{e_\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{e_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta} = \dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

$$\frac{d\vec{e_z}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{V} = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}$$

avec : $\vec{V} = V_r\vec{e_r} + V_\theta\vec{e_\theta} + V_z\vec{e_z} \Rightarrow \begin{cases} V_r = \frac{dr}{dt} \\ V_\theta = r\dot{\theta} \\ V_z = \frac{dz}{dt} \end{cases}$

C/ Vecteur accélération :

On a : $\vec{a} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}V$

$$\vec{V} = V_r\vec{e_r} + v_\theta\vec{e_\theta} + V_z\vec{e_z}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial V_r}{\partial t}\vec{e_r} + V_r\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial t} + \frac{\partial V_\theta}{\partial t}\vec{e_\theta} + V_\theta\frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial t} + \frac{\partial V_z}{\partial t}\vec{e_z} + V_z\frac{\partial\vec{e_z}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial t} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}, \quad \frac{\partial\vec{e_\theta}}{\partial t} = -\dot{\theta}\vec{e_r}, \quad \frac{\partial\vec{e_z}}{\partial t} = 0$$

Il vient : $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial V_r}{\partial t}\vec{e_r} + V_r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial t}\vec{e_\theta} - V_\theta\dot{\theta}\vec{e_r} + \frac{\partial V_z}{\partial t}\vec{e_z}$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} - \dot{\theta}V_\theta\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \dot{\theta}V_r\right)\vec{e_\theta} + \frac{\partial V_z}{\partial t}\vec{e_z}$$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} - \frac{V_\theta^2}{r}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \frac{V_\theta V_r}{r}\right)\vec{e_\theta} + \frac{\partial V_z}{\partial t}\vec{e_z}$$

Le vecteur $\vec{\nabla}$ est donné par $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$

$$a_r = \frac{\partial V_r}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}V_r$$

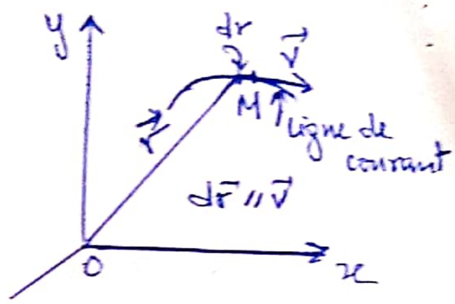
$$\vec{\nabla}\cdot V_r = \frac{\partial V_r}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial V_r}{\partial z}\vec{e_z}$$

$$\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\cdot V_r = V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{a_r} = \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r}}$$

4.2 Ligne de courant :

*** En coordonnées cartésiennes**



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$d\vec{r} \parallel \vec{V} \Rightarrow \vec{V} \wedge d\vec{r} = \vec{0}$$

donc $$\vec{V} \wedge d\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$= (v\,dz - w\,dy)\vec{i} - (u\,dz - w\,dx)\vec{j} + (u\,dy - v\,dx)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v\,dz - w\,dy = 0 \\ u\,dz - w\,dx = 0 \\ u\,dy - v\,dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{v}{dy} = \dfrac{w}{dz} \\ \dfrac{u}{dx} = \dfrac{w}{dz} \\ \dfrac{u}{dx} = \dfrac{v}{dy} \end{cases} \Rightarrow \frac{u}{dx} = \frac{v}{dy} = \frac{w}{dz}$$

$$\boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}}$$ L'équation de ligne de courant (coordonnées cartésiennes)

*** En coordonnées cylindriques :**

$$\vec{r} = r\,\vec{e_r} + z\,\vec{e_z}$$

$$d\vec{r} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}$$

$$d\vec{r} \parallel \vec{V} \Rightarrow \vec{V} \wedge d\vec{r} = \vec{0}$$

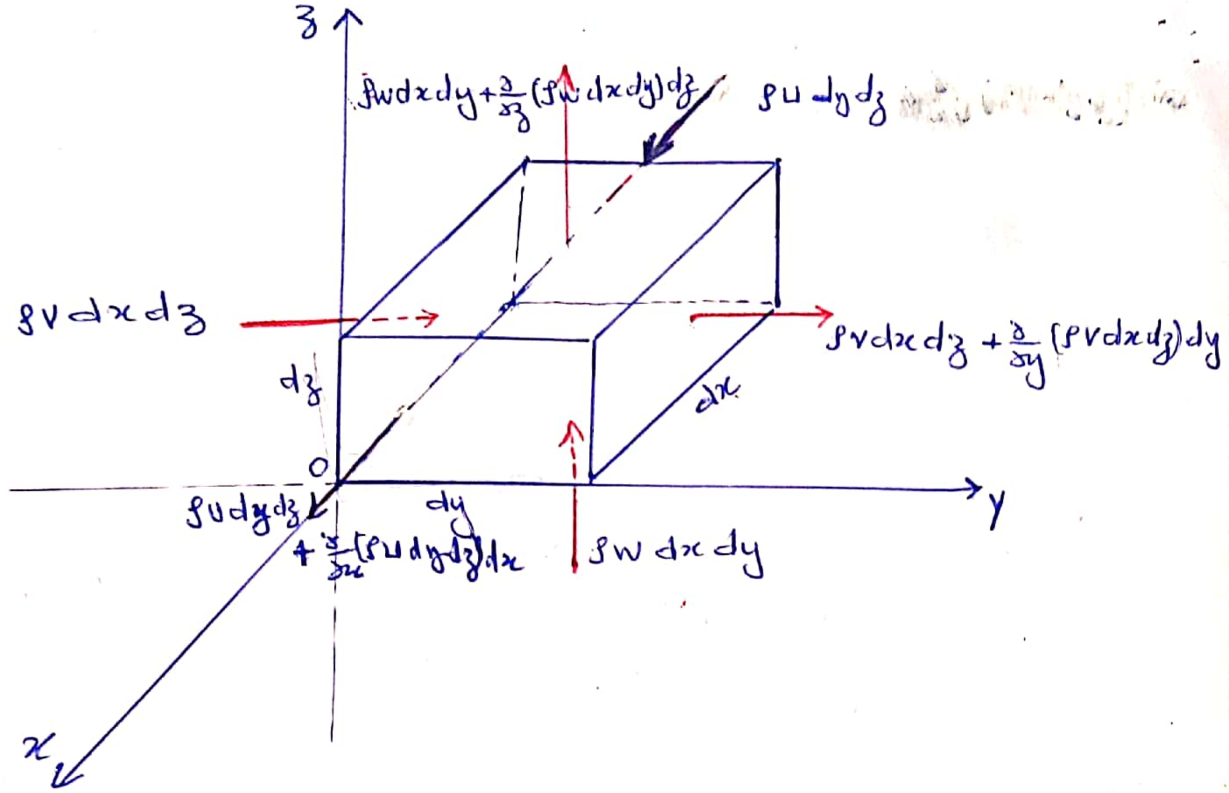
$$\vec{V} \wedge d\vec{r} \begin{vmatrix} \vec{e_r} & \vec{e_\theta} & \vec{e_z} \\ V_r & V_\theta & V_z \\ dr & r\,d\theta & dz \end{vmatrix}$$

$$= (V_\theta\,dz - r\,d\theta\,V_z)\vec{e_r} + (V_r\,dz - dr\,V_z)\vec{e_\theta} + (r\,d\theta\,V_r - dr\,V_\theta)\vec{e_z} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V_\theta\,dz - r\,d\theta\,V_z = 0 \\ V_r\,dz - dr\,V_z = 0 \\ r\,d\theta\,V_r - dr\,V_\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{V_z}{dz} = \dfrac{1}{r}\dfrac{V_\theta}{d\theta} \\ \dfrac{V_r}{dr} = \dfrac{V_z}{dz} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{V_\theta}{d\theta} = \dfrac{V_r}{dr} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_r}{dr} = \frac{1}{r}\frac{V_\theta}{d\theta} = \frac{V_z}{dz}$$

$$\boxed{\frac{dr}{V_r} = \frac{r\,d\theta}{V_\theta} = \frac{dz}{V_z}}$$ L'équation de ligne de courant (coordonnées cylindriques).

4.3 L'équation de continuité (conservation de la masse):



L'écoulement (entrée - sortie) de fluide à travers le volume élémentaire

a/ Dans la direction x est:

$$\rho u\,dy\,dz - \left[\rho u\,dy\,dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\,dy\,dz)dx\right] = \frac{-\partial}{\partial x}(\rho u\,dy\,dz\,dx)$$

b/ Dans la direction y est:

$$\rho v\,dx\,dz - \left[\rho v\,dx\,dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\,dx\,dz)dy\right] = \frac{-\partial}{\partial y}(\rho v\,dx\,dy\,dz)$$

c/ Dans la direction z est:

$$\rho w\,dx\,dy - \left[\rho w\,dx\,dy + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\,dx\,dy)dz\right] = \frac{-\partial}{\partial z}(\rho w\,dx\,dy\,dz)$$

* D'aprés le principe de conservation de la masse:

la variation de la masse à l'interieur de l'élément $dx\,dy\,dz$

alors: $$\boxed{\Delta m = \frac{-\partial}{\partial x}\rho u\,dy\,dz\,dx - \frac{\partial}{\partial y}\rho v\,dx\,dz\,dy - \frac{\partial}{\partial z}\rho w\,dz\,dx\,dy = 0}$$

* Calcule de Δm:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V \Rightarrow dm = \rho\,dV$$

$$dm = \rho\,dx\,dy\,dz$$

$$\boxed{\Delta m = \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\,dx\,dy\,dz)}$$

donc:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,dx\,dy\,dz) = \frac{-\partial}{\partial x}\rho u\,dy\,dz\,dx - \frac{\partial}{\partial y}\rho v\,dx\,dy\,dz - \frac{\partial}{\partial z}\rho w\,dz\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\rho U - \frac{\partial}{\partial y}\rho V - \frac{\partial}{\partial z}\rho W$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\rho.\vec{V} = 0}$$

Cette équation est l'équation de continuité ou l'équation de conservat° de la masse.

*** Cas particulier :**

Pour un fluide incompressible : $\rho = cte$

Pour un écoulement permanant : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ $\Big\} \Rightarrow$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}^{0} + \vec{\nabla}\cancel{\rho}.\vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{V} = 0$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{K}$$

$$\vec{V} = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{K}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0}$$

C'est l'équation de continuité en coordonnées cartésiennes

*** L'équation de continuité en coordonnées cylindriques**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho\vec{V} = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$$

$$\vec{V} = V_r\vec{e_r} + V_\theta\vec{e_\theta} + V_z\vec{e_z}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_r}{dr} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r.V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

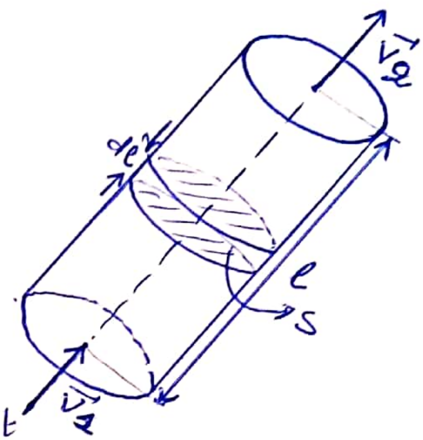
$$= \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\boxed{\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_r}{r} = 0}$$

C'est l'équation de continuité en coordonnées cylindriques

4.4. L'équation de continuité pour un tube de courant:

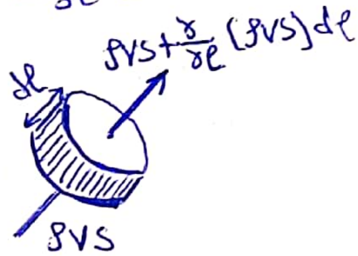
Si v et ρ sont la vitesse et la masse volumique dans une section droite S d'un tube de courant, l'équation de continuité devient:



$$\rho v S dt - \left[\rho v S + \frac{\partial}{\partial l}(\rho v S) dl\right] dt = -\frac{\partial}{\partial l}(\rho v S) dl\, dt$$

$m = \rho V \qquad dm = \rho dV = \rho S dl = \rho S v dt$

$$\Delta m = \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho S dl) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho S v dt)$$



$$\Delta m = \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho S dl)$$

$$\Delta m = -\frac{\partial}{\partial l}(\rho v S) dl \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho S dl) = -\frac{\partial}{\partial l}(\rho v S) dl$$

Donc: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho S \cancel{dl}) + \frac{\partial}{\partial l}(\rho v S) \cancel{dl} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial l}(\rho v S) = 0}$$

* Si l'ecoulement permanent (stationaire) $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
* Fluide incompressible $\longrightarrow \rho = cte$

donc: $\frac{\partial}{\partial l}(\rho S v) = 0 \Rightarrow \boxed{\rho v S = cte}$

4.4.1 Débit massique Q_m:

On a: $dm = \rho dV \Rightarrow \begin{cases} dV = ds \cdot dl \\ dl = v\, dt \end{cases}$

$$\Rightarrow dm = \rho\, ds\, dt\, \vec{v} \cdot \vec{n}$$

$$Q_m = \iint_S \frac{dm}{dt} = \iint_S \frac{\rho \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot ds\, \cancel{dt}}{\cancel{dt}} = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n}\, ds$$

$$\boxed{Q_m = \rho v S \quad (Kg/s)}$$

$\begin{cases} v: \text{vitesse} \\ S: \text{section} \end{cases}$

4.4.2. Débit volumique: Q_v

$$Q_v = \iint_S \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = v \cdot S \qquad \boxed{Q_v = v \cdot S} \; (m^3/s)$$

4.5 : Equation De la variation de quantité de mouvement.

1. Théoréme de la quantité de mouvement :

La conservation de la quantité de mouvement, nous permettons d'arriver à l'équation

$$\boxed{\iint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}_{ext})\, d\sigma = \sum \vec{F}_{ext} \;/\; d\sigma = dS} \text{ (surface élémentaire)}$$

$\vec{n}_{ext}$: est la normale unitaire aux surface du tube de courant

$\vec{F}_{ext}$: est la somme des forces extérieures

$\vec{V}$: est la vitesse (uniforme) dans la section S

* Le Terme intégral de quantité de mvt pour un tube de courant limité par les sections S_1, S_2 et la surface latéral (du coude) S_L

$$\iint_{S} \rho \vec{V}_1 (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1)\, d\sigma + \iint_{S} \rho \vec{V}_2 (\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2)\, d\sigma + \iint_{S_L} \rho \vec{V}_L (\vec{V}_L \cdot \vec{n}_L)\, d\sigma$$

- la deuxième Terme :

$$\sum \vec{F}_{ext} = [F_V] + [F_S] = \underbrace{\iiint_V \vec{f} \cdot dv}_{\text{force de volume}} + \underbrace{\iint_S \vec{T} \cdot d\sigma}_{\text{force de surface}}$$

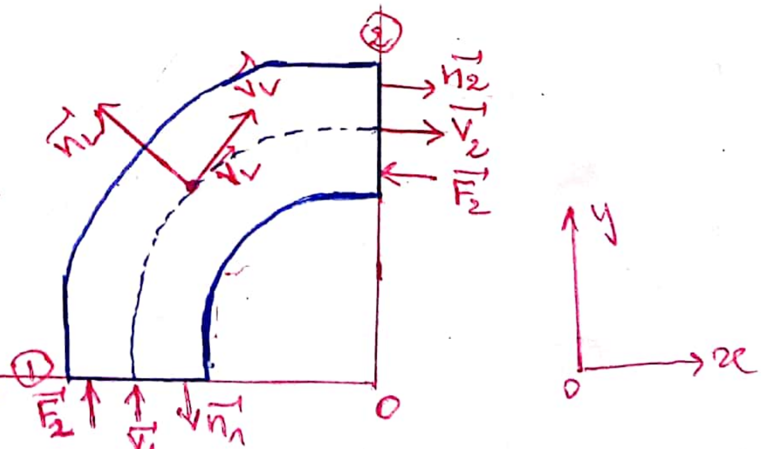
$$\sum \vec{F}_{ext} = \underbrace{\iiint_V \rho \vec{g}\, dv}_{\substack{\text{poid du fluide}\\ \text{compris dans}\\ \text{le tube de courant}}} + \underbrace{\iint_{S_1} \vec{T} d\sigma}_{\substack{\text{Force de}\\ \text{pression}\\ \text{sur } S_1}} + \underbrace{\iint_{S_2} \vec{T} d\sigma}_{\substack{\text{Force de}\\ \text{pression}\\ \text{sur } S_2}} + \underbrace{\iint_{S_L} \vec{T} d\sigma}_{\substack{\text{Action du fluide}\\ \text{sur le coude}\\ (-\vec{R})}}$$

Alors :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = M \cdot \vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 - \vec{R}}$$

Exemple :

$$\iint_S \rho \cdot \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n})\, d\sigma = \sum \vec{F}_{ext}$$



donc :

$$\iint_{S_1} \rho \vec{V}_1 \underbrace{(\vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1)}_{-V_1} d\sigma + \iint_{S_2} \rho \vec{V}_2 \underbrace{(\vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2)}_{V_2} d\sigma + \iint_{S_L} \rho \vec{V}_L \underbrace{(\vec{V}_L \cdot \vec{n}_L)}_{0} d\sigma$$

$$\Rightarrow -\rho V_1 \vec{V_1} \iint_{S_1} d\sigma + \rho V_2 \vec{V_2} \iint_{S_2} d\sigma = -\rho V_1 \vec{V_1} S_1 + \rho V_2 \vec{V_2} S_2$$
$$= \rho V_2 \vec{V_2} S_2 - \rho V_1 \vec{V_1} \cdot S_1$$

d'aprés l'équations de continuité pour un tube de courant

$$\rho V S = cte \Rightarrow q_m = \rho_1 V_1 S_1 = \rho_2 V_2 S_2$$

Alors $\Rightarrow$ $\boxed{q_m(\vec{V_2} - \vec{V_1})}$ le premier terme

$\boxed{\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{g} + \vec{F_1} + \vec{F_2} - \vec{R}}$ 2ème terme

donc : $q_m(\vec{V_2} - \vec{V_1}) = M.\vec{g} + \vec{F_1} + \vec{F_2} - \vec{R}$

Par projection sur $\vec{ox}$: $q_m V_2 = -F_2 - R_x$

$$\boxed{R_x = -F_2 - q_m V_2}$$

Par projection sur $\vec{oy}$: $-q_m V_1 = -Mg + F_1 - R_y$

$$\boxed{R_y = F_1 - Mg + q_m V_1}$$

es Types des ecoulements:

A. Un ecoulement permanent :

Un écoulement est dit permanent lorseque le champ des vecteurs vitesse est statique, il ne varie pas dans le temps:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Il ya aussi conservation de débit massique : $q_m(\text{entrée}) = q_m(\text{sortie})$

B. Ecoulement rotationnel et irrotationnel

Si les particules fluides au sein d'un écoulement tournent autour de leurs axes principaux au cours de leurs déplacement est dit "Rotationnel" dans le cas contraire est dit "IRROTATIONNEL"

$$\vec{Rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{0} \quad (\text{IRROTATIONNEL})$$

$$\vec{\nabla}\begin{pmatrix} \delta/\delta x \\ \delta/\delta y \\ \delta/\delta z \end{pmatrix} \wedge \vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{Rot}\,\vec{V} = \left(\frac{\delta V_z}{\delta y} - \frac{\delta V_y}{\delta z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\delta V_z}{\delta x} - \frac{\delta V_x}{\delta z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\delta V_y}{\delta x} - \frac{\delta V_x}{\delta y}\right)\vec{k}$$

Si : $\vec{Rot}\,\vec{V} \neq \vec{0}$ (Rotationnel)

On donne le vecteur tourbillon $\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{Rot}\,\vec{V}}$

- lorseque l'ecoulement est irrotationnel le vecteur vitesse $\vec{V}$ derive d'un potentiel donc il existe une fonction potentiel de vitesse $\phi(x.y.z)$ $\quad \vec{V} = \vec{grad}\,\phi(x.y.z) \Rightarrow \begin{cases} V_x = \frac{\delta\phi}{\delta x} \\ V_y = \frac{\delta\phi}{\delta y} \\ V_z = \frac{\delta\phi}{\delta z} \end{cases}$

lorseque le fluide est incompressible donc :

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0$$

$$\frac{\delta V_x}{\delta x} + \frac{\delta V_y}{\delta y} + \frac{\delta V_z}{\delta z} = 0$$

$$\frac{\delta^2\phi}{\delta x} + \frac{\delta^2\phi}{\delta y} + \frac{\delta^2\phi}{\delta z} = 0 \quad \boxed{\Delta\phi = 0} \Rightarrow \text{L'equation de laplace.}$$

Il faut en conclure que le potentiel des vitesses doit verifier l'équation de Laplace

Ecoulement Laminaire et Ecoulement turbulent:

* Un écoulement est dit "Laminaire" lorseque les particules ont une vitesse parallèle aux parois du contenant

$$Re \leq 2000$$

* Un écoulement est dit "turbulent" lorseque les particules ont une vitesse non parallèle aux parois du contenant, présence des tourbillons (Turbulence) $Re \geq 3000$

Nombre de Reynolds:

Reynolds a montré expérimentalement que le passage d'un type d'écoulement à l'autre (laminaire en turbulent) depend d'un paramètre addimentionnel applé nombre de Reynolds ce nombre ~~se~~ represente les rapports des forces d'inertie au force de viscosité.

$$\boxed{Re = \frac{\rho . V . L}{\mu} = \frac{\rho v . D}{\mu}}$$

L: Langeur caractéristique de l'écoulement "m"

D: Diamètre hydrolique de la conduite "m"

ρ: masse volumique (kg/m^3)

μ: viscosité dynamique (Pa.s)

v: vitesse du fluide (m/s)

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \Longrightarrow Re = \frac{v . D}{\nu}$$

ν: viscosité cinématique (m^2/s)

$Re < 2000$ Laminaire

$Re > 3000$ Turbulent

$2000 < Re < 3000$ Transitoire