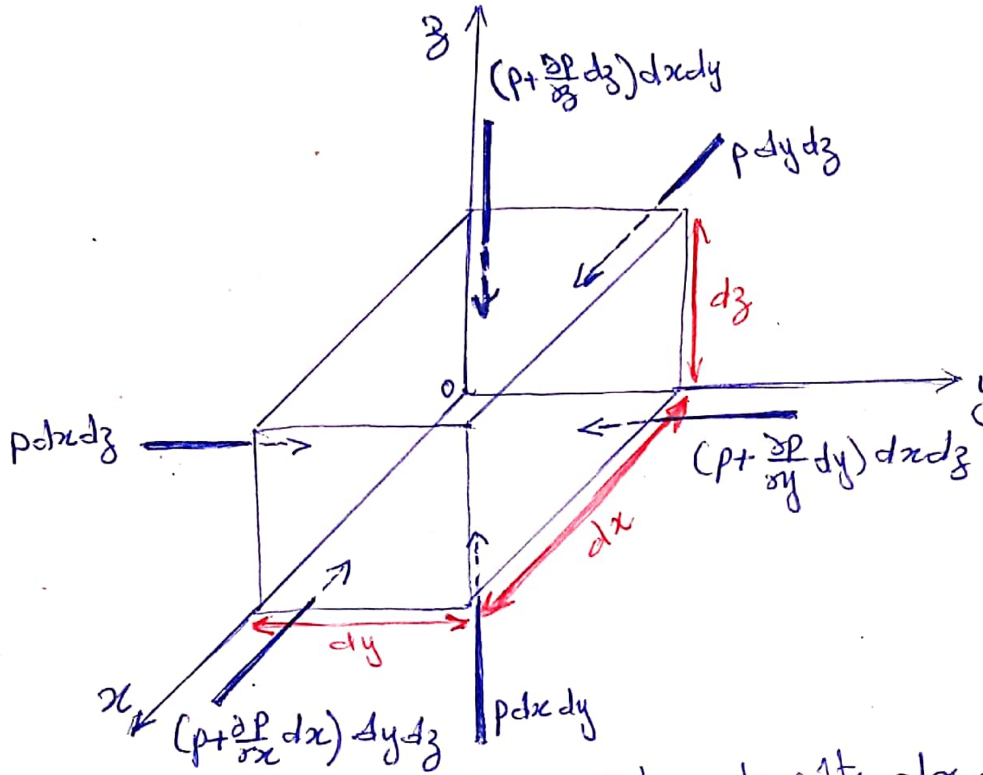
CHAPITRE IV : DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS INCOMPRESSIBLE

IV.1 Equations générales de mouvement (Equation d'EULER)



Considérons un élément parallepipède de côte dx, dy, dz et de volume : $dV = dx\,dy\,dz$

dans un système de coordonnées cartisiennes (o,x,y,z).

D'après la loi fondamentale de la dynamique (loi de Newton)

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} \implies \vec{F_p} + \vec{F_V} = m\vec{\gamma}$$

$$\vec{F_V} = \rho\, dV \vec{F}$$

donc : $\vec{F_p} + \rho\, dV\,\vec{F} = m\vec{\gamma}$ $\quad / \; m = \rho\, dV = \rho\, dx\,dy\,dz$

alors $\vec{F_p} + \rho\, dV \vec{F} = \rho\, dV \vec{\gamma}$

$$\boxed{\vec{F_p} + \rho\, dx\,dy\,dz\,\vec{F} = \rho\, dx\,dy\,dz\,\vec{\gamma}}$$

a/ La projection selon l'axe $\vec{ox}$:

$$p\,dydz - (p + \frac{\partial p}{\partial x}dx)\,dydz + \rho\, dx\,dy\,dz\, F_x = \rho\, dx\,dy\,dz\,\gamma_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,\cancel{dy}\,dz + \rho\,\cancel{dx}\,\cancel{dy}\,dz\,F_x = \rho\,\cancel{dx}\,\cancel{dy}\,dz\,\gamma_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_x = \rho\,\gamma_x \implies \boxed{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x = \gamma_x}$$

b/ de même façons la projection selon l'axe $\vec{oy}$:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_y = \gamma_y$$

c/ finalement la projection selon l'axe $\vec{oz}$:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + F_z = \gamma_z$$

* On peut écrire sous la forme générale suivante:

$$-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) + \vec{F} = \vec{\gamma}$$

$$-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{F} = \vec{\gamma}$$

d'autre part: $\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}V$ (voir page 6)

donc on aura: $\boxed{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}V = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{F}}$ (Equat° d'EULER)

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}U = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}V = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_y \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}W = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + F_z \end{cases}$$

IV-2- Equation de Bernoulli:

D'après l'equation d'Euler:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\vec{\nabla}V = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{F}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 + [(\vec{\nabla}\wedge\vec{V})\wedge\vec{V}) = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$

Si: $\vec{F}$ est une force qui derive d'un potentiel

$\vec{F} = \vec{\nabla}U$. L'equation devient:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 + (\vec{\nabla}\wedge\vec{V})\wedge\vec{V} = \vec{\nabla}U - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$

Le champ de pesanteur $U = -gz$, ce qui entraine

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 + (\vec{\nabla}\wedge\vec{V})\wedge\vec{V} = -\vec{\nabla}(g.z) - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$

lorsque le fluide est incompressible et non visqueux : $\rho = cte$

$$\frac{\partial \vec V}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec\nabla V^2 + (\vec\nabla \wedge \vec V)\wedge \vec V = -\frac{1}{\rho}\vec\nabla(p+\rho g z) \quad / \quad P_g = p+\rho g z$$

$$\frac{\partial \vec V}{\partial t} + \frac{1}{2}\vec\nabla V^2 + (\vec\nabla \wedge \vec V)\wedge \vec V = -\frac{1}{\rho}\vec\nabla P_g$$

$$\frac{\partial \vec V}{\partial t} + (\vec\nabla \wedge \vec V)\wedge \vec V = -\frac{1}{\rho}\vec\nabla P_g - \frac{1}{2}\vec\nabla V^2 = -\frac{1}{\rho}\vec\nabla\left(P_g + \frac{\rho V^2}{2}\right)$$

Si l'écoulement est permanent $\frac{\partial \vec V}{\partial t} = \vec 0$

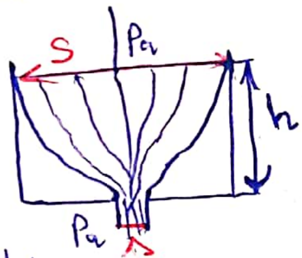
" " " irrotationnel $\mathrm{rot}\,\vec V = \vec\nabla \wedge \vec V = \vec 0$

$$-\frac{1}{\rho}\vec\nabla\left(P_g + \frac{\rho V^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow P_g + \frac{\rho V^2}{2} = cte$$

$$\boxed{p + \rho g z + \frac{\rho V^2}{2} = cte}$$ c'est l'équation de Bernoulli

IV-2.1 Etude de la vidange d'un reservoir

Soit un reservoir de section S ouvert et comportant un orifice de section s ($s << S$)



a/ Calcul de la vitesse théorique de l'écoulement:

appliquons le théorème de Bernoulli entre la surface libre et l'orifice on obtient:

$$p + \rho g z + \frac{\rho V^2}{2} = cte$$

$$P_a + \rho g h + 0 = P_a + 0 + \frac{\rho V_2^2}{2}$$

$$V_2^2 = 2gh \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

* Le debit volumique est : $\boxed{q_v = V \cdot s = s\sqrt{2gh}}$

b/ Calcul du débit réel: $V_{réel} = \varphi_1 \cdot V = \varphi_1\sqrt{2gh}$

$\varphi_1 < 1$: coef de vitesse

$s_{réel} = \varphi_2\, s$

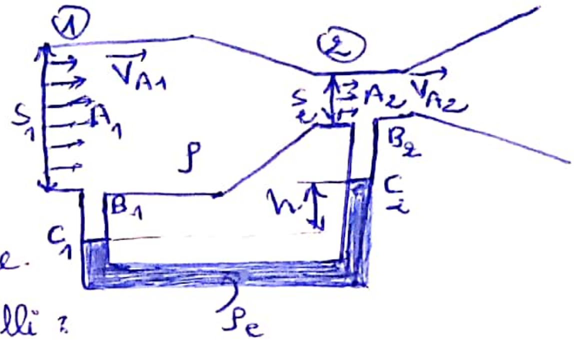
$\varphi_2 < 1$ coef de contraction

donc : Le debit réel vaut : $q_v = V_{réel} \cdot s_{réel} = \varphi_1\varphi_2\, s\sqrt{2gh}$

$\Rightarrow \boxed{q_v = \alpha\, s\sqrt{2gh}}$ / $\alpha = \varphi_1\varphi_2$: coef de débit.

II.2.3 Mésure de débit Tube de Venturi (principe de Venturi) :

Dans un tube de courant d'un écoulement la vitesse de débit augmente la section diminue, alors que la pression diminue en même temps que la section.



* Un écoulement permanent
* Un fluide incompressible
* Un conduit d'axe horizontal et de section lentement variable.

La relation entre (A_1) et (A_2) de Bernoulli :

$$\rho \frac{V_{A_1}^2}{2} + P_{A_1} = \rho \frac{V_{A_2}^2}{2} + P_{A_2} \quad \cdots (1)$$

(sont à la même Z).

la conservation de débit entre 1 et 2

$$\rho V_{A_1} S_1 = \rho V_{A_2} S_2$$

$$\frac{V_{A_2}}{V_{A_1}} = \frac{S_1}{S_2} \Rightarrow \boxed{V_{A_1} = V_{A_2} \frac{S_2}{S_1}}$$

Donc $(1) \Rightarrow P_{A_1} - P_{A_2} = \frac{\rho}{2} V_A^2 \left(1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right) \cdots (2)$

donc : $P_{A_1} > P_{A_2}$ car $S_1 > S_2$ et $V_{A_1} < V_{A_2}$

$\Rightarrow$ La pression au col plus faible qu'à l'entrée de celui-ci

Mesure de débit $\Rightarrow$ mésure de vitesse :

$$(2) \Rightarrow V_{A_2}^2 = \frac{2}{\rho} \frac{P_{A_1} - P_{A_2}}{\left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]}$$

Bernoulli entre les points donne : $P_{A_1} - P_{A_2} = (\rho_e - \rho) g h$

$$\Rightarrow \boxed{V_{A_2}^2 = \frac{2}{\rho} \frac{(\rho_e - \rho) g h}{\left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{A_2} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{(\rho_e - \rho) g h}{\left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]}}}$$

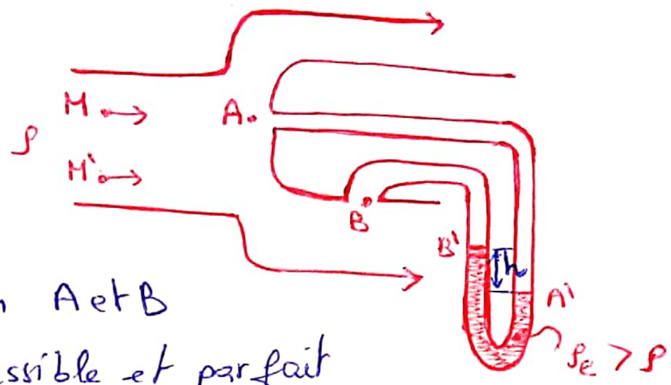
débit réel :

$Q_{A_2} = C_q \cdot \rho \cdot S_2 \, V_{A_2}$

C_q : Coefficient correcteur

$$\Rightarrow \boxed{Q_{A_2} = C_q \cdot \rho \, S_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{(\rho_e - \rho) g h}{(1 - (S_1/S_2)^2)}}}$$

IV. Tube de pitôt :



* 2 prises de pression A et B
* Le fluide incompressible et parfait

Avec : $\begin{cases} V_A = 0 \quad (\text{point d'arrêt}) \\ V_M = V_{M'} = V_B = V \\ Z_M = Z_A \\ Z_{M'} = Z_B \end{cases}$

d'apres la lois hydrostatique on a :

$$\begin{cases} P_{A'} = P_{B'} + \rho_e g h & (1) \\ P_{B'} = P_B + \rho g (Z_B - Z_{B'}) & (2) \\ P_{A'} = P_A + \rho g (Z_A - Z_{A'}) & (3) \end{cases}$$

Et Bernoulli entre M et A :

$$\rho \cancel{\frac{V_A^2}{2}} + \rho g \cancel{Z_A} + P_A = \rho \frac{V_M^2}{2} + \rho g \cancel{Z_M} + P_M$$

Bernoulli entre M' et B :

$$\rho \cancel{\frac{V_B^2}{2}} + \rho g \cancel{Z_B} + P_B = \rho \cancel{\frac{V_{M'}^2}{2}} + \rho g \cancel{Z_{M'}} + P_{M'}$$

Bernoulli entre M et M' :

$$\rho \cancel{\frac{V_M^2}{2}} + \rho g Z_M + P_M = \rho \cancel{\frac{V_{M'}^2}{2}} + \rho g Z_{M'} + P_{M'}$$

On obtient : $\begin{cases} P_A = \dfrac{\rho V_M^2}{2} + P_M \\ P_B = P_{M'} \\ \rho g Z_M + P_M = \rho g Z_{M'} + P_{M'} \Rightarrow P_{M'} = P_M + \rho g (Z_M - Z_{M'}) \end{cases}$

(1), (2) et (3) $\Rightarrow$ $P_A + \rho g (Z_A - Z_{A'}) = P_B + \rho g (Z_B - Z_{B'}) + \rho_e g h$

$$\frac{\rho V_M^2}{2} + \cancel{P_M} + \rho g (Z_A - Z_{A'}) = \cancel{P_M} + \rho g (Z_M - Z_{M'}) + \rho g (Z_B - Z_{B'}) + \rho_e g h$$

$$\rho \frac{V_M^2}{2} + \rho g (z_A - z_{A'}) - \rho g (z_M - z_{M'}) - \rho g (z_B - z_{B'}) - \rho_e g h = 0$$

$$\rho \frac{V_M^2}{2} + \rho g (\cancel{z_A} - z_{A'} - \cancel{z_M} + \cancel{z_{M'}} - \cancel{z_B} + z_{B'}) - \rho_e g h = 0$$

$$\rho \frac{V^2}{2} + \rho g (z_{B'} - z_{A'}) - \rho_e g h = 0$$

$$\rho \frac{V^2}{2} + \rho g h - \rho_e g h = 0$$

$$\Longrightarrow \quad V^2 = 2g \frac{\rho_e - \rho}{\rho} h$$

donc : $\boxed{V = \sqrt{2 g . h \frac{\rho_e - \rho}{\rho}}}$