Université : ZIANE ACHOUR – DJELFA
Faculté : Science Exacte
Département : mathématiques et informatiques

Semestre 2 , Algèbre 2
22/01/2019

Série (2+3)

Exercice 01

Soit $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$.

Exercice 02

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 2z)$$

On appelle $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\beta' = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base et la dimension de $\ker(f)$ et une base et la dimension de $Im(f)$.

Exercice 03

Soit f l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3)$$

Et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.
2. Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.
3. Calculer une base de $\ker(f)$ et une base de $Im(f)$.

Exercice 04

Soit $u: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$u(x) = (x_1 - x_2 + x_3, 0, x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_4)$$

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

1. Donner une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
2. Donner une base (La plus simple possible) de $Im(u)$ et sa dimension.
3. A-t-on $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^4$?
4. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner une base et sa dimension.
5. A-t-on $\ker(u) \oplus E = \mathbb{R}^4$?

Exercice 05

Soit $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par

$$f(x, y, z, t) = (x - 2y, x - 2y, 0, x - y - z - t)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. A-t-on $\ker(f) \oplus Im(f) = \mathbb{R}^4$?

Exercice 06

Considérons les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Si elles ont un sens, calculer les matrices AB, BA, CD, DC, AE, CE.

Exercice 07

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et A^3. Calculer $A^3 - A^2 + A - I$.
2. Exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I.
3. Exprimer A^4 en fonction de A^2, A et I.

Exercice 08

Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ et $\beta = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base β.

Exercice 09

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'application linéaire qui a un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$u(x) = (x_2 - 2x_3, 2x_1 - x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 + 3x_3)$$

1. Déterminer la matrice A de u dans la base canonique.
2. Déterminer une base (a, b) de $\ker(u - Id)$.
3. Donner un vecteur c tel que $\ker(u) = vect(c)$.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base β'.
6. Montrer que $Im(u) = \ker(u - Id)$
7. Montrer que $\ker(u) \oplus Im(u) = \mathbb{R}^3$.