حل السلسلة الثانية مقياس: رياضيات 2

حل التمرين الأول أ.أ.م مراد عبدالقادر

حساب مقلوب المصفوفات:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[adj(A)]^t$$

-1

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

التأكد

$$A^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I} \quad <=> \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

التأكد

$$A^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{I} \quad <=> \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-3

$$C=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\-1&2&-1&3\\-1&-1&1&2\\1&2&1&2\end{bmatrix}\qquad C^{-1}=\frac{-1}{14}\begin{bmatrix}-15&9&-8&2\\10&-6&10&-6\\11&-1&4&-8\\-8&2&-8&2\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}15/14&-9/14&4/7&-1/7\\-5/7&3/7&-5/7&3/7\\-11/14&1/14&-2/7&4/7\\4/7&-1/7&4/7&-1/7\end{bmatrix}\qquad C^{-1}C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

<u>حل التمرين الثاني</u>:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&-1&2\\0&2&3&1&2\\0&0&0&2&1\\0&0&0&4&5\\0&0&1&0&2\end{bmatrix}$$

حساب المحدد:

الخطوة الأولى: استبدال السطر الثالث بالسطر الخامس مع الاحتفاظ بالإشارة (-):

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&-1&2\\0&2&3&1&2\\0&0&1&0&2\\0&0&0&4&5\\0&0&0&2&1\end{bmatrix}$$

الخطوة الثانية: بطرح السطر الخامس (بعد ضربه في العدد 2) من السطر الرابع، مع الاحتفاظ بالإشارة (-)، ومع استرجاع السطر الخامس ينتج:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&-1&2\\0&2&3&1&2\\0&0&1&0&2\\0&0&0&4&5\\0&0&0&0&-3/2\end{bmatrix}$$

وعليه:

det(A)=-(1*2*1*4*(-3/2))=12

ملاحظة : المحدد في المصفوفات المثلثية = حاصل جداء عناصر القطر الرئيسي.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة الأولى: طرح السطر الثاني من السطر الأول مضروب في العدد 2، وباسترجاع السطر الأول ينتج:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -7 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة الثانية: طرح كل من السطرين الثالث والخامس من السطر الأول:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -7 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة الثالثة : طرح كل من السطر الرابع والسطر السادس من السطر الثاني بعد قسمة هذا الأخير على العدد (-3)، وباسترجاع السطر الثاني ينتج:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -7 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 2/3 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 5/3 & 4 & 4/3 \end{bmatrix}$$

الخطوة الرابعة: تبادل بين السطر الثالث والسطر الرابع، ثم بين السطر الرابع الجديد والسطر السادس

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&1\\0&-3&-4&-7&-6&1\\0&0&2/3&2/3&2&4/3\\0&0&2/3&5/3&4&4/3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

الخطوة الخامسة: طرح السطر الرابع من السطر الثالث

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&1\\0&-3&-4&-7&-6&1\\0&0&2/3&2/3&2&4/3\\0&0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

det(B)=-(1*-3*2/3*1*0)=0

حل التمرين الثالث:

حل الأنظمة الخطية باستعمال طريقة غوص

$$(\mathrm{S}_2):\begin{cases}\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3=5\\2\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_3=1\\3\mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_3=4\end{cases}$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&5\\2&1&-1&1\\3&2&-1&4\end{array}\right)\begin{matrix}\dots L_1\\\dots L_2\\\dots L_3\end{matrix}$$

الخطوة الأولى:

$$L_2=L_2-2L_1$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \end{array}$$

الخطوة الثانية:

$$L_3 = L_3 - 3L_1$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \end{array}$$

الخطوة الثالثة:

$$L_3 = L_3 - L_2$$

وبضرب السطرين الثاني والثالث بـ (-) ينتج:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \end{array}$$

الخطوة الرابعة :

$$L_1 = L_1 - L_2 + 2L_3$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \end{array}$$

الخطوة الخامسة :

$$L_2 = L_2 - 3L_3$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \end{array}$$

وتكون الحلول في هذه الحالة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 2$$

$$(S_3): \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \\ \dots L_4 \end{array}$$

الخطوة الأولى:

$$L_2 = L_2 - L_1$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \\ \dots L_4 \end{array}$$

الخطوة الثانية:

$$L_3 = L_3 - 2L_1 \ , \qquad \mathrm{L}_4 = \mathrm{L}_4 - 2\mathrm{L}_1$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \\ \dots L_4 \end{array}$$

الخطوة الثالثة:

$$L_3 = L_3 - L_2$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \\ \dots L_4 \end{array}$$

الخطوة الرابعة : إيجاد عنصر الارتكاز بالنسبة للسطر الثاني بقسمته على العدد (3-)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \\ \dots L_4 \end{array}$$

الخطوة الخامسة:

$$L_4 = L_4 + 5L_2$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -14/3 & 7/3 & 7/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \\ \dots L_4 \end{array}$$

الخطوة الخامسة: إيجاد عنصري الارتكاز للعمودين الثالث والرابع، وذلك بعملية تبادل بين السطرين الثالث والرابع وقسمة السطر الثالث الجديد على العدد (14/3-)، وضرب السطر الرابع الجديد بـ (1-)

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \\ \dots L_4 \end{array}$$

وتصبح الجملة السابقة في هذه الحالة على النحو التالي:

$$(S_3):\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4=1\dots.(1)\\ x_2-\frac{1}{3}x_3+\frac{2}{3}x_4=\frac{2}{3}\dots.(2)\\ x_3-\frac{1}{2}x_4=\frac{-1}{2}\dots.(3)\\ x_4=-2\dots.(4)\end{cases}$$

من 4 نجد :

$$x_4=-2$$

وبالتعويض في 3 و 2 و 1 نجد بقية المجاهيل:

$$x_3=-\frac{3}{2}\ \ ,x_2=x_1=\frac{3}{2}$$

حل التمرين الرابع:

إيجاد قيمة λ حتى يكون للجملة حلا وحيدا؟

$$(S_2):\begin{cases} 2x_1-\mathrm{x}_2=\lambda\\ 3\mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_2=4\end{cases}$$

لكي تقبل هذه الجملة حلا وحيدا يجب يختلف المحدد عن الصفر أي:

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4+3=7\neq 0$$

وعليه فان الجملة السابقة تقبل حلا وحيد وذلك مهما يكن λ ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية R .

$$(\mathrm{S}_3):\begin{cases} \mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2+\mathrm{x}_3=2\\ \lambda\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2-2\mathrm{x}_3=1\\ \mathrm{x}_1+2\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_3=-1\end{cases}$$

لكي تقبل هذه الجملة حلا وحيدا يجب أن يختلف المحدد عن الصفر أي:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \lambda & 1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\lambda & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\lambda$$

وعليه فان هذه الجملة تقبل حلا وحيد إذا وفقط إذا كان:

$$\lambda\neq 0$$