جامعة زيـان عـاشـــور – الجلفة –

كلية العلوم الإقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم الجذع المشترك (السنة الأولى)

أعمال موجهة سنة أولى – رياضيات 2 -

التمرين الأول:

لتكن المصفوفة **A** حيث : $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. أحسب $3A-A^2$
2. استنتج أن A قابلة للقلب وأحسب مقلوبها

الحل:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3A-A^2=3\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=2*I_3$$

يمكننا كتابة ما سبق كما يلي:

$$3A-A^2=A(3I-A)=2I \Leftrightarrow I=A*\frac{1}{2}(3I-A)$$

أي أن:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(3I-A) \Leftrightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

يمكننا التأكد كما يلي:

$$A^{-1} * A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

التمرين الثاني:

لتكن المصفوفة B حيث :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

المطلوب: أحسب مقلوب المصفوفة بطريقتين مختلفتين.

الحل:

1. **الطريقة الأولى.**

$$\langle B|I \rangle = \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 & -1 \end{array} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array} \right\rangle \sim \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array} \right\rangle$$

2. الطريقة الثانية.

1.2. حساب محدد المصفوفة.

$$|B| = \det(B) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = (1-)\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = (-1)(1/2*(-1)-(-1/2)*1/2$$

$$= (-1)(-1/2+1/4) = 1/4$$

2.2 ايجاد المصفوفة المرافقة.

$$b_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \qquad b_{21} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} \qquad b_{31} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$b_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad b_{22} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad b_{32} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$b_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \qquad b_{23} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1 \qquad b_{33} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}$$

نسمي المصفوفة المرافقة بـ: C

$$C = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

أي أن:

$$B^{-1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)}\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}=4*\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{2}\\ 1 & 1 & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 2\\ 4 & 4 & -2\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$$