

Solution TD 2

EXERCICE 1 :

1- Le calcul de la variation d'entropie dans le cas d'évolution isotherme :

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

$$dS = \frac{\partial Q}{T}$$

D'après le premier principe :

$$\Delta U = \partial Q + \partial W$$

$$\Delta U = 0 \quad \text{le cas isotherme}$$

$$\text{donc : } \partial Q = -\partial W$$

$$\partial Q = PdV$$

$$dS = \frac{PdV}{T}$$

$$\Delta S = \int \frac{PdV}{T}$$

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$\Delta S = nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$\Delta S = nR \ln \frac{P_1}{P_2}$$

A.N

$$\Delta S = 1 \times 8.314 \ln(1 \div 20) = -13.38 \text{ J/K}$$

2-Le calcul de la variation d'entropie dans le cas d'évolution isochore :

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

$$dS = \frac{\partial Q}{T}$$

D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U = \partial Q + \partial W$$

$$\partial Q = \Delta U - \partial W$$

$$\partial Q = nc_V dT + PdV \quad \text{LE CAS ISOCHORE } V = \text{CST}$$

$$\partial Q = nc_V dT$$

$$dS = \frac{nc_V dT}{T}$$

$$\Delta S = nc_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}$$

$$\Delta S = nc_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Le cas d'un gaz parfait (isochore) :

$$\frac{T_1}{P_1} = \frac{T_2}{P_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

La valeur de c_V

$$\left\{ \begin{array}{l} c_P - c_V = R \\ \frac{c_P}{c_V} = \gamma \end{array} \right. \quad \text{Relation mayer}$$

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1}$$

A.N

$$\Delta S = 33.45 \text{ J/K}$$

Exercice 2 :

Expression de l'entropie dans les 3 cas :

$$dS = \frac{\partial Q_{rev}}{T} \rightarrow \text{Cas réversible}$$

dS : Grandeur extensive en J/K ou en J/K.mol

$$\Delta S = S_{final} - S_{initial} = \int_{initial}^{final} \frac{\partial Q_{rev}}{T} = \frac{\Delta Q_{rev}}{T}$$

- Cas irréversible :

$$dS > \frac{\partial Q_{irrev}}{T}$$

Donc :

$$dS \geq \frac{\partial Q}{T}$$

La formule de l'entropie a partie de premier principe :

$$\Delta U = Q + W \rightarrow dU = \delta Q + \delta W \rightarrow \delta Q = dU - \delta W$$

$$\partial Q = C_V dT + P dv$$

$$dS = \frac{C_V dT + P dv}{T} \rightarrow dS = \frac{C_V dT}{T} + P \frac{dv}{T} \dots \dots (1)$$

Dans le cas isochore $v = \text{cst}$ $dv = 0$ (BC EVOLUTION ISOCHORE)

$$(1) \rightarrow dS = C_V \frac{dT}{T}$$

$$\Delta S = C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Dans le cas d'un gaz parfait :

$$P_1 v_1 = nRT_1$$

$$P_2 v_2 = nRT_2$$

$$v_1 = v_2$$

$$\frac{nRT_1}{P_1} = \frac{nRT_2}{P_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{nRP_2}{nRP_1} \rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

$$\Delta S = C_v \ln \frac{P_2}{P_1} = -28.82 \text{ J/K}$$

Cas isobare P=cste(CA EVOLUTION ISOBARE)

$$H = U + Pv \rightarrow dH = dU + Pdv + vdP \rightarrow dH = \delta Q + \delta W + Pdv + vdP$$

$$dH = \partial Q - Pdv + Pdv + vdP$$

$$dH = \partial Q + vdP \rightarrow C_p dT = \partial Q + vdP$$

$$\partial Q = C_p dT - vdP$$

$$dS = \frac{\partial Q}{T} = \frac{C_p dT}{T} - \frac{v}{T} dP \rightarrow dP = 0$$

$$dS = C_p \frac{dT}{T}$$

$$dS = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Pour le cas d'un gaz parfait :

$$\frac{nRT_1}{v_1} = \frac{nRT_2}{v_2} \rightarrow P_1 = P_2$$

$$\Delta S = C_p \ln \frac{v_2}{v_1} = 40.33 \text{ J/K}$$

Cas isotherme (AB EVOLUTION ISOTHERME)T=cste donc Q=-W

$$dS = \frac{\partial Q}{T}$$

$$dU = nc_p dT = 0$$

$$dS = \frac{Pdv}{T}$$

Dans le cas d'un gaz parfait :

$$Pv = nRT \rightarrow P = \frac{nRT}{v}$$

$$dS = \frac{nRT}{T} \frac{dv}{v}$$

$$\Delta S = nR \ln \frac{v_2}{v_1} \text{ et } \Delta S = nRT \ln \frac{P_1}{P_2} = -11,51 \text{ J/K}$$

Remarque :

Si $\Delta S \geq 0 \rightarrow$ état moins ordonné à un état plus ordonné.
Si $\Delta S \leq 0 \rightarrow$ état plus ordonné à un état moins ordonné.

La valeur de c_v

$$\left\{ \begin{array}{l} c_p - c_v = R \\ \frac{c_p}{c_v} = \gamma \end{array} \right. \quad \text{Relation mayer}$$

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

EXERCICE 3 :

a) La variation d'entropie s'écrit :

$$dS = \frac{dU - \delta W}{T} = C_v \cdot \frac{dT}{T} + p \cdot \frac{dV}{T} = C_v \cdot \frac{dT}{T} + n \cdot R \cdot \frac{dV}{V}$$

$$dS = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} + n \cdot R \cdot \frac{dV}{V} = n \cdot R \cdot \left[\frac{1}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right].$$

$$\text{En intégrant :} \quad \Delta S_A^B = n \cdot R \cdot \left[\frac{1}{\gamma - 1} \cdot \ln \frac{T_B}{T_A} + \ln \frac{V_B}{V_A} \right].$$

b) À partir de l'équation d'état du gaz parfait $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, on tire $\ln p + \ln V = \ln(n \cdot R) + \ln T$

$$\text{et en dérivant } \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}.$$

On reporte $\frac{dT}{T}$ dans l'expression de dS précédente :

$$dS = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} \cdot \frac{dp}{p} + \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} \cdot \frac{dV}{V} + n \cdot R \cdot \frac{dV}{V}$$

$$dS = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} \cdot \frac{dp}{p} + \frac{n \cdot R \cdot \gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{dV}{V} = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} \cdot \left[\frac{dp}{p} + \gamma \cdot \frac{dV}{V} \right]$$

$$\Delta S_A^B = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} \cdot \left[\ln \frac{p_B}{p_A} + \gamma \cdot \ln \frac{V_B}{V_A} \right].$$

c) On reporte maintenant $\frac{dV}{V}$ dans l'expression initiale de dS :

$$dS = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} + n \cdot R \cdot \frac{dT}{T} - n \cdot R \cdot \frac{dp}{p}$$

$$dS = n \cdot R \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} - n \cdot R \cdot \frac{dp}{p} = n \cdot R \cdot \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} \right]$$

$$\Delta S_A^B = n \cdot R \cdot \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \ln \frac{T_B}{T_A} - \ln \frac{p_B}{p_A} \right].$$

EXERCICE 4 :

Il est possible d'utiliser la relation générale donnant la variation d'entropie en variables T et V mais il peut aussi être commode d'écrire :

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T} \quad \text{avec} \quad \delta Q_{rev} = dH = \frac{n \cdot \gamma \cdot R}{\gamma - 1} \cdot dT \quad \text{à pression constante}$$

$$\Rightarrow dS = \frac{n \cdot \gamma \cdot R}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_A^B = \frac{n \cdot \gamma \cdot R}{\gamma - 1} \cdot \ln \frac{T_B}{T_A}.$$

$$\text{D'autre part :} \quad \begin{cases} n \cdot R = \frac{p_A \cdot V_A}{T_A} & (\text{loi des gaz parfaits}) \\ \frac{p_A \cdot V_A}{T_A} = \frac{p_B \cdot V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \frac{V_B \cdot p_B}{V_A \cdot p_A} = \frac{V_B}{V_A} = 2. \end{cases}$$

$$\text{On déduit :} \quad \Delta S_A^B = \frac{p_A \cdot V_A}{T_A} \cdot \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \cdot \ln \frac{T_B}{T_A}$$

$$\Delta S_A^B = \frac{10^3 \times 10^{-3}}{293} \times \frac{1,33}{1,33 - 1} \times \ln 2 = 0,95 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$