حل السلسلة الثالثة

مقياس: رياضيات 2

أ.أ.م مراد عبدالقادر

حل التمرين الأول

1- كتابة النظام الخطي على الشكل المصفوفي

$$AX = B$$

$$(S_1):\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}\quad (S_2):\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$$

$$(S_3):\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & -1 & 2\\2 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}\quad (S_4):\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\0 & 1 & 3\\2 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\-5\end{bmatrix}$$

2- لإيجاد حلول للأنظمة الخطية السابقة يجب أن يكون محدد المصفوفة A في كل نظام يختلف عن الصفر.

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0\quad \det(A_2)=\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{vmatrix}=-7\neq 0$$

$$\det(A_3)=2\begin{vmatrix}1 & 2\\-1 & 2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

$$\det(A_4)=2\begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 3\end{vmatrix}=-6\neq 0$$

وبما أن محددات المصفوفة A تختلف عن الصفر فان كل الأنظمة الخطية السابقة تقبل حلول.

حل التمرين الثاني:

حل الأنظمة الخطية:

$$(S_1):\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=-1\\2x_1-x_2+2x_3=-4\\4x_1+x_2+4x_3=-2\end{cases}$$

1. طريقة مقلوب المصفوفة

$$AX = B \;=>\; x = A^{-1}b$$

- كتابة النظام الخطي على الشكل المصفوفي:

$$(S_1): \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- حساب مقلوب المصفوفة A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [\mathrm{adj}(A)]^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

- إيجاد الحلول:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -2$$

2. طريقة غوص

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \end{array}$$

الخطوة الأولى:

$$L_2 = L_2 - 2L_1 \quad L_3 = L_3 - 4L_1$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \end{array}$$

الخطوة الثانية:

$$L_3 = L_3 - L_2$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \end{array}$$

الخطوة الثالثة: تحديد عنصر الارتكاز لكل من العمود الثاني والعمود الثالث بقسمتها على -3 و -2 على التوالي:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \end{array}$$

النظام الخطي السابق يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$(S_1): \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \dots (1) \\ x_2 + 2/3x_3 = 2/3 \dots (2) \\ x_3 = -2 \dots\dots\dots\dots (3) \end{cases} :$$

من 3 نجد :

$$x_3 = -2$$

وبالتعويض في 2 و 1 نجد بقية المجاهيل:

$$x_2 = 2 \ , \qquad x_1 = 1$$

3. طريقة كرامر

بما أن محدد المصفوفة A يختلف عن الصفر فان النظام السابق يقبل حل وحيد:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \qquad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det(A)=6$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{6}{6} = 1 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{12}{6} = 2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{6} = -2$$

ملاحظة: الشعاع باللون الأحمر هو عمود الثوابت B في النظام الخطي.

....

$$(S_4): \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

1. طريقة مقلوب المصفوفة

$$AX = B \;\; => X = A^{-1}B$$

- كتابة النظام الخطي على الشكل المصفوفي:

$$(S_4): \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- حساب مقلوب المصفوفة A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} [\mathrm{adj}(A)]^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 11 & -4 & -1 \\ 7 & 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/24 & 1/6 & 7/24 \\ 11/24 & -1/6 & -1/24 \\ 7/24 & 1/6 & -5/24 \end{bmatrix}$$

- إيجاد الحلول:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/24 & 1/6 & 7/24 \\ 11/24 & -1/6 & -1/24 \\ 7/24 & 1/6 & -5/24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/8 \\ 3/8 \\ 7/8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 3/8 \quad x_2 = 3/8 \quad x_3 = 7/8$$

2. طريقة غوص

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ldots L_1 \\ \ldots L_2 \\ \ldots L_3 \end{array}$$

الخطوة الأولى:

$$L_2 = L_2 - 2L_1 \quad L_3 = L_3 - 3L_1$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ldots L_1 \\ \ldots L_2 \\ \ldots L_3 \end{array}$$

الخطوة الثانية: تحديد عنصر الارتكاز للعمود الثاني بقسمته على العد -5:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & -4 & -4 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ldots L_1 \\ \ldots L_2 \\ \ldots L_3 \end{array}$$

الخطوة الثالثة:

$$L_3 = L_3 + 4L_2$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & -24/5 & -21/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ldots L_1 \\ \ldots L_2 \\ \ldots L_3 \end{array}$$

الخطوة الرابعة: قسمة السطر الأخير على العدد 24/5- للحصول على عنصر الارتكاز للعمود الثالث:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 7/8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ldots L_1 \\ \ldots L_2 \\ \ldots L_3 \end{array}$$

النظام الخطي السابق يمكن كتابته على الشكل التالي:

$$(S_1):\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 2 \ldots (1) \\ x_2 - 1/5x_3 = 1/5 \ldots (2) : \\ x_3 = 7/8 \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

من 3 نجد :

$$x_3 = 7/8$$

وبالتعويض في 2 و 1 نجد بقية المجاهيل:

$$x_2 = x_1 = 3/8$$

3. طريقة كرامر

بما أن محدد المصفوفة A يختلف عن الصفر فان النظام السابق يقبل حل وحيد:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(A)=24$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$(S_5):\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

1. طريقة مقلوب المصفوفة

$$AX = B \;=> X = A^{-1}B$$

- كتابة النظام الخطي على الشكل المصفوفي:

$$(S_5):\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- حساب مقلوب المصفوفة A :

$$A^{-1} = \frac{1}{-12}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 & -12 \\ -8 & 8 & -12 & 12 \\ 3 & 6 & 6 & -9 \\ -3 & 6 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & -1 & 1 \\ 2/3 & 2/3 & 1 & -1 \\ -1/4 & -1/2 & -1/2 & 3/4 \\ 1/4 & -1/2 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

- إيجاد الحلول:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & -1 & 1 \\ 2/3 & 2/3 & 1 & -1 \\ -1/4 & -1/2 & -1/2 & 3/4 \\ 1/4 & -1/2 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/3 \\ 10/3 \\ -7/4 \\ -5/4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -5/3 \quad x_2 = 10/3 \quad x_3 = -7/4 \quad x_4 = -5/4$$

2. طريقة غوص

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \dots L_1 \\ \dots L_2 \\ \dots L_3 \\ \dots L_4 \end{array}$$

الخطوة الأولى:

$$L_2 = L_2 - 2L_1 \quad L_3 = L_3 + L_1 \quad L_4 = L_4 - L_1$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -3 & -3 & -1\\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1\end{array}\right)\begin{array}{l}\dots L_1\\ \dots L_2\\ \dots L_3\\ \dots L_4\end{array}$$

الخطوة الثانية:

$$L_3 = L_3 + L_2$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -3 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1\end{array}\right)\begin{array}{l}\dots L_1\\ \dots L_2\\ \dots L_3\\ \dots L_4\end{array}$$

الخطوة الثالثة:

$$L_4 = L_4 - 2L_3$$

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -3 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5\end{array}\right)\begin{array}{l}\dots L_1\\ \dots L_2\\ \dots L_3\\ \dots L_4\end{array}$$

الخطوة الرابعة: إيجاد عنصر الارتكاز للعمود الثاني والرابع بقسمتهما على -3 و 4 على التوالي

$$(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5/4\end{array}\right)\begin{array}{l}\dots L_1\\ \dots L_2\\ \dots L_3\\ \dots L_4\end{array}$$

وتصبح الجملة السابقة في هذه الحالة على النحو التالي:

$$(S_3):\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+x_4=2\ \dots.(1)\\ x_2+x_3+x_4=1/3\ \dots.(2)\\ x_3-3x_4=2\ \dots.(3)\\ x_4=-5/4\ \dots.(4)\end{cases}$$

من 3 نجد :

$$x_4=-5/4$$

وبالتعويض في3 و 2 و 1 نجد بقية المجاهيل:

$$x_3 = -7/4 \quad x_2 = 10/3 \quad x_1 = -5/3$$

3. طريقة كرامر

بما أن محدد المصفوفة A يختلف عن الصفر فان النظام السابق يقبل حل وحيد:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} \quad x_4 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \det(A)=-12$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{20}{-12} = \frac{3}{8}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-40}{-12} = \frac{10}{3}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{21}{-12} = \frac{-7}{4}, \qquad x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{15}{-12} = \frac{-5}{4}$$