الدرس الرابع

les lois de la probabilité discrets: القوانين الاحتمالية المتقطعة

1- المتغير العشوائي: (تذكير) la variable aléatoire

إذا كان لدينا فضاء احتمالي (Ω.f.p)، نسمي المتغير العشوائي الحقيقي كل تطبيق x معرف في Ω وتكون قيمته في R، حيث يأخذ المتغير العشوائي مجموعة من القيم تسمى x(Ω) ، ويكون المتغير العشوائي متقطع إذا كان يأخذ قيما طبيعية أو ينتمي إلى مجموعة الأعداد الطبيعية، كما تكون هذه القيم مجموعة قابلة للعد أومنتهية.

مثال: إذا رمينا قطعة نقد متزنة ثلاثة مرات، تصبح Ω:

$$\Omega=\{ppp.ppf.pfp.pff.fpp.fpf.ffp.fff\}$$

حيث: $\{f$هو الوجه. pهي الكتابة$\}$ ، كما نلاحظ أن : عدد الحلات هو $2^3=8$

إذا اعتبرنا أن المتغير العشوائي x : هو عدد مرات ظهور الوجه f ، فتصبح لدينا مجموعة القيم التي يمكن لهذا المتغير أخذها هي:

$$X(\Omega)=\{0.1.2.3\}$$

العدد 0 يعني عدم ظهور الوجه وهي حالة ppp ، والعدد1 يعني ظهور الوجه مرة واحدة ، ...وهكذا.

ويكون لدينا كذلك :

P(x=0)=1/8 أي إحتمال عدم ظهور الوجه هو 8/1.

P(x=1)=3/8 أي إحتمال ظهور الوجه مرة واحدة هو 8/3.

P(x=3)=3/8 أي إحتمال ظهور الوجه ثلاثة مرات هو 8/3.

ويمكن تلخيص هذا في الجدول التالي :

x	0	1	2	3	$\sum_{x=0}^{3} P(X=x)$
$P(X=x)$	1/8	3/8	3/8	1/8	8/8=1

نسطيع تلخيص اضا هذا الجدول واختزاله في القانون الإحتمالي التالي:

$$P(X=x)=C_3^x.(1/2)^3$$

فمثلا عند حساب احتمال عدم ظهور الوجه نجد:

$$P(X=0)=C_3^0.(1/2)^3=1/8$$

2- دالة التوزيع المتراكمة : la fonction de la répartition

إذا كان لدينا المتغير العشوائي x، نسمي F(x) دالة التوزيع المتراكمة وتعرف بالعلاقة التالية:

$$F_X(x)=F(X=x)=\sum_{x\in x(\Omega)} P(X=x)$$

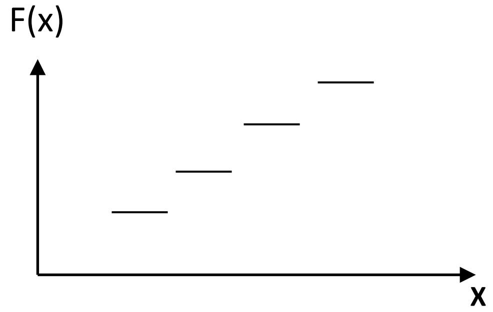
فمثلا في المثال السابق وعند حساب هذه الدالة عند القيمة x=2: (اي تتراكم حتى القيمة 2)

$$F_X(2)=F(X=2)=P(X=2)=\sum_{x=0}^{2} P(X=x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=7/8)$$

<u>خصائص دالة التوزيع:</u>

-1 F(x) دالة متزايدة .

-2 F(x) دالة متدرجة .



-3 F(x) دالة متزايدة نحو اليمين .

-4 $\boldsymbol{P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)}$

-5 $\boldsymbol{P}\big(\boldsymbol{X} > a) = 1 - P(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{a})\big)$

-6 $\lim\limits_{n \to -\infty} \boldsymbol{F(x) = 0} \qquad \lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{F(x) = 1}.$

فمثلا في المثال السابق :

-1 $\boldsymbol{P(0 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 0) = F(2) - F(0) = \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = 6/8}$

-2 $\Big(\boldsymbol{P(X} > 2) = 1 - P(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{2}) = \boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{8}} = \boldsymbol{1/8}\Big)$

-3 **<u>الأمل الرياضي (التوقع) :</u> espérance mathématique**

إذا كان لدينا المتغير العشوائي x، نسمي العدد E(x) الأمل الرياضي ويعرف بالعلاقة التالية:

$$\mathrm{E(x)} = \sum_{x \in x(\Omega)} \mathrm{x.P(X = x)}$$

في المثال السابق يكون الامل الرياضي أو القيمة المتوقعة:

$$\mathrm{E(x)} = \sum_{x=0}^{3} \mathrm{x.P(X = x) = 0.P(X = 0) + 1.P(X = 1) + 2.P(X = 2) + 3.P(X = 3)}$$

$$\sum_{x=0}^{3} \mathrm{x.P(X = x) = 0.(1/8) + 1.(3/8) + 2.(3/8) + 3.(1/8)} = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

القيمة المتوقعة لظهور عدد الاوجه هو 1.5 .

خصائص الامل الرياضي:

إذا كان لدينا المتغير العشوائي المتقطع X و a و b عددين حقيقيين:

1- $E(a.x) = a.E(x)$

2- $E(b) = b$

3- $E(a.x + b) = a.E(x) + b$

4- التباين : la variance

إذا كان لدينا المتغير العشوائي x، يعرف التباين V(x) بالعلاقة التالية:

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = E(x - E(x))^2$$

بالنسبة للمثال نحسب التباين :

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2$$

نحسب فقط $E(x^2)$ لان الامل الرياضي محسوب $E(x) = 1.5$

$$E(x^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2.P(X = x) = 0^2.P(X = 0) + 1^2.P(X = 1) + 2^2.P(X = 2) + 3^2.P(X = 3)$$

$$= \left(\frac{3}{8}\right) + 4.\left(\frac{3}{8}\right) + 9.\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{24}{8} = 3$$

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = 3 - (1.5^2) = 3 - 2.25 = 0.75$$

5- العزوم التباين : les moments

أ- إذا كان لدينا المتغير العشوائي x، يعرف العزم البسيط من الدرجة k بالعلاقة التالية:

$$M_k = E\left(x^k\right) = \sum_{x \in x(\Omega)} x^k.P(X = x)$$

ب- يعرف العزم المركزي من الدرجة k بالعلاقة التالية:

$$\mu_k = E(x - E(x))^k = \sum_{x \in x(\Omega)} (x - E(x))^k.P(X = x)$$

ملاحظة:

لاحظ الامل الرياضي هو عزم بسيط من الدرجة الاولى: $M_1 = E(x^1)$

والتباين هو عزم مركزي من الدرجة الثانية : $\mu_2 = E(x - E(x))^2 = V(x)$