جامعة زيان عاشور الجلفة

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

محاضرات في:

الرياضيات المالية

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية جذع مشترك

من إعداد: د/ أحمد زيطـــوط

السنة الجامعية: 2018-2019

فهرس المحتويات

3- تاريخ الاستحقاق المتوسط

4- تكافئ الأوراق التجارية بالفائدة المركبة

الفصل الخامس: الدفعات المتساوية

1- الدفعات الثابتة العادية (نهاية المدة)

2- دفعات الاستثمار (بداية المدة)

الفصل السادس: استهلاك القروض

1- القروض ذات المصدر الوحيد

2- استهلاك القروض بدفعات ثابتة

3- استهلاك القروض باستهلاكات ثابتة

مقدمة:

تعد الرياضيات المالية من بين الأدوات الأساسية في المعاملات المالية لدى البنوك ، لما تقدمه من قواعد حسابية تساعد على إيجاد أفضل الاختيارات من بين العروض البنكية لعمليات القروض، وعمليات إيداع الأموال من خلال الفوائد المحققة في كل حالة.

وتعتبر الفائدة البسيطة أو الفائدة المركبة الشائعة التداول في البنوك والمؤسسات المالية والمصرفية؛ إضافة إلى عمليات الخصم، والدفعات واستهلاك القروض من المواضيع التي تناولتها الرياضيات المالية.

إن تطرقنا لهذه المواضيع إنما هو من باب المعرفة فقط، وليس تشجيعا لمثل هذه المعاملات المالية التي تعتبر محرمة شرعا، لما تترتب عن عمليات الإيداع أو الحصول على قروض فوائد ربوية.

كما نأمل أن تساعد هذه المطبوعة الطلبة الجامعيين على فهم واستيعاب هذه المواضيع.

الدكتور: أحمد زيطوط

الفصل الأول:الفائدة البسيطة

1- تعريف الفائدة البسيطة

هي أجرة المال المقترض من طرف البنوك لزبائنها من خلال عقد بين الطرفين، أو هي العائد لصاحب الأموال جراء إيداعه هذه الأموال في حسابه البنكي بفوائد.

و يتحدد مبلغ الفائدة بثلاث عناصر وهي: المبلغ المودع، مدة المعاملة أو القرض ومعدل الفائدة.

وتأخذ هذه العناصر الرموز التالية:

- **الفائدة البسيطة:** I
- **المبلغ المودع أو المقترض:** C_0
- **معدل الفائدة:** i
- **المدة الزمنية بالسنوات لاستثمار المال أو إقراضه:** n

1-1: حساب الفائدة البسيطة: تشكل العناصر الثلاث القانون الأساس لحساب الفائدة

$$I = C_0 \times t\,\% \times n$$

حيث أن $i = t\,\%$

$$I = C_0 \times i \times n$$

تكون n **بالسنوات و** i **معدل فائدة سنوي**

مثال: لو افترضنا ان شخصا قام بإيداع 10000 دج في البنك، لمدة 3 سنوات، بمعدل فائدة بسيطة 4% سنويا.

الحل:

$$I_1 = C_0 \times t\,\% \times n = 10000 \times 4\,\% = 400\ DA$$

$$I_2 = 10000 \times 4\% = 400\ DA$$

$$I_3 = 10000 \times 4\% = 400\ DA$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I = 10000 \times 4\% \times 3 = 1200\ DA$$

ملاحظة: إذا كانت لدينا المدة بالأشهر أو بالأيام ومعدل الفائدة سنوي، فنقوم بتحويل المدة إلى السنوات.

مثال:

*** المدة بالأشهر:**

$C_0 = 10000 \qquad i = 3\% \qquad n =$ 8 أشهر

$$I = 10000 \times 3\% \times \frac{8}{12} = 200 \text{ DA}$$

*** المدة بالأيام:**

- **الفائدة التجارية:**

$$I = C_0 \times i \times \frac{n}{360}$$

- **الفائدة للسنة البسيطة:**

$$I = C_0 \times i \times \frac{n}{365}$$

- **الفائدة للسنة الكبيسة:**

$$I = C_0 \times i \times \frac{n}{366}$$

- **إذا كان رقم السنة من مضاعفات الرقم 4 فتعتبر السنة كبيسة، والعكس يدل على أنها سنة بسيطة.**
- **حساب المدة المحصورة بين تاريخين: في هذه الحالة لا نحسب تاريخ الإيداع ونحسب تاريخ الاستحقاق.**

مثال: تم إيداع مبلغ بتاريخ 2018/01/24 إلى غاية 2018/06/30

السنة 2018 سنة بسيطة وبالتالي عدد أيام شهر فيفري 28 يوم.

$$n = (31-24)+28+31+30+31+30$$

$$n = 157$$

2- الجملة أو القيمة المكتسبة:

الجملة هي المبلغ الأصلي مضاف إليه الفائدة المحصل عليها في نهاية مدة الإيداع أو القرض:

ونرمز لها بـ : C

$$C = C_0 + I$$

$$C = C_0 + (C_0 \times i \times n)$$

$$C = C_0 \times (1 + (i \times n))$$

مثال: اقترض شخص مبلغ 20000 دج لمدة 3 سنوات وبمعدل فائدة بسيطة 5%.

حساب قيمة الفائدة و جملة المبلغ في نهاية مدة القرض.

$$I = C_0 \times i \times n$$

$$I = 20000 \times \frac{5}{100} \times 3 = 3000$$

$$C = 20000 + 3000 = 23000$$

3- الفائدة الحقيقية والفائدة التجارية:

- **نحسب الفائدة الحقيقية على أساس 365 يوم بالنسبة للسنة البسيطة و 366 بالنسبة للسنة الكبيسة. ونرمز لها بـ: I_R**

$$I_R = C_0 \times i \times \frac{n}{365}$$

$$I_R = C_0 \times i \times \frac{n}{366}$$

- **أما الفائدة التجارية تحسب على أساس عدد أيام السنة 360 يوم، وتستعمل في البنوك التجارية. ونرمز لها بـ: I_C**

$$I_C = C_0 \times i \times \frac{n}{360}$$

3-1- العلاقة بين الفائدة الحقيقية والفائدة التجارية:

من خلال عملية قسمة الفائدة الحقيقية على الفائدة التجارية، نتحصل على العلاقة بين الفائدتين.

بمعنى حساب : $\frac{I_R}{I_c}$

$$I_R = C_0 \times i \times \frac{n}{365} \qquad I_C = C_0 \times i \times \frac{n}{360}$$

$$\frac{IR}{IC} = \frac{C0 \times i \times \frac{n}{365}}{C0 \times i \times \frac{n}{360}}$$

$$= \frac{360}{365} = \frac{72}{73}$$

$$\frac{IR}{IC} = \frac{72}{73} \rightarrow I_C = I_R \times \frac{73}{72}$$

$$I_R = I_C \times \frac{72}{73}$$

ونستطيع أيضا إجراء مقارنة بين الفائدتين بعملية الطرح:

$$I_C - I_R = I_C - I_C \times \frac{72}{73}$$

$$I_C - I_R = I_C \times \left(1 - \frac{72}{73}\right)$$

$$I_C - I_R = I_C \times \frac{1}{73}$$

أو

$$I_C - I_R = I_R \times \frac{73}{72} - I_R$$

$$I_C - I_R = I_R \times \left(\frac{73}{72} - 1\right)$$

$$I_C - I_R = I_R \times \frac{1}{72}$$

معناه أن الفائدة التجارية تزيد عن الفائدة الحقيقية بـ $\frac{1}{72}$ من الفائدة الحقيقية.

$$I_C = I_R \left(1 + \frac{1}{72}\right)$$

مثال:

إذا كان الفرق بين الفائدة الحقيقية والتجارية لمبلغ أودع في البنك لمدة 185 يوم، هو 52.797 دج وكان معدل الفائدة المطبق خلال هذه الفترة يساوي 10% سنويا.

أحسب المبلغ المودع في البنك

$$I_C - I_R = I_R \times \frac{1}{72} = 52.797$$

$$I_R = 52.797 \times 72 = 3801.38401$$

$$I_C = I_R + 52.797$$

$$I_C = 3801.38401 + 52.797 = 3854.181$$

$$I_C = C_0 \times i \times \frac{n}{360} \rightarrow C_0 = I_C \times \frac{360}{i \times n}$$

$$C_0 = \frac{3854.181 \times 360}{0.1 \times 185} \qquad C_0 = 75000$$

مثال:

أودع شخص مبلغ قدره 54000 دج لمدة 80 يوم ، بمعدل فائدة بسيطة ، فبلغت قيمة الفائدة التجارية لهذا المبلغ 1380 دج .

حدد الفائدة الحقيقية لهذا المبلغ ، ثم أحسب معدل الفائدة المطبق.

$$I_C - I_R = I_C \times \frac{1}{73}$$

$$I_R = I_C - I_C \times \frac{1}{73} \rightarrow I_R = I_C \left(1 - \frac{1}{73}\right)$$

$$I_R = 1380 \times \left(1 - \frac{1}{73}\right) \rightarrow I_R = 1361.69$$

$$I_C = C_0 \times i \times \frac{n}{360} \rightarrow i = \frac{I_c}{C_0 \times i \times \frac{n}{360}}$$

$$i = \frac{1380 \times 360}{54000 \times 80} \rightarrow i = 11.5\%$$

4- حساب الفائدة البسيطة بطريقة النمر والقاسم:

تستعمل طريقة النمر والقاسم لحساب الفائدة البسيطة لما تكون المدة بالأيام فقط.

انطلاقا من العلاقة العامة للفائدة التجارية البسيطة $I_C = C_0 \times i \times \frac{n}{360}$

$$I_C = C_0 \times t \times \frac{n}{36000} \rightarrow I_C = C_0 \times n \times \frac{t}{36000}$$

$$I_C = \frac{N}{D}$$

حيث N: النمر= المبلغ × عدد الأيام

و D: القاسم = $\frac{36000}{t}$

في حالة وجود مجموعة من الفوائد:

$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots\dots\dots + I_n$$

$$\frac{N1}{D} + \frac{N2}{D} + \frac{N3}{D} + \dots\dots + \frac{Nn}{D} \rightarrow I_T = \sum_{i=1}^{n} \frac{Ni}{D}$$

5- الفائدة المسبقة والمعدل الحقيقي للإيداع:

من الممكن الحصول على الفائدة الناتجة عن إيداع رأس مال مسبقا من طرف البنك في يوم الإيداع أو عند توقيع عقد القرض أو المعاملة، حيث أن صاحب رأس المال عند حصوله على الفائدة البسيطة المسبقة، يكون قد أودع المبلغ المودع منقوص منه الفائدة المفروض الحصول عليها في نهاية مدة الإيداع، بعد انتهاء مدة الإيداع يتحصل صاحب رأس المال على المبلغ المودع كلية بدون فائدة.

فإذا كان المبلغ المودع هو C_0، وما تحصل عليه من فائدة بسيطة مسبقة I، وعدد أيام الإيداع هو n

ويكون المبلغ المودع فعلا هو $C_0`$

$$I = C_0 \times t \times \frac{n}{36000} \quad \text{........(1)}$$

$$C_0` = C_0 - I = C_0 - (C_0 \times t \times \frac{n}{36000}) = C_0\,(1 - (t \times \frac{n}{36000}))$$

$$I = C_0` \times t` \times \frac{n}{36000} = C_0\,(1 - (t \times \frac{n}{36000})) \times t` \times \frac{n}{36000} \text{.......(2)}$$

$$(1) = (2)$$

$$C_0 \times t \times \frac{n}{36000} = C_0\,(1 - (t \times \frac{n}{36000})) \times t` \times \frac{n}{36000}$$

$$t` = \frac{C_0 \times t \times \frac{n}{36000}}{C_0\,(1 - (t \times \frac{n}{36000})) \times \frac{n}{36000}}$$

$$\boxed{t` = \frac{t}{1 - (t \times \frac{n}{36000})}}$$

أو نحسب بالطريقة المباشرة من المعادلة العامة للفائدة:

$$I = C_0` \times t` \times \frac{n}{36000} \rightarrow t` = \frac{I \times 36000}{C_0` \times n}$$

$$I = C_0 \times t \times \frac{n}{36000}$$

مثال:

تم إيداع مبلغ 75600 دج في بنك لمدة 90 يوم بمعدل فائدة مسبق مقدر بـ 8%.

أحسب معدل الفائدة الفعلي لهذه العملية بطريقتين.

الطريقة 1:

$$t` = \frac{t}{1 - (t \times \frac{n}{36000})}$$

$$t` = \frac{8}{1 - (8 \times \frac{90}{36000})} \rightarrow t` = 8.16$$

الطريقة 2:

$$t` = \frac{I \times 36000}{C_0^` \times n}$$

$$I = C_0 \times t \times \frac{n}{36000}$$

$$I = \frac{75600 \times 8 \times 90}{36000} \rightarrow I = 1512$$

$$t` = \frac{1512 \times 36000}{(75600 - 1512) \times 90} \rightarrow t` = 8.16$$

الفصل الثاني: الخصم

1- تعريف الخصم:

هو مبلغ من المال يتنازل عنه الدائن للمدين من القيمة الاسمية للدين المستحق، في تاريخ استحقاق معين، في مقابل حصوله على دينه قبل تاريخ استحقاق الدين.

2- عناصر الخصم هي:

1- الخصم E : وهو الفرق بين القيمة الاسمية والقيمة الحالية للدين أو الورقة التجارية.

2- القيمة الاسمية V_n : وهي القيمة المستحقة الدفع في تاريخ معين.

3- معدل الخصم i : وهو النسبة المئوية التي تستخدم في حساب قيمة الخصم ، وعادة يحددها البنك المركزي.

4- مدة الخصم n : وهي المدة الفاصلة بين تاريخ استحقاق الدين أو الورقة التجارية وتاريخ الخصم، والمدة تكون دائما بالأيام.

5- القيمة الحالية V_a : وهي القيمة المستحقة في تاريخ الخصم الحقيقي.

6- القيمة الحالية التجارية V_{ac} : وهي القيمة المستحقة في تاريخ الخصم التجاري.

1-2 علاقات الخصم:

$$E = V_n \times i \times n = \frac{Vn \times t \times n}{36000} = \frac{Vn \times n}{D}$$

لدينا: $D=\frac{36000}{t}$

$$E = V_n - V_a$$

مثال:

ورقة تجارية قيمتها الاسمية 19800 دج ، تاريخ استحقاقها 25 جوان، تم خصمها بتاريخ 10 مارس لدى البنك من نفس السنة، مع العلم أن معدل الخصم 10 %.

حساب مبلغ الخصم والقيمة الحالية للورقة التجارية.

- **حساب مبلغ الخصم:**

$$E = V_n \times i \times \frac{n}{360}$$

$$E = \frac{19800 \times 0.1 \times 107}{360} \qquad E = 588.5$$

- **حساب القيمة الحالية للورقة التجارية:**

$$V_a = V_n - E \qquad V_a = 19800 - 588.5$$

3- أنواع الخصم:

- **الخصم التجاري: وهو الخصم المستعمل في البنوك التجارية في معاملاتها، وهو يحسب على أساس القيمة الاسمية للدين أو الورقة التجارية.**

ونرمز له بـ E_c

$$E_c = V_n \times i \times \frac{n}{360}$$

$$E_c = V_n \times t \times \frac{n}{36000}$$

$$\boxed{E_c = \frac{Vn \times n}{D}}$$

حساب القيمة الحالية التجارية بالخصم التجاري:

$$V_{ac} = V_n - E_c \quad \rightarrow V_{ac} = V_n - \frac{Vn \times n}{D}$$

$$\boxed{V_{ac} = V_n \times \frac{D-n}{D}}$$

- **الخصم الحقيقي: وهو قليل الاستعمال، ويحسب على أساس القيمة الحالية، ويحسب أيضا على أساس القيمة الاسمية، وقيمته أقل من الخصم التجاري.**

ونرمز له بـ E_R

$$E_R = V_a \times i \times \frac{n}{360}$$

$$E_R = V_a \times t \times \frac{n}{36000}$$

$$\boxed{E_R = \frac{Va \times n}{D}}$$

أو نحسب الخصم الحقيقي بدلالة القيمة الاسمية:

$$V_a = V_n - E_R \rightarrow V_n = V_a + E_R = V_a + \frac{Va\times n}{D} = V_a \times (1+\frac{n}{D})$$

$$V_n = V_a \times (1+\frac{n}{D}) = V_a \times (\frac{D+n}{D}) \longrightarrow V_a = V_n \times \frac{D}{D+n}$$

$$E_R = \frac{Va\times n}{D} \quad \rightarrow \quad E_R = \frac{Vn \times \frac{D}{D+n} \times n}{D} \longrightarrow E_R = \frac{Vn \times D \times n}{D \times (D+n)}$$

$$\boxed{E_R = V_n \times \frac{n}{D+n}}$$

حساب القيمة الحالية بالخصم الحقيقي:

$$V_n = V_a + E_R \rightarrow V_n = V_a + V_a \times \frac{n}{D+n}$$

$$V_n = V_a \times \frac{D+n}{D} \rightarrow \qquad \boxed{V_a = V_n \times \frac{D}{D+n}}$$

مثال: ورقة تجارية قيمتها الاسمية 22500 دج ، تاريخ استحقاقها 31 جويلية ، تم خصمها لدى البنك بتاريخ 11 ماي من نفس السنة، بمعدل خصم 6%.

أحسب الخصم التجاري والخصم الحقيقي، ثم القيمة الحالية والقيمة الحالية التجارية.

لحساب الخصم التجاري: نبدأ بحساب مدة الخصم

$n=(31-8)+30+31 \qquad n= 84$ يوم

ثم نحسب القاسم: D

$$D=\frac{36000}{t} \qquad D=\frac{36000}{6} \qquad D = 6000$$

$$E_c = \frac{Vn \times n}{D} = \quad E_c = \frac{22500 \times 84}{6000} \qquad\qquad E_c = 315$$

$$E_R = V_n \times \frac{n}{D+n} = \frac{22500 \times 84}{6000+84} \qquad E_R = 310.65$$

$V_a = V_n - E_R = 22500 - 310.75$ $V_a = 22189.25$

$V_{ac} = V_n - E_c = 22500 - 315$ $V_{ac} = 22185$

1-3 العلاقة بين الخصم التجاري والخصم الحقيقي:

عن طريق عملية الطرح: $E_c - E_R$

$$E_c - E_R = \frac{Vn \times n}{D} - V_n \times \frac{n}{D+n}$$

$$E_c - E_R = V_n \times \left(\frac{n}{D} - \frac{n}{D+n}\right) = V_n \times \frac{(D+n) \times n - (n \times D)}{D(D+n)}$$

$$E_c - E_R = V_n \times n \times \frac{n}{D(D+n)}$$

$$\boxed{E_c - E_R = V_n \times \frac{n^2}{D(D+n)}}$$

4- الآجيو: هو مجموع التكاليف الإجمالية التي يتحملها صاحب الورقة التجارية المراد خصمها لدى البنك.

وهي عبارة عن قيمة الخصم التجاري، مضاف إليه عمولة ثابتة، والرسم على القيمة المضافة على كل من الخصم التجاري والعمولة.

ونرمز للآجيو بـ AGIO والعمولة الثابتة بـ Comf

$$AGIO\ H.T = E_c + Comf$$

$$T.V.A\ 19\% = (E_c + Comf) \times 19\%$$

$$AGIO\ T.T.C = E_c + Comf + (E_c + Comf) \times 19\%$$

ملاحظة: على سبيل المثال في البنك الوطني الجزائري، معدل الخصم = 8.25%

والعمولة الثابتة = 200 دج ، ويتم مراجعة قيمتها سنويا.

بعد ما يطرح البنك التجاري قيمة الآجيو من القيمة الاسمية للورقة التجارية، يتحصل صاحب الورقة التجارية على صافي القيمة للورقة، ويتحصل البنك على قيمة الآجيو.

$V_{nette} = V_n$ - AGIO T.T.C

مثال:

بتاريخ 22 جويلية ، تم خصم ورقة تجارية قدرها 45000 دج ، تاريخ استحقاقها في 15 سبتمبر، مع شروط الخصم التالية: معدل خصم 4% ، عمولة ثابتة = 200 دج ، والرسم على القيمة المضافة= 19%.

أحسب صافي القيمة لهذه الورقة التجارية:

AGIO H.T = E_c + Comf

$$E_c = \frac{Vn \times n}{D}$$

$$D = \frac{36000}{t} \quad , \quad D = \frac{36000}{4} \quad , \quad D = 9000$$

n = (31-22)+31+15 n = 55 يوم

$$Ec = \frac{45000 \times 55}{9000}$$

E_c = 275 DA

AGIO H.T = 275 + 200 = 475 DA

T.V.A 19% = 475 × 19% = 90.25 DA

AGIO T.T.C = 475 + 90.25 = 565.25 DA

$V_{nette} = V_n$ - AGIO T.T.C

V_{nette} = 45000 – 565.25 = 44434.75 DA **صافي القيمة لهذه الورقة التجارية**

1-4 المعدل الحقيقي للخصم:

يحسب هذا المعدل على أساس التكلفة الإجمالية للخصم أو ما يسمى الآجيو.

فإذا افترضنا أن معدل الخصم الاسمي (t) المعلن من طرف البنوك، وبالمقابل المعدل يتغير إذا أضفنا التكاليف الأخرى من عمولة ورسم على القيمة المضافة، وبالتالي يصبح لدينا معدل خصم حقيقي(`t).

$$AGIO\ T.T.C = V_n \times t` \times \frac{n}{36000}$$

$$\boxed{t` = AGIO\ T.T.C \times \frac{36000}{Vn \times n}}$$

مثال:

من المثال السابق، نحسب المعدل الحقيقي للخصم.

$$t` = AGIO\ T.T.C \times \frac{36000}{Vn \times n}$$

$$t` = \frac{565.25 \times 36000}{45000 \times 55} \qquad t` = 8.22$$

ملاحظة: المعدل الحقيقي للخصم يكون دوما أكبر من معدل الخصم الاسمي، ويسمح لنا المعدل الحقيقي بالمقارنة بين الشروط المعروضة من طرف البنوك.

الفصل الثالث: الفائدة المركبة

1- تعريفها:

الفائدة المركبة أكثر شيوعا واستعمالا من طرف البنوك، وهي تختلف عن فائدة البسيطة التي تحسب ، ولا تضاف إلى رأس المال، بل تدفع إلى صاحبها في نهاية مدة القرض، أما بالنسبة للفائدة المركبة فتحسب الفائدة لكل فترة زمنية، وتضاف إلى رأس المال في الفترة الزمنية التالية، ويجري عليها فائدة حسب معدل الفائدة المقررة لذلك.

2- عناصر الفائدة المركبة:

وهي نفس العناصر التي تحدد الفائدة البسيطة، وهي:

- المبلغ الأصلي وهو عبارة عن أصل الدين أو المبلغ المودع: C_0
- معدل الفائدة: i
- المدة الزمنية بالسنوات لاستثمار المال أو إقراضه: n

3- حساب الجملة: C

باعتبار أن المودع أو المقرض للأموال يهدف إلى تحصيل مبالغ جديدة، فان الحاصل في نهاية الفترة أو السنة يسمى الجملة، أي هي القيمة المكتسبة الناتجة عن جمع المبلغ الأصلي مع الفائدة المركبة المحصل عليها للفترة.

نفترض أنه لدينا عدد فترات القرض أو المعاملة يساوي n فترة.

الفترات	رأس المال في بداية الفترة	فائدة الفترة I	القيمة المكتسبة في نهاية الفترة (الجملة) C
1	C_0	$C_0 \times i$	$C_0 + C_0 \times i = C_0 \times (1+i)$
2	$C_0 \times (1+i)$	$C_0 \times (1+i) \times i$	$C_0 \times (1+i) + C_0 \times (1+i) \times i = C_0 \times (1+i)(1+i) = C_0 \times (1+i)^2$
3	$C_0 \times (1+i)^2$	$C_0 \times (1+i)^2 \times i$	$C_0 \times (1+i)^2 (1+i) = C_0 \times (1+i)^3$
.			
.			
n	$C_0 \times (1+i)^{n-1}$	$C_0 \times (1+i)^{n-1} \times i$	$C_0 \times (1+i)^{n-1} \times (1+i) = C_0 \times (1+i)^n$

نلاحظ من الجدول أن فوائد السنوات أو الفترات تكون في ما بينها متتالية هندسية متزايدة، حدها الأول $C_0 \times i$، وأساسها $(1+i)$، وعدد حدودها n.

وأن جمل أو القيم المكتسبة للفترات أو السنوات تمثل أيضا متتالية هندسية، حدها الأول $C_0 \times (1+i)$، أساسها $(1+i)$، وعدد حدودها n.

$$\boxed{C = C_0\,(1+i)^n}$$

مثال:

أودعت مؤسسة مبلغ 84500 دج ببنك، بمعدل فائدة مركبة 8 % سنويا، لمدة 6 سنوات. أحسب:

1- **الفائدة المحصل عليها في نهاية السنة الأولى من الإيداع.**
2- **الفائدة المحصل عليها في السنة الرابعة فقط.**
3- **الجملة الناتجة عن الإيداع في نهاية المدة.**

الحل:

1- $I_1 = C_0 \times i \times n = 84500 \times \frac{8}{100} \times 1 \rightarrow I_1 = 6760 \text{ DA}$

2- $I_{4\text{فقط}} = C_0 \times (1+i)^3 \times i = 84500 \times \left(1+\frac{8}{100}\right)^3 \times \frac{8}{100} \rightarrow I_{4\text{فقط}} = 8515.65 \text{ DA}$

3- $C_6 = C_0 \times (1+i)^6 = 84500 \times \left(1+\frac{8}{100}\right)^6 \rightarrow C_6 = 134090.85 \text{ DA}$

حساب مدة المعاملة: n

لحساب المدة الزمنية n للمعاملة المالية سواء كانت إيداع أو قرض، فتحسب باستعمال اللوغاريتم النيبيري Ln .

لدينا جملة المبلغ تساوي:

$$C = C_0 \times (1+i)^n$$

$$\frac{C}{C_0} = (1+i)^n \rightarrow Ln\frac{C}{C_0} = Ln(1+i)^n \rightarrow Ln\frac{C}{C_0} = n \times Ln(1+i)$$

$$\rightarrow n = Ln\frac{C}{C_0} \div Ln(1+i) \rightarrow \boxed{n = \frac{Ln\,C - Ln\,C_0}{Ln(1+i)}}$$

حساب المبلغ الأصلي أو المودع: C_0

$$\boxed{C_0 = \frac{C}{(1+i)^n}}$$

$C = C_0 \times (1+i)^n$

$$\boxed{C_0 = C \times (1+i)^{-n}}$$

حساب معدل الفائدة المركبة: i

$C = C_0 \times (1+i)^n$

$\frac{C}{C_0} = (1+i)^n \rightarrow \sqrt[n]{\frac{C}{C_0}} = (1+i) \rightarrow$ $\boxed{i = \sqrt[n]{\frac{C}{C_0}} - 1}$ $\boxed{i = \left(\frac{C}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$

مثال:

تم إيداع مبلغ يقدر بـ 10000 دج، لمدة 5 سنوات، بمعدل فائدة مركبة 10% .

1-أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة.

2- إذا كانت جملة المبلغ بعد 5 سنوات من الإيداع 17821 دج، ما هو معدل الفائدة المركبة المطبق؟

3- إذا افترضنا أن جملة مبلغ معين في نهاية المدة 20000 دج، ما هو المبلغ المودع؟

4- إذا كان المبلغ المودع اليوم هو 10000 دج، ماهي مدة الإيداع إذا كانت جملة المبلغ 23580 دج؟

الحل:

1- $C = C_0 (1+i)^n$

$C_5 = 10000 (1 + 0.1)^5 = 16105.10$ DA

2- $i = \sqrt[n]{\frac{C}{C_0}} - 1$ $\qquad i = \left(\frac{C}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$

$i = \sqrt[5]{\frac{17821}{10000}} - 1 \rightarrow i = 0.1225 \rightarrow i = 12.25\%$

3- $C_0 = C \times (1+i)^{-n}$

$$C_0 = 20000 \times (1+0.1)^{-5} = 12418.42 \text{ DA}$$

4- $n = \frac{Ln\, C - Ln\, C_0}{Ln(1+i)}$

$$n = \frac{Ln\, 23580 - Ln\, 10000}{Ln(1+0.1)} \rightarrow n = 9 \text{ سنوات}$$

4- المعدل المتناسب والمعدل المتكافئ:

عادة نستعمل معدل فائدة سنوي، أي تحسب الفائدة في نهاية السنة مرة واحدة، بينما قد نجد معدلات فائدة للسداسي أو للثلاثي أو للشهر، في هذه الحالة يجب تتطابق المدة الزمنية للمعاملة n ، مع معدلات الفترات الجزئية للسنة، لأن الفائدة المركبة تحسب لعدد الفترات، وليس لعدد السنوات فقط، ولهذا نجد هناك معدلات متناسبة ومعدلات متكافئة.

4-1 المعدلات المتناسبة:

المعدل المتناسب لمعدل سنوي i ، هو المعدل الذي يطبق على P فترة من السنة. حيث:

p تتراوح بين 1 و 12 فترة.

$$i_p = \frac{i}{p}$$

في هذه الحالة لا يتساوى المعدلان في نهاية نفس الفترة.

$$I_1 = C_0 \times (1+i) - C_0$$

$$I_2 = C_0 \times \left(1 + \frac{i}{p}\right)^p - C_0 \qquad I_1 \neq I_2$$

فإذا كان i معدل سنوي، فالمعدل السداسي المتناسب له هو : $\frac{i}{2}$.

فالفائدة السنوية لكل منهما هي:

$$I_1 = C - C_0$$

بالنسبة للمعدل السنوي والمدة سنة واحدة $I_1 = C_0 \times (1+i) - C_0$

بالنسبة للمعدل السداسي والمدة سداسيان $I_2 = C_0 \times \left(1+\frac{i}{2}\right)^2 - C_0$

نلاحظ بأن الفائدة عند تطبيق المعدل السنوي، لا تتساوى مع الفائدة عند تطبيق المعدل السداسي المتناسب له، وبالتالي تختلف أيضا قيمة الجملة لكليهما.

مثال:

لدينا مبلغ 60000 دج ، تم إيداعه في بنك لمدة 4 سنوات، بمعدل فائدة مركبة سنوي 12% ، فهل تتساوى فائدة هذا المعدل مع فائدة المعدل الثلاثي المتناسب معه.

الفائدة بالمعدل السنوي:

$$I_1 = C_0 \times (1+i)^4 - C_0 \rightarrow I_1 = 60000 \times (1+0.12)^4 - 60000 \rightarrow I_1 = 34411.16$$

الفائدة بالمعدل الثلاثي:

$$I_2 = C_0 \times \left(1+\frac{i}{4}\right)^{16} - C_0 \rightarrow I_2 = 60000 \times (1+0.03)^{16} - 60000 \rightarrow I_2 = 36282.38$$

$$I_1 \neq I_2$$

4-2- المعدلات المتكافئة:

وهي عكس المعدلات المتناسبة، فهي تؤدي إلى نفس قيمة الفائدة، وبالتالي إلى نفس قيمة الجملة لنفس المدة.

$$I_1 = C_0 \times (1+i) - C_0$$

$$I_2 = C_0 \times (1+i_P)^P - C_0$$

وحتى نجد المعدل للفترات P: i_P المتكافئ مع المعدل السنوي i يجب تحقيق مساواة الفائدتين أو الجملتين.

$$I_1 = I_2$$

$C_0 \times (1+i) - C_0 = C_0 \times (1+i_P)^P - C_0 \rightarrow C_0 \times (1+i) = C_0 \times (1+i_P)^P$

$\rightarrow (1+i) = (1+i_P)^P \rightarrow (1+i)^{\frac{1}{p}} = (1+i_P) \qquad \rightarrow i_P = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1$

مثال: أحسب معدل الفائدة لكل شهرين المتكافئ لمعدل سنوي 16%.

$i_P = (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \rightarrow i_P = (1+0.16)^{\frac{1}{6}} - 1 \rightarrow i_p = 2.5\%.$

الفصل الرابع: تكافئ الأوراق التجارية

1- تكافئ ورقتين تجاريتين: تكون ورقتين تجاريتين متكافئتين، إذا خصمت بتاريخ ما بنفس المعدل، وأنتجت نفس القيمة الحالية التجارية أو الحقيقية.

بافتراض أن القيمة الحالية التجارية للورقة التجارية الأولى: V_{ac1}

وأن القيمة الحالية التجارية للورقة التجارية الثانية: V_{ac2}

وللحصول على القيم الاسمية للورقتين، فيجب أن تحقق المعادلة : $V_{ac1} = V_{ac2}$

$$V_{ac1} = V_{n1} \times \frac{D - n1}{D} \qquad V_{ac2} = V_{n2} \times \frac{D - n2}{D}$$

$$V_{n1} \times \frac{D - n1}{D} = V_{n_2} \times \frac{D - n2}{D}$$

$$V_{n1} \times (D - n_1) = V_{n_2} \times (D - n_2) \quad \rightarrow \quad V_{n1} = V_{n_2} \times \frac{D - n2}{D - n1}$$

أو

$$V_{n_2} = V_{n1} \times \frac{D - n1}{D - n2}$$

أما بالخصم الحقيقي فلدينا: $V_{a1} = V_{a2}$

$$V_{a1} = V_n \times \frac{D}{D + n1} \qquad V_{a2} = V_n \times \frac{D}{D + n2}$$

$$V_{n1} \times \frac{D}{D + n1} = V_{n_2} \times \frac{D}{D + n2}$$

$$\frac{Vn1}{D + n1} = \frac{Vn2}{D + n2} \quad \rightarrow \quad V_{n1} = V_{n_2} \times \frac{D + n1}{D + n2}$$

$$V_{n_2} = V_{n1} \times \frac{D + n2}{D + n1}$$

2- تكافئ عدة أوراق تجارية:

بنفس المبدأ في حالة تكافئ ورقتين، نغير عدد الأوراق، وبالتالي تكون القيمة الحالية للورقة المكافئة تساوي مجموع القيم الحالية للأوراق الأخرى.

$V_{ac} = V_{ac1} + V_{ac2} + V_{ac3} + \dots\dots\dots\dots + V_{acn}$

$V_{ac} = V_n \times \frac{D - n}{D}$

$V_n \times \frac{D-n}{D} = V_{n1} \times \frac{D-n1}{D} + V_{n2} \times \frac{D-n2}{D} + .. + V_{nn} \times \frac{D-nn}{D}$

$V_n \times (D - n) = V_{n1} \times (D - n_1) + V_{n2} \times (D - n_2) + \dots\dots\dots + V_{nn} \times (D - n_n)$

$V_n = \frac{Vn1 \times (D - n1) + Vn2 \times (D - n2) + \cdots \dots\dots + Vnn \times (D - nn)}{D - n}$

مثال:

مؤسسة مدينة لمورد بورقة تجارية قيمتها الاسمية 24710 دج ، تاريخ استحقاقها يوم 31 مارس، طلبت من هذا المورد بتاريخ 11 مارس تأخير تاريخ استحقاق الورقة التجارية إلى 20 ماي من نفس السنة. فإذا علمت أن معدل الخصم 10%.

أحسب القيمة الاسمية للورقة التجارية الجديدة.

نفترض أن القيمة الاسمية للورقة القديمة: V_{n1} ، والجديدة: V_{n2}

مدة الخصم للورقة الأولى: n_1 مدة الخصم للورقة الثانية: n_2

$n_1 = 31\text{-}11 = 20$ $n_2 = (31\text{-}11)+30+20 = 70$

$D = \frac{36000}{10}$ $D = 3600$

$V_{n2} = V_{n1} \times \frac{D - n1}{D - n2} \rightarrow V_{n2} = 24710 \times \frac{3600 - 20}{3600 - 70}$

$V_{n2} = 25060$

مثال:

شخص مدين بالمبالغ التالية:

4000 دج يستحق دفعها بعد 4 أشهر

8000 دج يستحق دفعها بعد 8 أشهر

5000 دج يستحق دفعها بعد 9 أشهر

فإذا طلب المدين استبدال هذه الديون الثلاثة، بدينين متساويين لهما نفس القيمة الاسمية، حيث أن الدين الأول يستحق بعد 6 أشهر، والدين الثاني بعد 12 شهرا.

ما هي قيمة كل من الدينين الجديدين، علما بأن معدل الخصم 9%.

نفترض أن القيمة الاسمية لكل من الدينين الجديدين تساوي: X

$$V_{ac} = V_{ac1} + V_{ac2} + V_{ac3}$$

$$V_{ac} = V_{n1} - V_{n1} \times \frac{n1 \times i}{12} + V_{n2} - V_{n2} \times \frac{n2 \times i}{12} + V_{n3} - V_{n3} \times \frac{n3 \times i}{12}$$

$$V_{ac} = V_{n1} \times \left(1 - \frac{n1 \times i}{12}\right) + V_{n2} \times \left(1 - \frac{n2 \times i}{12}\right) + V_{n3} \times \left(1 - \frac{n3 \times i}{12}\right)$$

$$V_{ac} = 4000 \times \left(1 - \frac{4 \times 0.09}{12}\right) + 8000 \times \left(1 - \frac{8 \times 0.09}{12}\right) + 5000 \times \left(1 - \frac{12 \times 0.09}{12}\right)$$

$$V_{ac} = 16063.7 \text{ DA}$$

$$V_{ac} = X \times \left(1 - \frac{6 \times 0.09}{12}\right) + X \times \left(1 - \frac{12 \times 0.09}{12}\right) = 1.865$$

$$1.865\, X = 16063.7 \quad \rightarrow X = \frac{16063.7}{1.865} \rightarrow \quad X = 8613.24$$

3- تاريخ الاستحقاق المتوسط:

لإيجاد تاريخ الاستحقاق المتوسط، لعدد من الأوراق التجارية، نقوم بتطبيق علاقة تكافئ بين القيمة الحالية بمجموع القيم الاسمية ذات تاريخ متوسط محدد، والقيمة الحالية لمجموع الأوراق المعنية كل بمدة استحقاقها.

لدينا:

$$V_{ac} = V_{ac1} + V_{ac2} + V_{ac3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_{acn}$$

$$V_{ac} = V_n \times \frac{D - n}{D}$$

$$V_n - \left(V_n \times \frac{n}{D}\right) = V_{n1} - \left(V_{n1} \times \frac{n1}{D}\right) + V_{n2} - \left(V_{n2} \times \frac{n2}{D}\right) + .. + V_{nn} - \left(V_{nn} \times \frac{nn}{D}\right)$$

$$V_n = V_{n1} + V_{n2} + V_{n3} + \dots\dots + V_{nn}$$

$$(V_n \times \frac{n}{D}) = (V_{n1} \times \frac{n1}{D}) + (V_{n2} \times \frac{n2}{D}) + \dots + (V_{nn} \times \frac{nn}{D})$$

$$V_n \times n = V_{n1} \times n1 + V_{n2} \times n_2 + \dots\dots + V_{nn} \times n_n$$

$$n = \frac{(Vn1 \times n1 + Vn2 \times n2 + \dots\dots + Vnn \times nn)}{Vn}$$

ملاحظة:

إن علاقة حساب تاريخ الاستحقاق المتوسط غير مرتبطة بمعدل الخصم t.

مثال: تاجر مدين بثلاث أوراق تجارية:

- **الورقة الأولى: 55000 دج تاريخ استحقاقها 23 جوان**
- **الورقة الثانية: 35000 دج تاريخ استحقاقها 19 جويلية**
- **الورقة الثالثة: 28000 دج تاريخ استحقاقها 18آوت**

تقدم هذا التاجر إلى دائنه بتاريخ 16 ماي لاستبدال الأوراق الثلاثة، بورقة واحدة لمجموع القيم الاسمية.

تحديد تاريخ استحقاق هذه الورقة.

حساب مدة استحقاق الأوراق الثلاثة:

$n1 = (31-16)+23 = 38$ يوم

$n2 = 15+30+19 = 64$ يوم

$n3 = 15+30+31+18 = 94$ يوم

$$n = \frac{(55000 \times 38) + (35000 \times 64) + (28000 \times 94)}{118000}$$

$n = 59$ يوم

فيكون تاريخ الاستحقاق المتوسط، 59 يوما بعد تاريخ 16 ماي، أي يوم 14 جويلية.

4– تكافئ الأوراق التجارية بالفائدة المركبة:

يحصل التكافؤ بين ورقتين تجاريتين أو عدة أوراق تجارية، عندما تتساوى القيم الحالية للطرفين، في تاريخ محدد هو تاريخ التكافؤ.

فإذا كانت لدينا قيمتين اسميتين لورقتين تجاريتين، هما على التوالي: V_1 و V_2 تسددان بعد فترة زمنية n_1 و n_2 ، على التوالي.

لتحقيق التكافؤ في حالة ورقتين تجاريتين يجب:

$$V_{n1}(1+i)^{-n_1} = V_{n2}(1+i)^{-n_2}$$

وأما في حالة عدة أوراق، يجب تحقق المعادلة التالية:

$$V_{n1}(1+i)^{-n_1} = V_{n2}(1+i)^{-n_2} + V_{n3}(1+i)^{-n_3} + \dots\dots\dots + V_{nn}(1+i)^{-n_n}$$

مثال:

شخص مدان لمؤسسة بمبلغ 700.000 دج، يسدده بعد 6 سنوات، اتفق معه بطلب التسديد بعد مرور سنة كاملة، أن يقلص مدة الدين إلى 4 سنوات عوض 6 سنوات.

أحسب القيمة الاسمية للدين إذا كان معدل الفائدة المركبة 8% سنويا.

$$V_{n1}(1+i)^{-n_1} = V_{n2}(1+i)^{-n_2}$$

$$700.000(1+0.08)^{--5} = V_{n2}(1+0.08)^{-3}$$

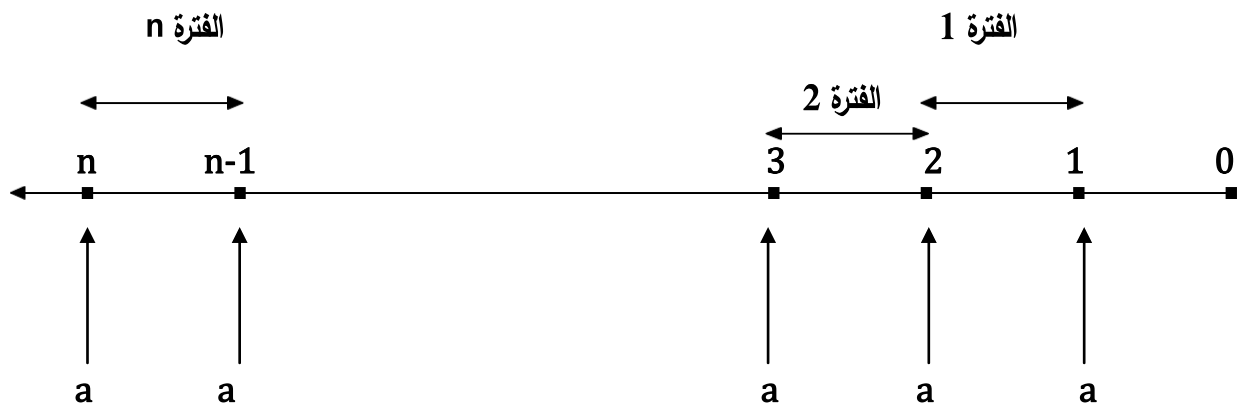
$$V_{n2} = \frac{700.000}{1.08^5} \times 1.08^3 \rightarrow \quad V_{n2} = 600137.17$$

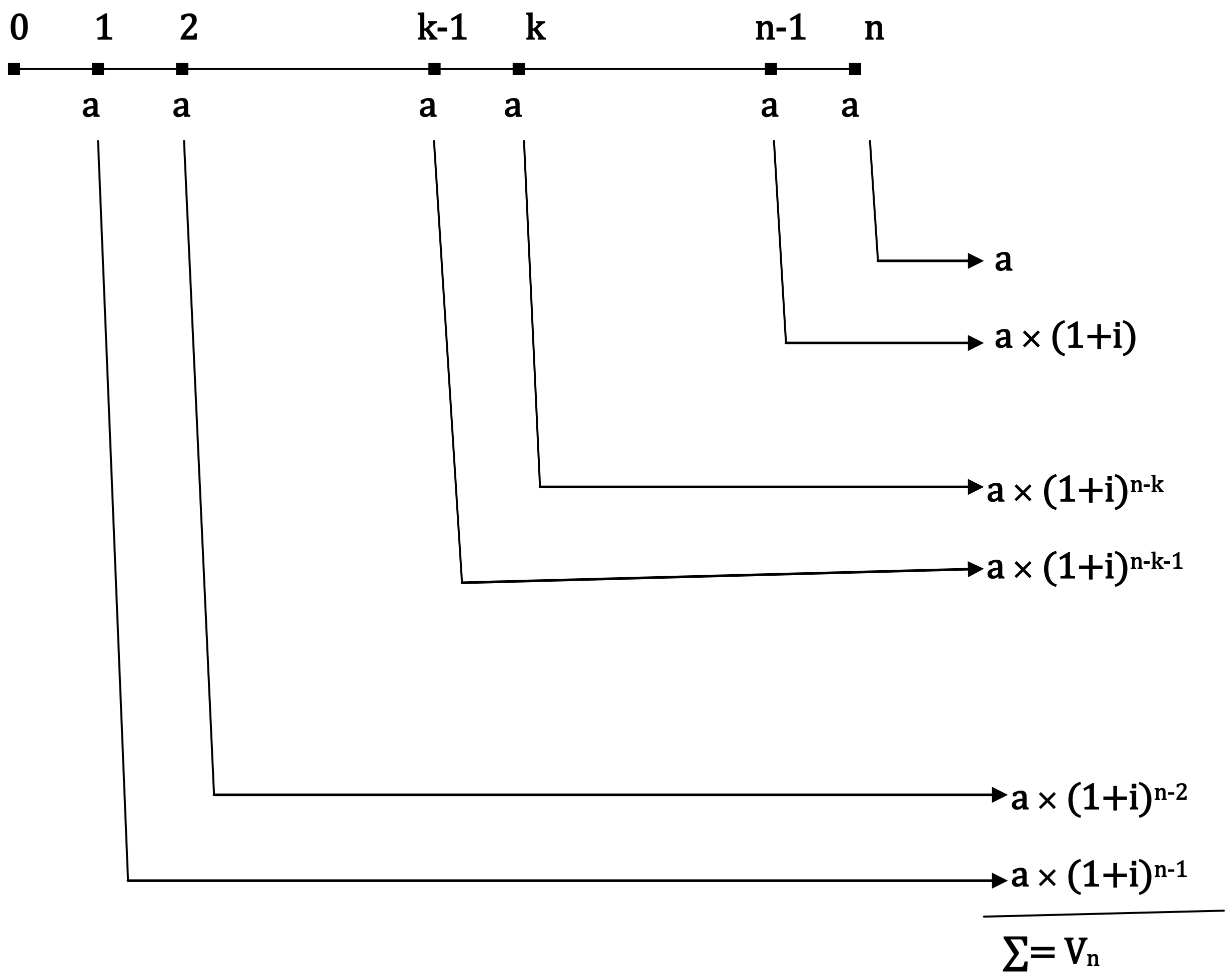
الفصل الخامس: الدفعات المتساوية

1- أنواع الدفعات المتساوية:

1-1 الدفعات العادية الثابتة (نهاية المدة): يتم بواسطتها تسديد دين، وتدفع في نهاية المدة، أو الفترات، وتسمى أيضا دفعات التسديد أو دفعات نهاية المدة.

- **جملة الدفعات العادية: وهي ما تجمع للشخص المودع أو المسدد للمبالغ المالية في نهاية عدد من الفترات n، وبالتالي يكون قد قدم n دفعة متساوية. وهي مجموع جمل هذه الدفعات في نهاية المدة، أي عند آخر سنة n. علاقة جملة الدفعات العادية:**





❖ **حساب جملة الدفعات لنهاية المدة:**

$$V_n = a + a\times(1+i) + a\times(1+i)^2 + .. + a\times(1+i)^{n-k} + .. + a\times(1+i)^{n-2} + a\times(1+i)^{n-1}$$

عناصر هذه الجملة تمثل متتالية هندسية متزايدة حدها الأول a وأساسها (1+i) وعددها n.

لدينا مجموع متتالية هندسية يساوي: $S = a \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

مثال:

مؤسسة تودع في نهاية كل سنة مبلغ 40000 دج في بنك، لمدة 8 سنوات.

أحسب جملة ما تجمع لهذه المؤسسة في نهاية السنة الثامنة، إذا كان معدل الفائدة السنوي 6.8% .

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 40000 \times \frac{(1+0.068)^8 - 1}{0.068} = 409656.73 \text{ DA}$$

❖ **حساب قيمة الدفعة a:**

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$a = V_n \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

مثال: من أجل تسديد دين في نهاية 7 سنوات، بمبلغ 21955.24. أحسب قيمة الدفعة السنوية التي تسمح بذلك، والمودعة في نهاية كل سنة، بمعدل فائدة مركبة 9.5% .

$$a = V_n \times \frac{i}{(1+i)^n - 1} = 21955.24 \times \frac{0.095}{(1+0.095)^7 - 1} \rightarrow a = 2350 \text{ DA}$$

❖ **حساب المدة أو عدد الدفعات n :**

$$V_n = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{V_n \times i}{a} = (1+i)^n - 1 \rightarrow \frac{V_n \times i}{a} + 1 = (1+i)^n$$

$$\text{Ln}\left(\frac{V_n \times i}{a} + 1\right) = \text{Ln}\,(1+i)^n = n\,\text{Ln}\,(1+i) \rightarrow n = \frac{\text{Ln}\left(\frac{V_n \times i}{a} + 1\right)}{\text{Ln}\,(1+i)}$$

❖ **القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة:**

$$V_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \dots\dots\dots + a(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = a(1+i)^{-n} \times (1 + a(1+i) + a(1+i)^2 + \dots\dots\dots\dots + a(1+i)^{n-1}).$$

$$V_0 = a(1+i)^{-n} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_0 = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \times (1+i)^{-n} \rightarrow \quad V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

أو نحسب القيمة الحالية بالطريقة التالية:

$$V_0 = V_n (1+i)^{-n} \rightarrow V_0 = a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)^{-n} \rightarrow \quad V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مثال:

يقوم شخص بإيداع بصفة دورية مبلغ 52500 دج، في نهاية كل سنة.

ما هي القيمة الحالية لهذه الدفعات لمدة 5 سنوات وبمعدل فائدة مركبة سنوي 8%.

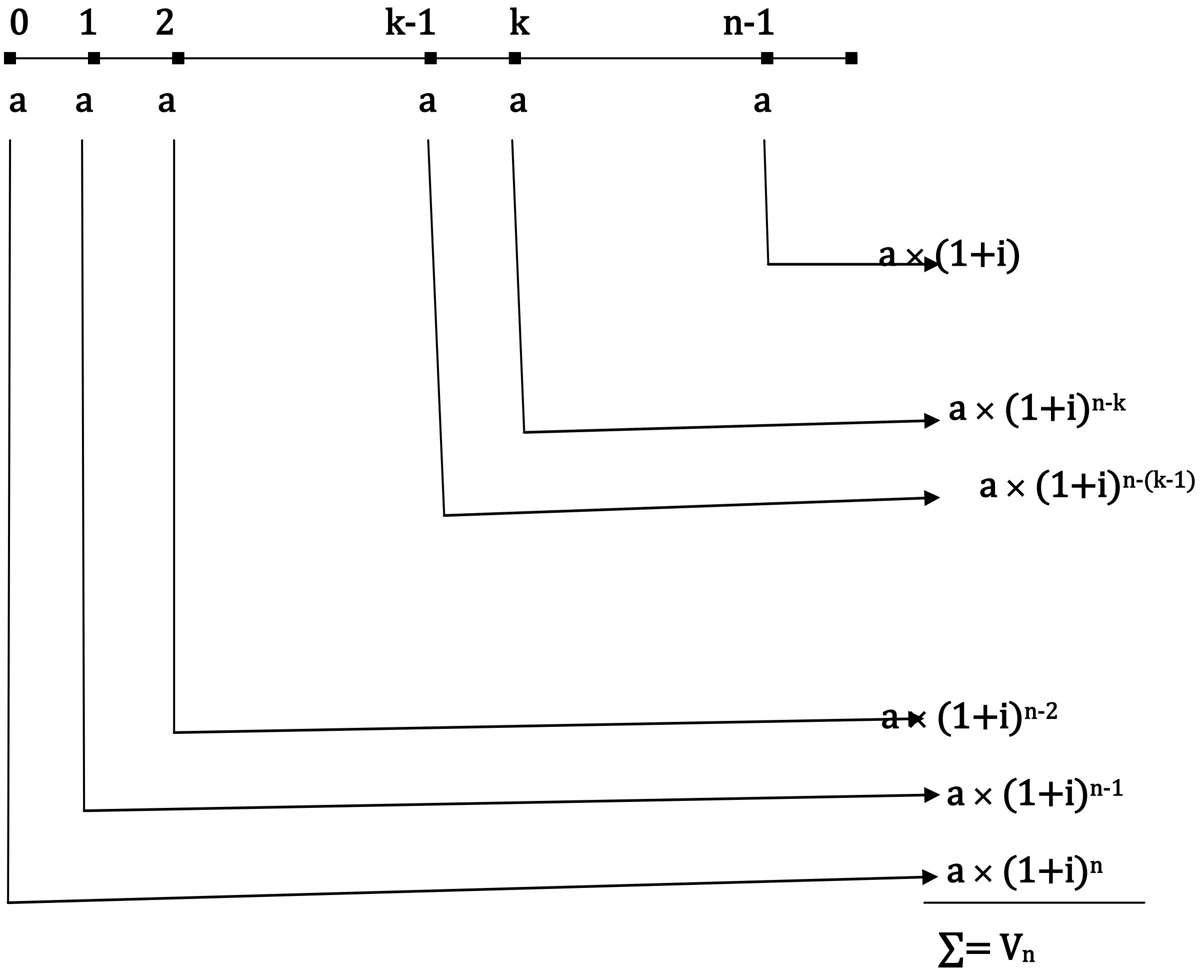
$a = 52500 \quad n = 5 \quad i = 8\%$

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \rightarrow V_0 = 52500 \times \frac{1-(1+0.08)^{-5}}{0.08} = 209617.3$$

2-1 دفعات الاستثمار(بداية المدة): وتهدف إلى تكوين رأس مال، وهي تقدم في بداية الفترات، وتسمى دفعات بداية المدة أو الفترة.

إذا افترضنا أن الدفعات هي ثابتة ومتساوية، وتساوي a، الدفعات تكون في بداية المدة، ونريد حساب الجملة في نهاية الفترة n.

القيمة المكتسبة أو الجملة هي مجموع الجمل، وهي تشكل متتالية هندسية عدد حدودها n، وحدها الأول a (1+i)، وأساسها (1+i).



❖ **حساب جملة دفعات نهاية المدة:**

$$V_n = a\,(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \rightarrow V_n = a\,(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

مثال:

مؤسسة تودع في بداية كل سنة مبلغ 60000 دج في بنك، لمدة 6 سنوات.

أحسب جملة ما تجمع لهذه المؤسسة، إذا كان معدل الفائدة المركبة السنوي 7%.

$$V_n = a\,(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \rightarrow V_n = 60000\,(1+0.07) \times \frac{(1+0.07)^6 - 1}{0.07}$$

$$V_n = 459241.26 \text{ DA}$$

❖ **حساب قيمة الدفعة a :**

$$V_n = a\,(1+i) \times \frac{(1+i)^n-1}{i} \rightarrow a = V_n \times (1+i)^{-1} \times \frac{i}{(1+i)^n-1}$$

مثال: من أجل تكوين رأس مال 56665 دج، لمدة 15 سنة.

أحسب قيمة الدفعة السنوية التي تسمح بذلك،والمودعة في بداية كل سنة، بمعدل فائدة مركبة 5%.

$$a = V_n \times (1+i)^{-1} \times \frac{i}{(1+i)^n-1} \rightarrow a = 56665 \times (1+0.05)^{-1} \times \frac{0.05}{(1+0.05)^n-1}$$

$a = 2500$ DA.

❖ **القيمة الحالية لدفعات بداية المدة:**

$$V_0 = V_n\,(1+i)^{-n} \rightarrow V_0 = a\,(1+i) \times \frac{(1+i)^n-1}{i}\,(1+i)^{-n}$$

$$V_0 = a\,(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مثال:

يودع شخص في حسابه للتوفير كل بداية شهر مبلغ 24000 دج، وهذا لمدة 26 شهر، بمعدل فائدة شهري 0.7%.

$a = 24000$, $i = 0.7\,\%$, $n = 26$ شهر

$$V_0 = a\,(1+i) \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 24000\,(1+0.007) \times \frac{1-(1+0.007)^{-26}}{0.007}$$

$V_0 = 572677.86$ DA

الفصل السادس: استهلاك القروض

من بين مصادر التمويل الخارجية للمؤسسات الاقتصادية، نجد الديون المتوسطة والطويلة الآجل، والتي تتحصل عليها المؤسسة في شكل مالي أو نقدي، نجد القروض ذات المصدر الوحيد.

1- القروض ذات المصدر الوحيد: وهي قروض متحصل عليها من مقرض وحيد، وعادة ما يكون مؤسسة مالية أو مصرفية، يتم تسديد هذا النوع من القروض، بطريقتين:

1-1- استهلاك القروض بدفعات ثابتة: يكون التسديد بصفة دورية، إما سنوية، أو سداسية...، وبدفعة ثابتة، وفي نهاية الدفعات، يكون المقرض قد تحصل على أصل القرض مع الفوائد.

العناصر الأساسية المحددة لاستهلاك القرض:

- **قيمة أصل القرض في بداية السنة الأولى للتسديد: V_0**
- **الدفعة الثابتة المتكونة من الاستهلاك والفائدة : a**
- **الاستهلاك للفترة يمثل الفرق بين الدفعة الثابتة و فائدة الفترة: M**
- **فائدة الفترة تساوي أصل القرض للفترة مضروب في معدل الفائدة : I**
- **عدد الدفعات: n**

ويتم تحديد قيمة الدفعة الثابتة من خلال علاقات الدفعات المتساوية لنهاية المدة:

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

جدول استهلاك القرض بدفعات ثابتة:

الفترة	الدين المتبقي في بداية الفترة V	فائدة الفترة I	الدفعة الثابتة	الاستهلاك للفترة M	الدين المستهلك $\sum M$	الدين المتبقي في نهاية الفترة V- M
1	V_0	$V_0 \times i = I_1$	a	$M_1 = a - I_1$	M_1	$V_0 - M_1$
2	$V_1 = V_0 - M_1$	$V_1 \times i = I_2$	a	$M_2 = a - I_2$	$M_1 + M_2$	$V_1 - M_2$
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
n-1	V_{n-2}	$V_{n-2} \times i$	a	$M_{n-1} = a - I_{n-1}$	$\sum M_1 + \dots M_{n-1}$	$V_{n-2} - M_{n-1}$
n	V_{n-1}	$V_{n-1} \times i$	a	$M_n = a - I_n$	$\sum M_1 + \dots M_n$	$V_{n-1} - M_n$
$\sum$	-	$\sum I$	$\sum_1^n a = n\,a$	$\sum M$	-	

مثال:

تحصلت مؤسسة على قرض بقيمة 80000 دج، في 01 جويلية من السنة N، على ان يتم تسديده <u>بدفعات ثابتة</u> لمدة 4 سنوات، بداية من 01 جويلية من السنة (N+1) . بمعدل فائدة 8% .

إعداد جدول استهلاك القرض.

نقوم بحساب قيمة الدفعة:

$$a = V_0 \times \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 80000 \times \frac{0.08}{1-(1+0.08)^{-4}} \rightarrow a = 24153.66 \text{ DA}$$

الدين المتبقي في نهاية الفترة V- M	الاستهلاك للفترة M= a - I	الدفعة الثابتة a	فائدة الفترة I	الدين المتبقي في بداية الفترة V	الفترة (السنة)
62246.34	17753.66	24153.66	6400.00	80000.00	N+1/07/01
43072.39	19173.95	24153.66	4979.71	62246.34	N+2/07/01
22364.52	20707.87	24153.66	3445.79	43072.39	N+3/07/01
0	22364.52	24153.66	1789.16	22364.52	N+4/07/01
-	80000.00		16614.66	-	$\sum$

❖ **علاقة الدفعات والقرض:**

▪ **قيمة أصل القرض في بداية السنة الأولى للتسديد = القيمة الحالية للدفعات = V_0**

$$V_0 = a \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

▪ **جملة الدفعات = جملة القرض** $\sum_{S=1}^{n} a = V_0 + \sum_{S=1}^{n} I$

▪ **مجموع الدفعات = أصل القرض + مجموع الفوائد** $n \times a = \sum M + \sum I$

❖ **العلاقة بين الاستهلاكات:**

من خلال جدول استهلاك القرض بدفعات ثابتة، نلاحظ بأن الاستهلاكات للفترات المتتالية، تشكل في ما بينها متتالية هندسية أساسها $(1+i)$ ،حدها الأول M_1 ، وعدد حدودها n .

$$M_n = M_1 \times (1+i)^{n-1}$$

استهلاك الفترة
$M_2 = M_1 \times (1+i)^1$ $M_3 = M_1 \times (1+i)^2$ $M_4 = M_1 \times (1+i)^3$

$$M_x = M_k \times (1+i)^{x-k}$$

تمكننا العلاقة السابقة من حساب قيم الاستهلاكات، من خلال قيمة استهلاك واحدة معلومة.

1-2- استهلاك القروض باستهلاكات ثابتة: يكون التسديد بصفة دورية، إما سنوية، أو سداسية...، وباستهلاكات ثابتة، وبدفعات متناقصة، ويحسب الاستهلاك الثابت للفترة بقسمة أصل القرض على عدد الدفعات.

من اجل إعداد جدول استهلاك القرض باستهلاكات ثابتة، نقوم بحساب قيمة استهلاك الفترة الثابتة:

$$M= \frac{V_0}{n}$$

ومبلغ الدفعة المتغير: $a=M+I$

جدول استهلاك القرض باستهلاكات ثابتة:

الفترة	الدين المتبقي في بداية الفترة V_x	فائدة الفترة I	الدفعة $a_x=M+I_x$	الاستهلاك للفترة الثابت $M=\frac{V_0}{n}$	الدين المتبقي في نهاية الفترة V_x-M
1 2 . . . n-1 n	V_0 $V_1=V_0-M_1$ . . . V_{n-2} V_{n-1}	$V_0\times i=I_1$ $V_1\times i=I_2$ . . . $V_{n-2}\times i$ $V_{n-1}\times i$	$M+I_1$ $M+I_2$ . . . $M+I_{n-1}$ $M+I_n$	$M=\frac{V_0}{n}$ . . . $M=\frac{V_0}{n}$	V_0-M V_1-M $V_{n-2}-M$ $V_{n-1}-M$
$\sum$	-	$\sum I$	$\sum_1^n a=n\,a$	$\sum M$	

مثال:

تحصلت مؤسسة على قرض بقيمة 80000 دج، في 01 جويلية من السنة N، على أن يتم تسديده <u>باستهلاكات ثابتة</u> لمدة 4 سنوات، بداية من 01 جويلية من السنة (N+1) . بمعدل فائدة 8% .

الدين المتبقي في نهاية الفترة $V_x - M$	الاستهلاك للفترة $M = \frac{V_0}{n}$	الدفعة الثابتة $a_x=M+I_x$	فائدة الفترة I_x	الدين المتبقي في بداية الفترة V_x	الفترة (السنة)
60000.00	20000.00	26400.00	6400.00	80000.00	N+1/07/01
40000.00	20000.00	24800.00	4800.00	60000.00	N+2/07/01
20000.00	20000.00	23200.00	3200.00	40000.00	N+3/07/01
0	20000.00	21600.00	1600.00	20000.00	N+4/07/01
-	80000.00		16614.66	-	$\sum$

قائمة المراجع:

- **منصور بن عوف عبد الكريم، مدخل إلى الرياضيات المالية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1996.**
- **ناصر دادي عدون، الرياضيات المالية:دروس نظرية، دار المحمدية العامة، الجزائر، 2010.**
- **عدنان كريم نجم الدين، الرياضيات المالية، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، 2009.**
- **غازي فلاح المومني، الرياضيات المالية المعاصرة، دار المناهج للنشر والتوزيع، الأردن، 2006.**
- Benjamin legros, mini manuel mathématiques financières, dunod, 2 éd, Paris, 2016.
- Hamini allal, mathématiques financières, tome1, O.P.U, Alger, 2006.
- Marek Capi´nski and Tomasz Zastawniak, Mathematics for Finance, U.S.A, 2003.
- P.V Johnson, introduction to financial mathematics, school of mathematics, Manchester, 2018.