Courbes du plan euclidien et de l'espace euclidien de dimension trois

April 15, 2020

1. Notion de coordonnées réelles

Les espaces $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, s'appellent 'les espaces des coordonnées réelles'.

Soit M un ensemble quelconque. Un système de coordonnées locales sur M est, par définition, une bijection $\Phi : \Omega \subset M \to \Phi(\Omega)$ d'un sous-ensemble Ω de M dans un ouvert $\Phi(\Omega)$ d'un espace $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Si $\Omega = M$, on dit que $\Phi : \Omega \subset M \to \Phi(\Omega)$ est un système coordonnées universelles sur M.

Par exemple, si E est un espace affine de dimension n avec $n \in \mathbb{N}$ et si $\{O, e_1, \ldots, e_n\}$ est un repère affine de E, l'application bijective qui envoie tout point $P \in E$ aux nombres $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{1 \leq k \leq n} x^k e_k,$$

s'appelle le système de coordonnées cartésiennes associé à $\{O, e_1, \ldots, e_n\}$. Tous les systèmes des coordonnées cartésiennes sont des systèmes des coordonnées universelles.

2. Courbes paramétriques

On se donne un espace affine réel E de dimension finie . Une courbe paramétrique de E est, par définition, une application $\varphi : I \to E$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E.

Soit $\varphi : I \to E$ une courbe paramétrique de E et $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$, $n = \dim E$, un système des coordonnées cartésiennes. L'application $\Phi \circ \varphi : I \to \mathbb{R}^n$ est une courbe paramétrique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi donc, en utilisant les système des coordonnées cartésiennes, on peut étudier seulement les courbes paramétriques des espaces des coordonnées réelles.

Dans ce qui suit, on étudie les courbes paramétriques et les courbes de l'espace $\mathbb{R}^3$ et du plan $\mathbb{R}^2$; c'est-à-dire E sera $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$.

On dit qu'une courbe paramétrique $\varphi : I \to E$ de E est Lipschitzienne s'il existe une constante const ≥ 0 telle que

$$\|\varphi(t) - \varphi(s)\|_E \leq \text{const}\,|t-s|\,, \forall (t,s) \in I \times I.$$

On dit que $\varphi : I \to E$ est localement Lipschitzienne si elle est Lipschitzienne sur tout intervalle compact de I.

Proposition 0.1 *Toute courbe paramétrique C^k, $k \in \mathbb{N}^*$, est localement Lipschitzienne.*

Démonstration. Soit $\varphi : I \to E$ une courbe paramétrique de classe C^k avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $[a,b]$ un intervalle compact de I. D'après la formule des acroissements finis avec reste intégral, on a

$$\varphi(t) - \varphi(s) = (t-s)\int_0^1 \varphi'(s + \tau(t-s))\,d\tau,$$

pour tout $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$. Par suite,

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_E &\leq |t-s|\int_0^1 \|\varphi'(s+\tau(t-s))\|_E\,d\tau \\ &\leq |t-s| \sup_{a\leq\tau\leq b} \|\varphi'(\tau)\|_E = \mathrm{C}\,|t-s|\,. \end{aligned}$$

Donc φ est Lipschitzienne sur $[a,b]$ puisque

$$\mathrm{C} = \sup_{a\leq\tau\leq b} \|\varphi'(\tau)\|_E < \infty.$$

On en déduit que φ est localement Lipschitzienne sur I car $[a,b]$ est arbitraire de I. ■

Les courbes paramétriques continues (c'est-dire de classe C^0) possèdent des propriétés paradoxales. Par exemple, Peano a construit une courbe paramétrique continue $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi([0,1]) = [0,1] \times [0,1]$.

Deux courbes paramétriques $\varphi : I \to E$ et $\psi : J \to E$ de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^*$, sont dites équivalentes s'il existe un C^k-difféomorphisme $\phi : I \to J$ tel que

$$\varphi = \psi \circ \phi(t)\,, \forall t \in I.$$

On dit qu'une courbe paramétrique $\varphi : I \to E$ de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^*$, est naturelle si $\|\varphi'(t)\|_2 = 1$ pour tout $t \in I$. On dit encore que $\varphi : I \to E$ régulière si $\varphi'(t) \neq 0$ quel que soit $t \in I$.

Proposition 0.2 *Soit $\varphi : I \to E$ une courbe paramétrique de classe C^k ($k \in \mathbb{N}^*$) et régulière de E. Alors il existe une courbe paramétrique naturelle de classe C^k qui est équivalente à φ.*

Démonstration. Pour $t_0 \in I$ fixé, on pose

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t} \|\varphi'(s)\|_2 \, ds, t \in I.$$

Comme

$$\phi'(t) = \|\varphi'(t)\|_2 > 0, \forall t \in I,$$

la fonction ϕ est strictement croissante et est donc un C^k-difféomorphisme de I dans l'intervalle $J = \phi(I)$. Par conséquent, la courbe paramétrique $\psi = \varphi \circ \phi^{-1} : J \to E$ est de classe C^k et est équivalente à φ. De plus, on a

$$\begin{aligned}
\psi'(s) &= \left(\varphi \circ \phi^{-1}\right)'(s) = \left(\phi^{-1}\right)'(s)\, \varphi' \circ \phi^{-1}(s) \\
&= \frac{\varphi' \circ \phi^{-1}(s)}{\phi' \circ \phi^{-1}(s)} = \frac{\varphi' \circ \phi^{-1}(s)}{\left\|\varphi' \circ \phi^{-1}(s)\right\|_2}, s \in J,
\end{aligned}$$

et par suite,

$$\|\psi'(s)\|_2 = \left\| \frac{\varphi' \circ \phi^{-1}(s)}{\left\|\varphi' \circ \phi^{-1}(s)\right\|_2} \right\|_2 = \frac{\left\|\varphi' \circ \phi^{-1}(s)\right\|_2}{\left\|\varphi' \circ \phi^{-1}(s)\right\|_2} = 1, s \in J,$$

ce qui prouve que ψ est une courbe paramétrique naturelle de classe C^k. ■

Exemple 0.3 *On considère l'hélix circulaire*

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt, \end{cases}$$

où $(a, b) \neq 0$.

On a

$$\phi(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} d\tau = \sqrt{a^2 + b^2} t, t \in \mathbb{R}.$$

Par suite,

$$\phi^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, s \in \mathbb{R}.$$

Donc une paramétrisation naturelle de l'hélix circulaire est donnée par les relations

$$\begin{cases} x = a\cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y = a\sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Exemple 0.4 *Soit la courbe paramétrique*

$$\begin{cases} x = \exp(t)\cos t \\ y = \exp(t)\sin t \\ z = \exp(t). \end{cases}$$

On a

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 3\exp(2t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Donc cette courbe est régulière. Par suite,

$$\phi(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,d\tau = \sqrt{3}\int_0^t \exp(\tau)\,d\tau = \sqrt{3}\left(\exp(t) - 1\right), t \in \mathbb{R}.$$

et

$$\phi^{-1}(s) = \log\left(s + \sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\log 3, s > -\sqrt{3}.$$

Une paramétrisation naturelle de la courbe considérée est donnée par

$$\begin{cases} x = \exp\left(\log\left(s+\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\log 3\right)\cos\left(\log\left(s+\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\log 3\right) \\ y = \exp\left(\log\left(s+\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\log 3\right)\sin\left(\log\left(s+\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\log 3\right) \\ z = \exp\left(\log\left(s+\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2}\log 3\right), \end{cases}$$

avec $s > -\sqrt{3}$.

Exemple 0.5 *Soit la paramétrisation de l'ellipse*

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

avec $a \neq b$. *Comme*

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t \neq 0, \forall t \in \mathbb{R},$$

cette paramétrisation est donc régulière. La fonction

$$\phi(t) = \int_0^t \sqrt{a^2\cos^2\tau + b^2\sin^2\tau}\,d\tau, t \in \mathbb{R},$$

est dite 'fonction elliptique'. On ne peut pas exprimer ϕ *par des fonctions élémentaires et l'étude de ce type de fonctions constitue une théorie complète nommée 'théorie des fonctions elliptiques'. Une paramétrisation naturelle de l'ellipse est donnée par*

$$\begin{cases} x = a\cos\phi^{-1}(s) \\ y = b\sin\phi^{-1}(s), \end{cases}$$

Proposition 0.6 *Soit $\psi : J \to E$ et $\widetilde{\psi} : \widetilde{J} \to E$ deux courbes paramétrique de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que ψ et $\widetilde{\psi}$ sont équivalentes et naturelles. Alors il existe un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ tel que ou bien*

$$\widetilde{\psi}(s) = \psi(s+a), s \in \widetilde{J} = J - a,$$

ou bien

$$\widetilde{\psi}(s) = \psi(-s+a), s \in \widetilde{J} = -J + a.$$

Démonstration. On a

$$\widetilde{\psi}(s) = \psi \circ \phi(s), s \in \widetilde{J},$$

où ϕ est un C^k-difféomorphisme de $\widetilde{J}$ dans J. Par suite,

$$\widetilde{\psi}'(s) = \psi' \circ \phi(s) \phi'(s), s \in \widetilde{J},$$

et

$$\begin{aligned} 1 &= \left\|\widetilde{\psi}'(s)\right\|_2 = \|\psi' \circ \phi(s) \phi'(s)\|_2 \\ &= |\phi'(s)| \, \|\psi' \circ \phi(s)\|_2 = |\phi'(s)|, s \in J, \end{aligned}$$

ce qui implique immédiatement que, ou bien $\phi(s) = s + a$, $s \in J$ ou bien $\phi(s) = -s + a$, $s \in J$, avec $a \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\widetilde{\psi}(s) = \psi(s+a), s \in \widetilde{J} = J - a,$$

ou

$$\widetilde{\psi}(s) = \psi(-s+a), s \in \widetilde{J} = -J + a.$$

La démonstration est terminée. ■

Soit $\varphi : [a,b] \to E$ une courbe paramétrique de classe C^k, $k \in \mathbb{N}$. On dit que $\varphi : [a,b] \to E$ est rectifiable s'il existe une constante const $\in [0, \infty[$ telle que pour toute subdivision $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ de l'intervalle $[a,b]$, on a

$$\sum_{1 \le k \le n} \|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\|_2 \le \text{const}.$$

Dans ce cas, on pose

$$\text{mes}(\varphi) = \text{long}(\varphi) = \sup_{\{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}} \sum_{1 \le k \le n} \|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\|_2 .$$

Proposition 0.7 *Toute courbe paramétrique Lipschitzienne $\varphi : [a,b] \to E$ est rectifiable. De plus, on a la formule*

$$\operatorname{long}(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\|_2 \, dt. \tag{01}$$

Démonstration. Soit $\varphi : [a,b] \to E$ une courbe paramétrique Lipschitzienne. On a

$$\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_2 \leq \text{const}\,|y - x|\,, \forall (x,y) \in [a,b] \times [a,b]\,,$$

avec const $\in [0, \infty[$. Par conséquent, si $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ est une subdivision arbitraire de $[a,b]$, on peut écrire

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\|_2 \leq \sum_{1 \leq k \leq n} \text{const}\,(x_k - x_{k-1}) = \text{const}\,(b - a) < \infty.$$

La courbe $\varphi : [a,b] \to E$ est donc rectifiable et on a l'inégalité

$$\operatorname{long}(\varphi) = \sup_{\{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}} \sum_{1 \leq k \leq n} \|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\|_2 \leq \text{const}\,(b - a)\,.$$

On vérifie la relation (01) seulement pour les courbes de classe C^1. On suppose alors que $\varphi : [a,b] \to E$ est de classe C^1. Dans ce cas, pour toute subdivision $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ de $[a,b]$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq k \leq n} \|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\|_2 &= \sum_{1 \leq k \leq n} \left\| \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi'(\tau)\, d\tau \right\|_2 \\
&\leq \sum_{1 \leq k \leq n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \|\varphi'(\tau)\|_2 \, d\tau = \int_a^b \|\varphi'(\tau)\|_2 \, d\tau.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\operatorname{long}(\varphi) = \sup_{\{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}} \sum_{1 \leq k \leq n} \|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\|_2 \leq \int_a^b \|\varphi'(\tau)\|_2 \, d\tau.$$

On vérifie l'inégalité inverse. Pour tout $(x,y) \in [a,b] \times [a,b]$ avec $x \leq y$, on écrit

$$\begin{aligned}
\int_x^y \|\varphi'(\tau)\|_2 \, d\tau &= (y - x) \int_0^1 \|\varphi'(x + \tau(y - x))\|_2 \, d\tau, \\
\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_2 &= \left\| \int_x^y \varphi'(\tau)\, d\tau \right\|_2 = (y - x) \left\| \int_0^1 \varphi'(x + \tau(y - x))\, d\tau \right\|_2.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\int_x^y \|\varphi'(\tau)\|_2 \, d\tau - \|\varphi(y) - \varphi(x)\|_2 = (y - x) \, Q(x, y),$$

avec

$$Q(x, y) = \int_0^1 \|\varphi'(x + \tau(y - x))\|_2 \, d\tau - \left\| \int_0^1 \varphi'(x + \tau(y - x)) \, d\tau \right\|_2.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonction Q est continue, donc uniformément continue, sur l'ensemble compact $\{(x, y) \in [a, b] \times [a, b] : x \leq y\}$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$0 \leq y - x \leq \delta \Rightarrow Q(x, y) \leq \varepsilon.$$

Soit $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$ telle que $x_k - x_{k-1} \leq \delta$, $1 \leq k \leq n$. On a

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \|\varphi'(\tau)\|_2 \, d\tau - \sum_{1 \leq k \leq n} \|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\|_2 \\
= & \sum_{1 \leq k \leq n} \left\{ \int_{x_{k-1}}^{x_k} \|\varphi'(\tau)\|_2 \, d\tau - \|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\|_2 \right\} \\
= & \sum_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) \, Q(x_{k-1}, x_k) \leq \varepsilon \sum_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon (b - a).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \|\varphi'(\tau)\|_2 \, d\tau & \leq \sum_{1 \leq k \leq n} \|\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\|_2 + \varepsilon (b - a) \\
& \leq \operatorname{long}(\varphi) + \varepsilon (b - a).
\end{aligned}$$

On fait tendre ε vers 0, on obtient

$$\int_a^b \|\varphi'(\tau)\|_2 \, d\tau \leq \operatorname{long}(\varphi).$$

Enfin, $\int_a^b \|\varphi'(\tau)\|_2 \, d\tau = \operatorname{long}(\varphi)$. ■

Les courbes paramétriques rectifiables ont un rôle fondamental pour exprimer quelques résultats de l'analyse complexes. Dans la suite, on utilise ces courbes pour présenter la formule de Cauchy, qui est sans doute la formule centrale de l'analyse complexes.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathfrak{X}$ un espace de Banach complexe. Si $\varphi : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ une courbe paramétrique rectifiable et $f : \Omega \to \mathfrak{X}$ une fonction continue, l'intégrale $\int_\varphi f = \int_\varphi f(z)\,dz$ existe comme étant la limite des sommes

$$\sum_{1\leq k\leq n} \left(\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})\right) f\left(\varphi(\xi_k)\right),$$

où $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ est une subdivision de $[a,b]$ et $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$. Cette intégrale vérifie la propriété

$$\left\langle \ell, \int_\varphi f(z)\,dz \right\rangle = \int_\varphi \langle \ell, f(z)\rangle\,dz, \ell \in \mathfrak{X}^*.$$

Soit $\varphi : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ une courbe paramétrique rectifiable fermé dans $\mathbb{C}$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C} - \varphi([a,b])$, l'intégrale

$$\mathfrak{n}(\varphi; z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\varphi \frac{1}{\xi - z}d\xi,$$

est toujours un entier ($\in \mathbb{Z}$) et est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} - \varphi([a,b])$, de plus, elle s'annule sur la composante non bornée de $\mathbb{C} - \varphi([a,b])$.

On a la célèbre formule de Cauchy suivante.

Théorème 0.8 *Soit $\mathfrak{X}$ un espace de Banach complexe, Ω un ouvert de $\mathfrak{X}$, $f : \Omega \to \mathfrak{X}$ une fonction holomorphe et $\varphi : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ une courbe paramétrique rectifiable fermé dans Ω vérifiant $\mathfrak{n}(\varphi; z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}/\Omega$. Alors*

$$\mathfrak{n}(\varphi; z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi}\int_\varphi \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}, \forall z \in \mathbb{C}/\varphi([a,b]), \forall k \in \mathbb{N}.$$

3. Courbes

On est maintenant prêts à introduire la définition des courbes de E.

En effet, **une courbe de classe C^k ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) de E** est, par définition, un sous-ensemble $\mathcal{C} \subset E$ vérifiant la condition: pour tout point $P_0 \in \mathcal{C}$, il existe une courbe paramétrique $\varphi :]a,b[\to \mathcal{C}$ de classe C^k de E telle que:

i) $\varphi(]a,b[)$ est un ouvert de $\mathcal{C}$ muni de la restriction de la topologie euclidienne de E et φ est un homéomorphisme de $]a,b[$ dans $\varphi(]a,b[)$.

ii) Dans le cas $k \geq 1$, $\varphi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in]a,b[$.

iii) $\varphi(t_0) = P_0$ avec $t_0 \in]a,b[$.

Une courbe paramétrique $\varphi :]a,b[\to \mathcal{C}$ satisfaisant les trois énoncés précédents est appelée une paramétrisation locale de $\mathcal{C}$ au voisinage de P_0.

On peut facilement constater que toute courbe paramétrique équivalente à $\varphi :]a,b[\to \mathcal{C}$ constitue une paramétrisation locale de $\mathcal{C}$ au voisinage de P_0. En particulier, toute paramétrique naturelle équivalente à $\varphi :]a,b[\to \mathcal{C}$ est une paramétrisation locale, dite naturelle, de $\mathcal{C}$ au voisinage de P_0.

Il existe d'autres façons présentés dans les deux propositions suivantes pour définir les courbes.

Proposition 0.9 *Pour une partie $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *$\mathcal{C}$ est une courbe de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, de $\mathbb{R}^3$.*

2. *Pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$, il existe un sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ contenant (x_0, y_0, z_0) et deux fonctions $F : \Omega \to \mathbb{R}$ et $G : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^k tels que*

$$\Omega \cap \mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \Omega : F(x,y,z) = G(x,y,z) = 0\},$$
$$\text{rank}\{\text{grad}\, f(x,y,z), \text{grad}\, g(x,y,z)\} = 2, \forall (x,y,z) \in \Omega.$$

3. *Pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$, il existe un sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ contenant $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$ et un C^k-difféomorphisme Φ de Ω dans un ouvert $\Phi(\Omega)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que*

$$\Phi(x_0, y_0, z_0) = 0, \Phi(\Omega \cap \mathcal{C}) = \Phi(\Omega) \cap (\mathbb{R} \times \{(0,0)\}).$$

4. *Pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$, il existe un sous-ensemble ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ contenant (x_0, y_0, z_0) et une fonction $h :]a,b[\to \mathbb{R}^2$ de classe C^k tels que, après permutation éventuelle des coordonnées, $\Omega \cap \mathcal{C}$ soit égal au graphe de h; c'est-à-dire*

$$\Omega \cap \mathcal{C} = \{(t, h(t)) : t \in]a,b[\}.$$

Proposition 0.10 *Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathbb{R}^2$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *$\mathcal{C}$ est une courbe de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, de $\mathbb{R}^2$.*

2. *Pour tout* $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$*, il existe un sous-ensemble ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$ *contenant* (x_0, y_0) *et une fonction* $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *de classe* C^k *tels que*

$$\begin{aligned} &\Omega \cap \mathcal{C} = \{(x, y) \in \Omega : F(x, y) = 0\}, \\ &\operatorname{grad} f(x, y) \neq (0, 0), \forall (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

3. *Pour tout* $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$*, il existe un sous-ensemble ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$ *contenant* $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ *et un* C^k*-difféomorphisme* Φ *de* Ω *dans un ouvert* $\Phi(\Omega)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *tels que*

$$\Phi(x_0, y_0) = 0, \Phi(\Omega \cap \mathcal{C}) = \Phi(\Omega) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}).$$

4. *Pour tout* $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$*, il existe un sous-ensemble ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$ *contenant* (x_0, y_0) *et une fonction* $h :]a, b[\to \mathbb{R}$ *de classe* C^k *tels que, après permutation éventuelle des coordonnées,* $\Omega \cap \mathcal{C}$ *soit égal au graphe de* h*.*

Exemple 0.11 (Cercles) *Le cercle du centre* $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *et de rayon* $\rho > 0$ *du plan euclidien* $\mathbb{R}^2$ *est défini comme suit:*

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1(P_0, \rho) &= \left\{P = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|P - P_0\|_2 = \rho\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2\right\} \end{aligned}$$

Le soi-disant 'cercle d'unité' de $\mathbb{R}^2$ *est le cercle*

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1((0, 0), 1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Dans ce qui suit, on donne plusieurs méthodes pour vérifier que $\mathbb{S}^1(P_0, \rho)$ *est une courbe de classe* C^∞ *(lisse) de* $\mathbb{R}^2$*.*

Méthode1. *En effet, on peut écrire*

$$\mathbb{S}^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \{(0, 0, 0)\} : f(x, y, z) = 0\right\},$$

avec $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$*. On a* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 / \{(0, 0, 0)\}; \mathbb{R})$ *et*

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = 2(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \{(0, 0, 0)\}.$$

Comme

$$\|\operatorname{grad} f(x, y, z)\|_2 = 2\|(x, y, z)\|_2 > 0, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \{(0, 0, 0)\},$$

et donc $\operatorname{grad} f(x, y, z) \neq 0$ *pour tout* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \{(0, 0, 0)\}$*, la fonction* f *est une submersion de* $\mathbb{R}^3 / \{(0, 0, 0)\}$ *dans* $\mathbb{R}$*. D'où, d'après l'énoncé 2 de la Proposition* **??**, $\mathbb{S}^2$ *est une surface de classe* C^∞ *(lisse) de* $\mathbb{R}^3$*.*

La deuxième méthode pour prouver notre affirmation se base sur les coordonnées sphériques. Soit donc les deux applications suivantes

$$\begin{aligned} r_1 &: (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, \\ r_2 &: (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\cos v, \cos u \sin v, \sin u \sin v) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

qui sont de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} \partial_u r_1 (u,v) &= (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0), \\ \partial_v r_1 (u,v) &= (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v), \\ \partial_u r_2 (u,v) &= (0, -\sin u \sin v, \cos u \sin v), \\ \partial_v r_2 (u,v) &= (-\sin v, \cos u \cos v, \sin u \cos v). \end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \operatorname{rang} \{\partial_u r_1 (u,v), \partial_v r_1 (u,v)\} &= 2 \Leftrightarrow \sin v \neq 0 \Leftrightarrow v \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}, \\ \operatorname{rang} \{\partial_u r_2 (u,v), \partial_v r_2 (u,v)\} &= 2 \Leftrightarrow \sin v \neq 0 \Leftrightarrow v \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc r_1 et r_2 sont des immersions de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^3$. De plus, r_1 est un homéomorphisme local de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ dans $U_1 = \mathbb{S}^2 - \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$ et r_2 est un homéomorphisme local de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ dans $U_2 = \mathbb{S}^2 - \{(1,0,0), (-1,0,0)\}$ où U_1 et U_2 sont munis des restrictions de la topologie de $\mathbb{R}^3$. D'où, d'après l'énonce 3 de la prpposition **??**, $\mathbb{S}^2$ est une surface de classe C^∞ de $\mathbb{R}^3$ puisque $\mathbb{S}^2 = U_1 \cup U_2$.

Concernant la troisième méthode, on pose

$$\begin{aligned} U &= \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\right\}, \\ U_z^+ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\right\}, U_z^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : z < 0\right\}, \\ U_y^+ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : y > 0\right\}, U_y^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : y < 0\right\}, \\ U_x^+ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : x > 0\right\}, U_x^- = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{S}^2 : x < 0\right\}. \end{aligned}$$

Les applications

$$\begin{aligned} r_z^+ &: (u,v) \in U \mapsto \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 + v^2}\right) \in U_z^+, \\ r_z^- &: (u,v) \in U \mapsto \left(u, v, -\sqrt{1 - u^2 + v^2}\right) \in U_z^-, \\ r_y^+ &: (u,v) \in U \mapsto \left(u, \sqrt{1 - u^2 + v^2}, v\right) \in U_y^+, \\ r_y^- &: (u,v) \in U \mapsto \left(u, -\sqrt{1 - u^2 + v^2}, v\right) \in U_y^-, \\ r_x^+ &: (u,v) \in U \mapsto \left(\sqrt{1 - u^2 + v^2}, u, v\right) \in U_x^+, \\ r_x^- &: (u,v) \in U \mapsto \left(-\sqrt{1 - u^2 + v^2}, u, v\right) \in U_x^-, \end{aligned}$$

sont à la fois des immersions de classe C^∞ et des homéomorphismes. Comme $\mathbb{S}^2 = U_z^+ \cup U_z^- \cup U_y^+ \cup U_y^- \cup U_x^+ \cup U_x^-$, selon toujours l'énoncé 3 de la proposition **??**, $\mathbb{S}^2$ est une surface de classe C^∞ de $\mathbb{R}^3$.

La quatrième méthode est basée sur les projections stéréographiques. Soit $N = (0,0,1)$ et $S = (0,0,-1)$ les pôles Nord et Sud de $\mathbb{S}^2$. On pose $U_N = \mathbb{S}^2 - \{(0,0,1)\}$ et $U_N = \mathbb{S}^2 - \{(0,0,-1)\}$. On obtient les projections stéréographiques de pôle Nord et Sud, en associant à $P = (x,y,z) \in U_A$ 1'intersection avec le plan $z = 0$ de la droite passant par x et N $(A = N)$ ou S $(A = S)$. Explicitement,

$$\begin{aligned} i_N(x,y,z) &= \frac{1}{1-z}(x,y), (x,y,z) \in U_N, \\ i_S(x,y,z) &= \frac{1}{1+z}(x,y), (x,y,z) \in U_S. \end{aligned}$$

Les deux applications $i_N : U_N \to \mathbb{R}^2$ et $i_S : U_S \to \mathbb{R}^2$ sont des homéomorphismes et on a

$$\begin{aligned} r_N(u,v) &= i_N^{-1}(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2+1}\left(2u, 2v, u^2+v^2-1\right), (u,v) \in \mathbb{R}^2, \\ r_S(u,v) &= i_S^{-1}(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2+1}\left(2u, 2v, 1-u^2-v^2\right), (u,v) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{S}^2 = U_N \cup U_S$ et r_N et r_S sont des immersions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, la sphère $\mathbb{S}^2$ est une surface de classe C^∞ de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\mathcal{C}$ une courbe continue de E et Δ une droite affine passant par le point $P_0 \in \mathcal{C}$. Pour $P \in \mathcal{C}$, on note $d(P,\Delta)$ la distance entre Δ et P définie par

$$d(P,\Delta) = \inf_{Q\in\Delta} \|Q-P\|_2,$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidien de E. On dit que Δ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en P_0 si

$$\lim_{\mathcal{C}\ni P\to P_0} \frac{d(P,\Delta)}{\|P-P_0\|_2} = 0.$$

Proposition 0.12 *Soit $\mathcal{C}$ une courbe continue de E et $\varphi :]a,b[\to E$ une paramétrisation locale de $\mathcal{C}$ au voisinage de $P_0 = \varphi(t_0)$, $t_0 \in]a,b[$. On suppose que φ est différentiable en t_0 et que $\varphi'(t_0) \neq 0$. Alors $\mathcal{C}$ admet une droite tangente unique en P_0 qui est $P_0 + T_{P_0}\mathcal{C}$, où $T_{P_0}\mathcal{C}$ est la droite vectorielle suivante*

$$T_{P_0}\mathcal{C} = \mathbb{R}\varphi'(t_0) = \{\lambda\varphi'(t_0), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Démonstration. Soit Δ une droite affine dans E passant par le point P_0. On a donc

$$\Delta = \{P_0 + tv : t \in \mathbb{R}\},$$

où $\|v\|_2 = 1$. On note $\widetilde{P}$, $t \in \,]a,b[$, la projection orthogonale du point $P = \varphi(t) \in \mathcal{C}$ sur Δ. On a $\widetilde{P} = P_0 + \lambda v$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Par suite,

$$0 = \left(P - \widetilde{P}\right) \cdot v = (P - P_0 - \lambda v) \cdot v = (P - P_0) \cdot v - \lambda,$$

et donc $\lambda = (P - P_0) \cdot v$. D'où $\widetilde{P} = P_0 + \{(P - P_0) \cdot v\} v$. D'autre part, on écrit

$$d(P, \Delta)^2 = \left\|P - \widetilde{P}\right\|_2^2 = \|P - P_0\|_2^2 - \{(P - P_0) \cdot v\}^2,$$

et par suite,

$$\frac{d(P,\Delta)^2}{\|P - P_0\|_2^2} = 1 - \left\{\frac{(P - P_0) \cdot v}{\|P - P_0\|_2}\right\}^2 = 1 - \left\{\frac{\left(\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}\right) \cdot v}{\left\|\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}\right\|_2}\right\}^2.$$

D'où,

$$\lim_{P \to P_0} \frac{d(P,\Delta)}{\|P - P_0\|_2} = \lim_{t \to t_0} \frac{d(P,\Delta)}{\|P - P_0\|_2} = \sqrt{1 - \left\{\frac{\varphi'(t_0) \cdot v}{\|\varphi'(t_0)\|_2}\right\}^2}.$$

D'après cette formule, Δ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en P_0 si, et seulement si,

$$\frac{\varphi'(t_0) \cdot v}{\|\varphi'(t_0)\|_2} = \pm 1,$$

ou encore $v = \pm \varphi'(t_0) / \|\varphi'(t_0)\|_2$. De là, on conclut que la droite affine

$$P_0 + T_{P_0}\mathcal{C} = P_0 + \mathbb{R}\varphi'(t_0) = \{P_0 + \lambda \varphi'(t_0), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

est l'unique droite affine tangente à $\mathcal{C}$ en P_0. ■

Proposition 0.12 est fondamentale dans la géométrie différentielle puisque elle concerne les droites tangentes des courbes. On rappelle que la notion des espaces tangents est centrale dans la géométrie.

Corollaire 0.13 *Soit $\mathcal{C}$ une courbe de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^*$, de E. Alors $\mathcal{C}$ admet une droite tangente unique en tout point $P \in \mathcal{C}$.*

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{C}$ et $\varphi : \,]a,b[\, \to \mathcal{C}$ une paramétrisation locale de $\mathcal{C}$ au voisinage de P avec $\varphi(t) = P$, $t \in \,]a,b[$. Comme $\varphi'(t) \neq 0$, Proposition 0.12 montre que $\mathcal{C}$ admet une seule droite tangente en P identique à la droite affine $P + T_P\mathcal{C} = \{P + \lambda \varphi'(t), \lambda \in \mathbb{R}\}$. ■

Exemple 0.14 *On considère une courbe* $\mathcal{C}$ *de classe* C^k, $k \in \mathbb{N}^*$, *de* $\mathbb{R}^3$, *et un point* $P_0 \in \mathcal{C}$. *Si*

$$\varphi : t \in]a, b[\to \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathcal{C}$$

est une paramétrisation locale de $\mathcal{C}$ *au voisinage de* P_0 *avec* $P_0 = \varphi(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, $t_0 \in]a, b[$, *alors d'après Proposition 0.12 la droite tangente à* $\mathcal{C}$ *en* P_0 *est déterminée par les équations paramétriques:*

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda x'(t_0), \\ y = y_0 + \lambda y'(t_0), \\ z = z_0 + \lambda z'(t_0), \end{cases}$$

où λ *est le paramètre.*

Exemple 0.15 *On suppose que la courbe* $\mathcal{C}$ *est donnée au voisinage du point* $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$ *par les deux équations:*

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas la droite tangente à $\mathcal{C}$ *en* P_0 *est déterminée par les deux équations cartésiennes*

$$\begin{cases} \partial_x F(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \partial_y F(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\ \qquad + \partial_z F(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0, \\ \partial_x G(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \partial_y G(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\ \qquad + \partial_z G(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \end{cases}$$

Exemple 0.16 *Soit* $\mathcal{C}$ *une courbe plane de* $\mathbb{R}^2$, *qui est donnée au voisinage de* $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ *par l'équation:*

$$F(x, y) = 0.$$

Alors la droite tangente à $\mathcal{C}$ *en* P_0 *est déterminée par l'équation cartésienne*

$$\partial_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y F(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Exemple 0.17 *Soit* $f :]a, b[\to \mathbb{R}^2$ *une fonction de classe* C^k, $k \in \mathbb{N}^*$. *La droite tangente au graphe* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in]a, b[\}$ *de* f *en* $P_0 = (x_0, f(x_0))$ *est donnée par l'équation cartésienne*

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Soit $\mathcal{C}$ une courbe de classe C^k, $k \in \mathbb{N}^*$, de E. Si $\varphi :]a,b[\to \mathcal{C}$ est une paramétrisation locale de $\mathcal{C}$, on définit la longueur de la partie $\varphi(]a,b[)$ de $\mathcal{C}$ comme étant $\mathrm{long}(\varphi(]a,b[)) = \int_a^b \|\varphi'(\tau)\|_2 \, d\tau$.

Exercice 0.18 *Etudier la courbe plane définie par l'équation*

$$x^2 - y^3 = 0.$$

Solution. γ est une courbe algébrique plane de degré 3 possédant un seul point singulier qui est $(0,0)$. Par conséquent, $\gamma - (0,0)$ est une courbe analytique réelle, et donc de classe C^∞, de $\mathbb{R}^2$.

La courbe paramétrique $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (t^3, t^2) \in \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation polynômiale injective, et donc analytique réelle, de γ. On voit que $(0,0)$ est une valeur singulière de cette paramétrisation.

D'autre part, comme

$$\gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^{2/3}\right\},$$

et la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2/3} \in \mathbb{R}$ est continue, la courbe γ est de classe C^0 (on dit aussi que γ est continue ou encore topologique).

Une question se pose: est-ce que la courbe γ est de classe C^1 au voisinage du point $(0,0)$? la réponse est négative. En effet, si γ est de classe C^1 au voisinage de $(0,0)$, alors il existe une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

$$\begin{aligned} \gamma \cap \Omega &= \{(x,y) \in \Omega : f(x,y) = 0\}, \\ \nabla f(x,y) &\neq 0, \forall (x,y) \in \Omega, \end{aligned}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$. Sans perte de généralité, on suppose que $\partial_y f(0,0) \neq 0$. Dans ce cas, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert $U \subset \Omega$ de $(0,0)$ et une fonction de classe C^1 $\varphi :]-a,a[\to \mathbb{R}$ tels que

$$\gamma \cap U = \{(x, \varphi(x)) \in \Omega : -a < x < a\}.$$

Par conséquent,

$$\varphi(x) = x^{2/3}, -a < x < a,$$

ce qui constitue une contradiction car d'après cette expression, la fonction φ n'est pas dérivable en 0.

Une deuxième question se pose: est-ce que la courbe γ admet une droite tangente en $(0,0)$? la réponse est 'oui'. La droite tangente à γ en $(0,0)$ est $\Delta : x = 0$, car

$$\lim_{t\to 0} \frac{d((0,0),\Delta)}{\|\varphi(t) - (0,0)\|_2} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^3}{\sqrt{t^4 + t^6}} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{\sqrt{1+t^2}} = 0.$$

■

Soit $\varphi : I \to E$ une courbe paramétrique continue, simple et localement rectifibale. On suppose que qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, la courbe $\gamma = \varphi(I)$ admet une droite tangente en $\varphi(t)$. On note $\Delta\theta$ l'angle entre les droites tangentes de γ en $\varphi(t_0)$ et en $\varphi(t)$. La courbure de γ en $P_0 = \varphi(t_0)$ est, par définition, la limite

$$R(P_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta\theta}{\operatorname{long}\left(\widehat{\varphi(t_0)\varphi(t)}\right)}.$$

Proposition 0.19 *Soit $\varphi : I \to E$ une courbe paramétrique de classe C^2 régulière et simple. Alors la courbure de $\gamma = \varphi(I)$ en un point $P \in \gamma$ est donnée par la formule*

$$R(P) = \|\psi''(s)\|_2,$$

où $P = \psi(s)$ et ψ est une paramétrisation naturelle de γ au voisinage de P.

Démonstration. Etant donné $\tau > 0$, on a

$$\|\psi'(s + \Delta s) - \psi'(s)\|_2 = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}.$$

et

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\psi'(s+\Delta s) - \psi'(s)}{\Delta s}\right\|_2 &= \frac{\|\psi'(s+\Delta s) - \psi'(s)\|_2}{|\Delta s|} \\
&= \frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\operatorname{long}\left(\widehat{\psi(s)\psi(s+\Delta s)}\right)} \\
&= \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \times \frac{\Delta\theta}{\operatorname{long}\left(\widehat{\psi(s)\psi(s+\Delta s)}\right)}.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\|\psi''(s)\|_2 &= \lim_{\Delta s \to 0}\left\|\frac{\psi'(s+\Delta s) - \psi'(s)}{\Delta s}\right\|_2 \\
&= \lim_{\Delta s \to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \times \frac{\Delta\theta}{\operatorname{long}\left(\widehat{\psi(s)\psi(s+\Delta s)}\right)}\right) \\
&= \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \times \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\theta}{\operatorname{long}\left(\widehat{\psi(s)\psi(s+\Delta s)}\right)} = R(P).
\end{aligned}$$

■

Si $R(P) \neq 0$, le vecteur

$$\nu(P) = \frac{\psi''(s)}{R(P)},$$

ne dépend pas de la paramétrisation naturelle ψ et s'appelle 'vecteur d'unité de courbure' ou encore 'vecteur normal (principal)' à γ au point P puisque $\nu(P) \perp \tau(s)$ avec $\tau(s) = \psi'(s)$. Ce vecteur se dirige toujours vers le sens où le vecteur tangent τ se tourne, en d'autre termes, ν détermine le sens de la retation de τ.

La droite normale (principale) à γ en P est donnée par l'équation

$$P + \lambda\nu, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Proposition 0.20 *Soit γ une courbe de classe C^2 de E. Si $\varphi : I \to E$ est une paramétrisation locale de γ, alors la courbure de γ en $P = \varphi(t)$ est donnée par la formule*

$$R(P) = \frac{\|\varphi'(t) \times \varphi''(t)\|_2}{\|\varphi'(t)\|_2^3}.$$

De plus, si $R(P) \neq 0$, on a

$$\nu(P) = \frac{\|\varphi'(t)\|_2^2 \varphi''(t) - (\varphi'(t) \cdot \varphi''(t))\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|_2 \|\varphi'(t) \times \varphi''(t)\|_2}.$$

Démonstration. On rappelle que la relation entre φ et sa paramétrisation naturelle associée ψ est donnée par la formule

$$\psi \circ \phi(t) = \varphi(t), t \in I,$$

où

$$\phi(t) = \int_{t_0}^{t} \|\varphi'(\eta)\|_2 \, d\eta, t, t_0 \in I.$$

On a donc

$$\psi' \circ \phi(t)\,\phi'(t) = \varphi'(t), t \in I,$$

et

$$\psi'' \circ \phi(t)\,(\phi'(t))^2 + \psi' \circ \phi(t)\,\phi''(t) = \varphi''(t), t \in I.$$

Par suite,

$$\psi''(s) = \frac{\varphi''(t) - \psi'(s)\,\phi''(t)}{(\phi'(t))^2} = \frac{\phi'(t)\,\varphi''(t) - \phi''(t)\,\varphi'(t)}{(\phi'(t))^3},$$

avec $s = \phi(t)$. D'autre part, on a

$$\phi'(t) = \|\varphi'(t)\|_2\,, \phi''(t) = \frac{\varphi'(t) \cdot \varphi''(t)}{\|\varphi'(t)\|_2}.$$

Ainsi donc,

$$\psi''(s) = \frac{\|\varphi'(t)\|_2^2\,\varphi''(t) - (\varphi'(t) \cdot \varphi''(t))\,\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|_2^4}.$$

Selon la définition de la courbure, on a

$$\begin{aligned}
R(P)^2 &= \|\psi''(s)\|_2^2 = \frac{\left(\|\varphi'(t)\|_2^2\,\varphi''(t) - (\varphi'(t) \cdot \varphi''(t))\,\varphi'(t)\right)^2}{\|\varphi'(t)\|_2^8} \\
&= \frac{\|\varphi'(t)\|_2^4\,\|\varphi''(t)\|_2^2 - (\varphi'(t) \cdot \varphi''(t))^2\,\|\varphi'(t)\|_2^2}{\|\varphi'(t)\|_2^8} \\
&= \frac{\|\varphi'(t)\|_2^2\,\|\varphi''(t)\|_2^2 - (\varphi'(t) \cdot \varphi''(t))^2}{\|\varphi'(t)\|_2^6} \\
&= \frac{\|\varphi'(t)\|_2^2\,\|\varphi''(t)\|_2^2 - \|\varphi'(t)\|_2^2\,\|\varphi''(t)\|_2^2\cos^2\theta}{\|\varphi'(t)\|_2^6} \\
&= \frac{\|\varphi'(t)\|_2^2\,\|\varphi''(t)\|_2^2\,(1 - \cos^2\theta)}{\|\varphi'(t)\|_2^6} = \frac{\|\varphi'(t)\|_2^2\,\|\varphi''(t)\|_2^2\sin^2\theta}{\|\varphi'(t)\|_2^6} \\
&= \frac{\|\varphi'(t) \times \varphi''(t)\|_2^2}{\|\varphi'(t)\|_2^6},
\end{aligned}$$

où θ est l'angle formé par $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$. D'où

$$R(P) = \frac{\|\varphi'(t) \times \varphi''(t)\|_2}{\|\varphi'(t)\|_2^3}, P = \varphi(t).$$

Par conséquent,

$$\nu(P) = \frac{\psi''(s)}{R(P)} = \frac{\|\varphi'(t)\|_2^2\,\varphi''(t) - (\varphi'(t) \cdot \varphi''(t))\,\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|_2\,\|\varphi'(t) \times \varphi''(t)\|_2}.$$

La démonstration est terminée. ■

Le vecteur d'unité $\beta = \tau \times \nu$ s'appelle le vecteur binormal à γ en P. La droite binormale à γ en P est donnée par

$$P + \lambda\beta, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le système $\{\tau, \nu, \beta\}$ constitue une base orthonormale de l'espace $\mathbb{R}^3$ et s'appelle 'base de Frenet' au point P. Le repère $\{P, \tau, \nu, \beta\}$ est dit 'repère mobile de Frenet'.

D'après la proposition 0.20, si $\varphi : I \to E$ est une paramétrisation locale de γ, alors

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|_2} \times \frac{\|\varphi'(t)\|_2^2 \varphi''(t) - (\varphi'(t) \cdot \varphi''(t)) \varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|_2 \|\varphi'(t) \times \varphi''(t)\|_2} \\ &= \frac{\varphi'(t) \times \varphi''(t)}{\|\varphi'(t) \times \varphi''(t)\|_2}, t \in I. \end{aligned}$$

Soit γ une courbe de classe C^3 dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que la courbure de γ en $P \in \gamma$ n'est pas nulle. On définit la torsion T de γ en P par la formule

$$T(P) = -\frac{\det\{\psi'(s), \psi''(s), \psi'''(s)\}}{R^2},$$

où ψ est une paramétrisation naturelle de γ au voisinage de $P = \psi(s)$. Il est évident, d'après cette formule, que $T(P)$ ne dépend pas de ψ.

Proposition 0.21 *Si φ est une paramétrisation arbitraire de γ au voisinage de P, alors la torsion de γ en $P = \varphi(t)$ est donnée par*

$$T(P) = -\frac{\det\{\varphi'(t), \varphi''(t), \varphi'''(t)\}}{\|\varphi'(t) \times \varphi''(t)\|_2^2}.$$

Démonstration. Exercice. ■

Proposition 0.22 *Soit γ une courbe de classe C^3 dans $\mathbb{R}^3$ ayant une courbure non nulle. Alors pour toute paramétrisation naturelle de γ, on a les équations*

$$\begin{cases} \tau' = R\nu, \\ \nu' = -R\tau - T\beta, \\ \beta' = T\nu, \end{cases}$$

qui s'appellent 'relations de Serret-Frenet'.

Ces relations ont été obtenues de façon indépendante par Serret en 1851 et par Frenet dans sa thèse en 1847.

Démonstration. La relation $\tau' = R\nu$ est induite directement de la définition du vecteur ν.

Vérifions que $\nu' = -R\tau - T\beta$. Comme $\{\tau, \nu, \beta\}$ est une base de l'espace $\mathbb{R}^3$ et $\nu' \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\nu' = a\tau + b\nu + c\beta, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, comme $\|\nu\|_2 = 1$ quel que soit s, on a $\nu \perp \nu'$. Par suite,

$$0 = \nu \cdot \nu' = \nu \cdot (a\tau + b\nu + c\beta) = a\nu \cdot \tau + b\nu \cdot \nu + c\nu \cdot \beta = b.$$

Ainsi donc, $\nu' = a\tau + c\beta$.

On dérive la relation

$$\nu = \frac{\psi''}{R},$$

il vient

$$\nu' = \frac{R\psi''' - R'\psi''}{R^2} = \frac{1}{R}\psi''' - \frac{R'}{R}\nu.$$

Par suite,

$$a = \nu' \cdot \tau = \left(\frac{1}{R}\psi''' - \frac{R'}{R}\nu\right) \cdot \tau = \frac{1}{R}\psi''' \cdot \tau.$$

Mais

$$0 = (\psi' \cdot \psi'')' = \psi'' \cdot \psi'' + \psi' \cdot \psi''' = R^2 + \tau \cdot \psi'''.$$

Donc $\tau \cdot \psi''' = -R^2$ et par conséquent, $a = -R$.

On a aussi

$$\begin{aligned} b &= \nu' \cdot \beta = \left(\frac{1}{R}\psi''' - \frac{R'}{R}\nu\right) \cdot \beta = \frac{\psi''' \cdot \beta}{R} = \frac{\psi''' \cdot (\tau \times \nu)}{R} \\ &= \frac{\psi''' \cdot (\psi' \times \psi'')}{R^2} = \frac{\det(\psi', \psi'', \psi''')}{R^2} = -T. \end{aligned}$$

Ainsi donc, $\nu' = -R\tau - T\beta$.

Vérifions que $\beta' = T\nu$. On a

$$\beta = \tau \times \nu.$$

Par suite,

$$\beta' = \tau' \times \nu + \tau \times \nu' = R\nu \times \nu + \tau \times \nu' = \tau \times \nu'.$$

Ceci montre que $\beta' \perp \tau$. D'autre part, comme $\|\beta\|_2 = 1$, on a $\beta' \perp \beta$. D'où $\beta' = a\nu$ avec $a \in \mathbb{R}$. Mais comme

$$\beta = \frac{\psi' \times \psi''}{R},$$

on a

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{R(\psi'' \times \psi'' + \psi' \times \psi''') - R'(\psi' \times \psi'')}{R^2} = \frac{\psi' \times \psi'''}{R} - \frac{R'}{R}\tau \times \nu \\ &= \frac{\psi' \times \psi'''}{R} - \frac{R'}{R}\beta. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} a &= \beta' \cdot \nu = \left(\frac{\psi' \times \psi'''}{R} - \frac{R'}{R} \beta \right) \cdot \nu = \frac{(\psi' \times \psi''') \cdot \psi''}{R^2} - \frac{R'}{R} \beta \cdot \nu \\ &= \frac{\det(\psi', \psi''', \psi'')}{R^2} = -\frac{\det(\psi', \psi'', \psi''')}{R^2} = T, \end{aligned}$$

et donc $\beta' = T\nu$. ■

Une question se pose: Quelles sont les courbes dans $\mathbb{R}^3$ de courbure non nulle ayant une torsion nulle?

Supposons que $T \equiv 0$. Dans ce cas, on a $\beta' \equiv 0$, ce qui implique que le vecteur β est constant. Ainsi donc,

$$\tau \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \psi' \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow (\psi \cdot \beta)' = 0 \Leftrightarrow \psi \cdot \beta = \text{const}.$$

Soit $P_0 = \psi(s_0) \in \gamma$. On a

$$\psi(s) \cdot \beta = \psi(s_0) \cdot \beta = P_0 \cdot \beta, \forall s.$$

Par suite,

$$(\psi(s) - P_0) \cdot \beta = 0, \forall s.$$

Ceci signifie que la courbe γ est située dans le plan qui passe par le point P_0 et est orthogonal au vecteur β.

Inversement, si γ est située dans un plan de $\mathbb{R}^3$, alors $T \equiv 0$ puisque $\psi''' \in \text{Vect}\{\psi', \psi''\}$ et donc $\det\{\psi', \psi'', \psi'''\} = 0$ quel que la paramétrisation naturelle locale de γ.

On peut donc lancer la proposition suivante.

Proposition 0.23 *Les courbes planes connexes dans l'espace* $\mathbb{R}^3$ *sont*

1. *Les droites affines et les segments des droites affines.*
2. *Les courbes de courbure non nulle et sans torsion.*
3. *Les courbes construites par l'adjonction lisse des segments des droites affines avec des courbes de courbure non nulle et sans torsion.*

Problème 0.24 *Soit* γ *une courbe connexe de classe* C^3 *de* E *(*E *est* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$*). On suppose que la courbure* R_γ *est constante et que la torsion* T_γ *est identiquement nulle. Vérifier que* γ *est située dans un cercle de rayon* $1| R_\gamma$*.*

Solution. On remarque d'abord que, d'après la proposition 0.23, la courbe γ est plane. Soit $\psi : J \to E$ une paramétrisation naturelle locale de γ. On pose

$$\widetilde{\psi}(s) = \psi(s) + \frac{1}{R_\gamma}\nu(s), s \in J.$$

On a

$$\widetilde{\psi}'(s) = \tau(s) + \frac{1}{R_\gamma}\nu'(s) = \tau(s) + \frac{1}{R_\gamma}(-R_\gamma\tau(s) - T\beta(s)) = 0, \forall s \in J.$$

Par suite,

$$\widetilde{\psi}(s) = \text{constante} = O_\psi, \forall s \in J,$$

et donc

$$\|\psi(s) - O_\psi\|_2 = \left\|-\frac{1}{R_\gamma}\nu(s)\right\|_2 = \frac{1}{R_\gamma}\|\nu(s)\|_2 = \frac{1}{R_\gamma}, \forall s \in J.$$

Ceci signifie que la courbe $\{\psi(s) : s \in J\}$ est située dans le cercle de centre O_ψ et de rayon $1|\, R_\gamma$.

D'après ce qui précède, la fonction $P \in \gamma \mapsto P + \frac{1}{R_\gamma}\nu(P) \in E$ est localement constante, et comme elle est continue et γ est connexe, elle est donc constante sur γ tout entier. Ainsi donc,

$$P + \frac{1}{R_\gamma}\nu(P) = O, \forall P \in \gamma.$$

Par suite,

$$\|P - O\|_2 = \left\|-\frac{1}{R_\gamma}\nu(P)\right\|_2 = \frac{1}{R_\gamma}\|\nu(P)\|_2 = \frac{1}{R_\gamma}, \forall P \in \gamma,$$

ce qui signifie que la courbe γ est située dans le cercle de centre O et de rayon $1|\, R_\gamma$. ■

Problème 0.25 *Soit γ une courbe de classe C^2 de $\mathbb{R}^3$ située dans une sphère de rayon $a > 0$. Montrer que*

$$R_\gamma \geq \frac{1}{a}.$$

Démonstration. On a

$$\gamma \subset S(O, a) = \left\{P \in \mathbb{R}^3 : \|P - O\|_2 = a\right\}, O \in \mathbb{R}^3.$$

Soit $\psi : J \to E$ une paramétrisation naturelle locale de γ. On a

$$\|\psi(s) - O\|_2^2 = (\psi(s) - O) \cdot (\psi(s) - O) = a^2, s \in J.$$

Par suite,

$$(\psi(s) - O) \cdot \psi'(s) = (\psi(s) - O) \cdot \tau(s) = 0, s \in J,$$

et

$$\begin{aligned}
\tau(s) \cdot \tau(s) + (\psi(s) - O) \cdot \tau'(s) &= 1 + (\psi(s) - O) \cdot \tau'(s) \\
&= 1 + R_\gamma(\psi(s))(\psi(s) - O) \cdot \nu(\psi(s)) \\
&= 0, s \in J.
\end{aligned}$$

D'où

$$R_\gamma(\psi(s)) = -\frac{1}{(\psi(s) - O) \cdot \nu(\psi(s))}, s \in J.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz, on peut écrire

$$\begin{aligned}
|R_\gamma(\psi(s))| &= \frac{1}{|(\psi(s) - O) \cdot \nu(\psi(s))|} \\
&\geq \frac{1}{\|(\psi(s) - O)\|_2 \|\nu(\psi(s))\|_2} = \frac{1}{a}, s \in J.
\end{aligned}$$

Ainsi donc, comme ψ est choisie de façon arbitraire, on a

$$R_\gamma(P) \geq \frac{1}{a}, \forall P \in \gamma,$$

ce qui est le résultat désiré. ■