Université Ziane Achour Djelfa.
Faculté des sciences exactes et informatique.
Département de mathématiques et de l'informatique.

Séries d'exercices pour $3^{ième}$ année mathématiques (LMD-S6).
Promotion : 2019/2020.

Introduction à la théorie des opérateurs linéaires

Série N°1

Durant tout cette série, $\mathbb{k}$ désignera le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou complexes $\mathbb{C}$.

Exercice 1:

Soient $x = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ et $y = y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ deux suites de nombres dans $\mathbb{k}$, et soit $p, q \in \left]1, +\infty\right[$ vérifient $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montre que:

$$\forall x, y \in \ell^2(\mathbb{k}),\ \text{on a } \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(Ing de Cauchy-Schwarz)}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ \text{on a } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \text{(Ing de Young)}$$

Exercice 2:

1) Soit d une distance sur un $\mathbb{k}$-espace vectoriel E vérifie les conditions:

$$(\mathbf{i})\ \forall x, y, z \in E : d(x+z, y+z) = d(x, y)\,,\quad (\mathbf{ii})\ \forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{k} : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y)\,.$$

Montre que l'application $\|\cdot\|$ définie sur E par : $\|x\| = d(x, 0)$, définit sur E une norme de laquelle dérive la métrique d.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les applications suivantes sont des normes? (vérifier)

$$(\mathbf{i})\quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,, \qquad (\mathbf{ii})\quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\,.$$

$$(\mathbf{iii})\quad \|(x, y)\| = x^2 - y^2, \qquad (\mathbf{iv})\quad \|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},\ p \geq 1.$$

Exercice 3:

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{k}$-espace vectoriel normé. Montre que $\forall x, y \in E$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \Longleftrightarrow |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|\,.$$

Exercice 4:

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{k}$-espace vectoriel normé de dimension fini. Montre que les trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 5:

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{k}$-espace vectoriel normé. Montre que toute suite convergente est de Cauchy. L'inverse n'est pas vrai.