Université de Djelfa
faculté des sciences exacte et de l'infs
département des maths et infs
1 ére année **M I**
Matiére : analyse 2
Responsable de module : Mr Lamri Rachid

Equations différentielles du premier ordre :

Equations à variables séparées et séparables

Considérons une équation différentielle de la forme

$$y' = f_1(x)f_2(y) \qquad ; y' = \frac{dy}{dx}$$

où le second membre est le produit d'une fonction dépendant seulement de x par une fonction dépendant seulement de y.

l'égalité de deux différentielles, et leurs primitives se distingueront par une constante. Intégrant le premier membre par

rapport à y et le second par rapport à x, on obtient

$$\int \frac{1}{f_2(y)}dy = \int f_1(x)dx + C$$

Nous avons obtenu une relation entre la solution$y$, la variable indépendante x et la constante arbitraire C, c.-à-d. qu'on a l'intégrale générale de l'équation precedante

.

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

est appelée équation à variables séparées. Comme on vient de le démontrer, son intégrale générale est

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

Exemple : Soit l'équation à variables séparées $xdx + ydy = 0$. Son intégrale générale est

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

Une équation de la forme

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

est appelée une équation à variables séparables. Elle peut être ramenée à une équation à variables séparées en divisant les deux membres par l'expression

$N_1(y)M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)dx}{N_1(y)M_2(x)} + \frac{M_2(x)N_2(y)dy}{N_1(y)M_2(x)} = 0$$

ou

$$\frac{M_1(x)dx}{M_2(x)} + \frac{N_2(y)dy}{N_1(y)} = 0$$

Exemple : Soit l'équation $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$.
Séparons les variables:

$$\frac{(1+x)ydx}{xy} + \frac{(1-y)x}{xy} = 0$$

alors

$$\frac{(1+x)dx}{x} + \frac{(1-y)}{y} = 0$$

et

$$(\frac{1}{x}+1)dx + (\frac{1}{y}-1)dy = 0$$

On obtient en intégrant

$$Log|x| + x + Log|y| - y = C$$

qui est l'intégrale générale de l'équation proposée

Equations homogènes du premier ordre

Définition : On dit que la fonction $f(x,y)$ est une fonction homogène de degré n par rapport aux variables x et y si l'on a pour tout λ.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y).$$

Exemple : $f(x,y) = xy - y^2$ est une fonction homogène du second degré, car

.

$$(\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2(xy - y^2)$$

Définition : L'équation du premier ordre

$$y' = f(x,y) \qquad ; y' = \frac{dy}{dx}$$

est dite homogène par rapport à x et y si la fonction $f(x,y)$ est une fonction homogène de degré zéro par rapport à x et y.

Résolution de l ' équation homogène :

On a par hypothèse $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$. Posant dans cette identité $\lambda = \frac{1}{x}$, on obtient

$$F(x,y) = f(1, \frac{y}{x})$$

c.-à-d. qu'une fonction homogène de degré zéro dépend seulement du rapport $\frac{y}{x}$.

L'équation s'écrit alors sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(1, \frac{y}{x})$$

Faisons la substitution

$$u = \frac{y}{x}, \quad ou \;\; y = ux.$$

On a alors

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}x$$

Substituant cette expression de la dérivée dans l'équation , on obtient

$$u + \frac{du}{dx}x = f(1,u)$$

C'est une équation à variables séparables

$$\frac{du}{dx}x = f(1,u) - u \quad ou \quad \frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x}$$

On trouve par intégration

$$\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C$$

Exemple : Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

On a dans le second membre une fonction homogène de degré zéro, donc l'équation proposée est homogène. Faisons le changement de variables

$$u = \frac{y}{x}, \quad ou \;\; y = ux.$$

alors

$$u + \frac{du}{dx}x = \frac{u}{1-u^2}$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{u^3}{1-u^2}$$

Séparons les variables, on a:

$$\frac{dx}{x} = \frac{(1-u^2)du}{u^3}$$

$$\frac{dx}{x} = (\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u})du$$

par intégration on a

$$-\frac{1}{2u^2} - \log|u| = \log|x| + C$$

Substituant $u = \frac{y}{x}$, on obtient l'intégrale générale de l'équation initiale

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \log|Cy|$$

on exprime x en fonction de y

$$x = y\sqrt{-2\log|Cy|}$$

Références :

- N.Piskounov,calcul differentile et integral