Solutions des exercices (série 2)

Billal Lekdim

15/04/2020

[redacted]

Exercise 1 I. avec les condition aux limites $u(t;0) = 0$ **et** $u(t;l) = 0$. *On recherche une solution de la forme (on sépare les variables x et t) :*

$$u(t,x) = X(x)T(t).$$

Nous remplaçons cette expression dans l'EDP (1), *O obtient :*

$$\frac{1}{c^2}XT^{''} = X^{''}T.$$

On divise par le produit XT, on trouve

$$\frac{1}{c^2}\frac{T^{''}}{T} = \frac{X^{''}}{X} = -\lambda \qquad (\lambda \textit{ est une constante quelconque})$$

Encore une fois, les variables sont bien séparables car elles se trouvent de chaque coté de l'égalité.

On est alors amené à résoudre les problèmes suivant :

♣ *problème aux valeurs propres (Sturm-Liouville) sur la variable x (car les conditions aux frontières homogènes se trouvent sur cette variable) :*

$$\begin{cases} X^{''}(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où il faut rechercher toutes valeurs propres λ_n *et les fonctions propres* $X_n(x)$.

♣♣ *équation différentielle du 1^er ordre sur la variable t :*

$$T^{''}(t) + \lambda_n c^2 T(t) = 0 \tag{2}$$

♣ *Résolution du problème aux valeurs propres*

$$X^{''} + \lambda X = 0 \qquad \textit{l'équation caractéristique est} \qquad r^2 + \lambda = 0$$
$$\textit{Le discriminant de l'équation caractéristique est } \triangle = -4\lambda$$

Cas 1 : *Si* $\triangle = 0$ *soit* $\lambda = 0$.

La solution s'écrit $X(x) = Ax + B$,

$X(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$ *et* $X(l) = 0 \Longrightarrow A = 0$.

Par conséquent, $\lambda = 0$ *n'est pas une valeur propre du problème (1).*

Cas 2 : *Si* $\triangle > 0$ *soit* $\lambda < 0$. *Donc* $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$.

La solution s'écrit

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

$X(0) = 0 \Longrightarrow A + B = 0$ *soit* $A = -B$

$X(l) = 0 \Longrightarrow A(e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l}) = 2A\sinh(\sqrt{-\lambda}a) = 0$

comme$\sqrt{-\lambda} \neq 0$, $\quad \sinh(\sqrt{-\lambda}a) \neq 0$ *et donc* $A = 0$.

Par conséquent, $\lambda < 0$ *ne sont pas des valeurs propres.*

Cas 3 : *Si* $\triangle < 0$ *soit* $\lambda > 0$. *Donc* $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$.

La solution s'écrit

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

$X(0) = 0 \Longrightarrow A = 0 \quad$ *et* $\quad X(l) = 0 \Longrightarrow B\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$. *Une solution non triviale de l'équation* $(B \neq 0)$

correspond à :

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \quad \textit{avec} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Par conséquent,$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ *sont les valeurs propres du problème aux limites (1). Les fonctions propres associées aux valeurs propres* λ_n *s'écrivent :*

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

où B_n *sont des constantes arbitraires.*

♣♣ *Résolution de l'équation différentielle (2) :*

$$T^{''}(t) + \left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 T(t) = 0.$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit :

$$T(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right),$$

où C_n *et* D_n *sont deux constantes arbitraires.*

Solution générale de l'EDP :

La solution générale de l'équation aux dérivées partielles est la superposition de l'ensemble des solutions (la somme de toutes les solutions $u_n(t,x)$) :

$$u\left(t,x\right)=\sum X_n\left(x\right)T_n\left(t\right).$$

En associant les coefficients A_nC_n et A_nD_n entre eux, nous obtenons la solution générale de l'EDP :

$$u\left(t,x\right)=\sum\left\{A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Solution particulière de l'EDP :

La solution générale doit vérifier les conditions initiales :

$$u\left(0,x\right)=\frac{x(l-x)}{2l^2}\ \text{ et }\ \frac{\partial u}{\partial t}\left(0,x\right)=0.$$

En remplaçant les deux conditions initiales dans la solution générale, nous obtenons :

$$\frac{\partial u}{\partial t}\left(0,x\right)=0\Longrightarrow B_n=0$$

et

$$f\left(x\right)=\sum A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Il reste donc à calculer les coefficients A_n en décomposant $f(x)$ sur la base des fonctions propres :

$$\begin{aligned}A_n&=\frac{2}{l}\int_0^l f\left(x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\\&=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{x(l-x)}{2l^2}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx\\&=2\frac{1-\left(-1\right)^n}{\pi^3n^3},\qquad\forall n=1,2,3,\ldots.\end{aligned}$$

La position de la corde en fonction de x et du temps est alors donnée par la fonction suivante :

$$u\left(t,x\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\left(-1\right)^n}{\pi^3n^3}\cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

II. avec les condition aux limites $u_x(t;0)=0$ **et** $u_x(t;l)=0$. *De la même façon on arrive à résoudre les deux problèmes suivants :*

$$\left\{\begin{array}{c}X''\left(x\right)+\lambda X\left(x\right)=0\\X'\left(0\right)=X'\left(l\right)=0\end{array}\right.\tag{3}$$

et

$$T''\left(t\right)+\lambda_nc^2T\left(t\right)=0\tag{4}$$

♣ *Résolution du problème aux valeurs propres (3) :*

Cas 1 : *Si* $\triangle = 0$ *soit* $\lambda = \lambda_0 = 0$.

La solution s'écrit $X(x) = Ax + B$,

$X'(0) = X'(l) = 0 \Longrightarrow A_0 = 0$, *donc la solution s'écrit :*

$$X(x) = B = A_0.$$

où A_0 *est une constante arbitraire.*

Cas 2 : *Si* $\triangle > 0$ *soit* $\lambda < 0$. *Donc* $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$.

La solution s'écrit

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

$X'(0) = 0 \Longrightarrow A - B = 0$ *soit* $A = B$.

$X'(l) = 0 \Longrightarrow A(e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l}) = 2A\sinh(\sqrt{-\lambda}a) = 0$, *comme* $\sqrt{-\lambda} \neq 0$, $\sinh(\sqrt{-\lambda}a) \neq 0$ *et donc* $A = 0$.

Par conséquent, $\lambda < 0$ *ne sont pas des valeurs propres.*

Cas 3 : *Si* $\triangle < 0$ *soit* $\lambda > 0$. *Donc* $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$.

La solution s'écrit

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

$X'(0) = 0 \Longrightarrow B = 0$ *et* $X(l) = 0 \Longrightarrow A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$. *Une solution non triviale de l'équation* $(B \neq 0)$ *correspond à :*

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \quad avec \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Par conséquent, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ *sont les valeurs propres du problème aux limites (3). Les fonctions propres associées aux valeurs propres* λ_n *s'écrivent :*

$$X_n(x) = B_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

où B_n *est une constante arbitraire.*

♣♣ *Résolution de l'équation différentielle (4) est identique à la résolution de l'équation différentielle (2), donc la solution générale de cette équation différentielle s'écrit :*

$$T(t) = C_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + D_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right),$$

où C_n et D_n sont deux constantes arbitraires.

Solution générale de l'EDP :

En associant les coefficients B_nC_n et B_nD_n entre eux, nous obtenons la solution générale de l'EDP :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum X_n(x)\,T_n(t) \\ &= A_0 + \sum \left\{ A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}t\right) \right\} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \end{aligned}$$

Solution particulière de l'EDP :

La solution générale doit vérifier les conditions initiales :

$$u(0,x) = \frac{x(l-x)}{2l^2} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0.$$

En remplaçant les deux conditions initiales dans la solution générale, nous obtenons :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0 \Longrightarrow B_n = 0$$

et

$$f(x) = A_0 + \sum A_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Il reste donc à calculer les coefficients A_0 et A_n en décomposant $f(x)$ sur la base des fonctions propres :

$$A_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{x(l-x)}{2l^2}dx = \frac{l^2}{6}$$

et

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \\ &= \frac{2}{l}\int_0^l \frac{x(l-x)}{2l^2}\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi^2 n^2}, \qquad \forall n = 1,2,3,\ldots. \end{aligned}$$

La position de la corde en fonction de x et du temps t est alors donnée par la fonction suivante :

$$u(t,x) = \frac{l^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{n\pi c}{l}t\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Exercise 2 *Considérons l'équation de la poutre :*

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0, & x\epsilon\,[0,l]\quad t\geq 0, \\ u\,(0,x)=f(x)\ \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0)=0 & \forall x\epsilon\,[0,l]\,. \end{array}\right. \tag{5}$$

1. poutre simplement supporté aux deux extrémités.

Nous allons maintenant déterminer des solutions de (5) de la forme $u(x;t)=X(x)T(t)$. En substituant dans

l'EDP, nous obtenons

$$XT^{(2)}+c^2X^{(4)}T=0,$$

où $X^{(4)}$ est la dérivée quatrième de X par rapport à x et $T^{(2)}$ est la dérivée seconde de T par rapport à t. En divisant les deux cotés de cette equation par c^2XT, on obtient

$$\frac{X^{(4)}}{X}=-\frac{1}{c^2}\frac{T^{(2)}}{T}.$$

Le terme de droite de cette derniére equation est une fonction de t et le terme de gauche est une fonction de

x. Pour que l'égalité soit possible, il faut que chacun de ces termes soit constant. Nous obtenons

$$\frac{X^{(4)}}{X}+-\frac{1}{c^2}\frac{T^{(2)}}{T}=\lambda,\quad \text{où } \lambda \text{ est une constante.}$$

Nous avons donc le système de deux équations différentielles ordinaires suivant:

$$\frac{d^4X}{dx^4}-\lambda X=0 \tag{6}$$

et

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\lambda c^2T=0. \tag{7}$$

Nous cherchons des solutions non triviales, nous avons aussi les conditions suivantes:

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial u}{\partial t}\,(x,0)=0 & \text{pour tout}\quad x\epsilon\,[0.l] & \Longrightarrow X\,(x)\,T'\,(0)=0 & \Longrightarrow T'\,(0)=0, \\ u\,(0,t)=0 & \text{pour tout}\quad t\geq 0 & \Longrightarrow X\,(0)\,T\,(t)=0 & \Longrightarrow X\,(0)=0, \\ u\,(l,t)=0 & \text{pour tout}\quad t\geq 0 & \Longrightarrow X\,(l)\,T\,(t)=0 & \Longrightarrow X\,(l)=0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(0,t)=0 & \text{pour tout}\quad t\geq 0 & \Longrightarrow X''\,(0)\,T\,(t)=0 & \Longrightarrow X''\,(0)=0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(l,t)=0 & \text{pour tout}\quad t\geq 0 & \Longrightarrow X''\,(l)\,T\,(t)=0 & \Longrightarrow X''\,(l)=0. \end{array} \tag{8}$$

L'équation caractristique de l'équation différentielle (6) est :

$$r^4-\lambda=0. \tag{9}$$

Il nous faut donc considérer les trois cas possibles pour λ.

Cas 1 : Si $\lambda < 0$, disons que $\lambda = -\alpha^4$ avec $\alpha > 0$.

On pose $r = |r|e^{i\theta}$ et $\lambda = \alpha^4 e^{-i\pi}$, l'équation (9) sera équivalente à

$$|r|^4 e^{i4\theta} = \alpha^4 e^{-i\pi}.$$

On aura donc $|r| = \alpha$ et $\theta = \frac{-\pi+2k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{N}$. Les racines sont donc

$$r_{k+1} = \alpha e^{\frac{-\pi+2k\pi}{4}}, k = 0, 1, 2, 3,$$

après calcul on obtient

$$r_1 = \alpha e^{\frac{-\pi}{4}} = \alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad r_2 = \alpha e^{\frac{\pi}{4}} = \alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$r_3 = \alpha e^{\frac{3\pi}{4}} = \alpha\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{et} \quad r_4 = \alpha e^{\frac{5\pi}{4}} = \alpha\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Alors, la solution générale de l'équation différentielle $X^{(4)} - \alpha^4 X = 0$ est

$$X(x) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha x\right)\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha x}\left(C\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha x\right) + D\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha x\right)\right).$$

Si nous tenons compte des conditions $X(0) = 0$, $X(l) = 0$, $X''(0) = 0$ et $X''(l) = 0$, alors nous obtenons le

système d'équations linéaires suivant:

$$M\begin{pmatrix} A \\ B \\ B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où

système d'équations linéaires suivant :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ e^{\alpha l/\sqrt{2}}\cos\left(l\alpha/\sqrt{2}\right) & e^{\alpha l/\sqrt{2}}\sin\left(l\alpha/\sqrt{2}\right) & e^{-\alpha l/\sqrt{2}}\cos\left(l\alpha/\sqrt{2}\right) & e^{-\alpha l/\sqrt{2}}\sin\left(l\alpha/\sqrt{2}\right) \\ 0 & \alpha^2 & 0 & -\alpha^2 \\ -\alpha^2 e^{\alpha l/\sqrt{2}}\cos\left(l\alpha/\sqrt{2}\right) & \alpha^2 e^{\alpha l/\sqrt{2}}\sin\left(l\alpha/\sqrt{2}\right) & \alpha^2 e^{-\alpha l/\sqrt{2}}\cos\left(l\alpha/\sqrt{2}\right) & -\alpha^2 e^{-\alpha l/\sqrt{2}}\sin\left(l\alpha/\sqrt{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice M est $2\alpha^4\left(\cosh(\alpha l/\sqrt{2}) - \cos\left(\alpha l/\sqrt{2}\right)\right)$. Rappelons que $\cosh(z) \geq 1$ et $\cos(z) \leq 1 \iff$

$z = 0$, parce que $\alpha > 0$ et $l > 0$, nous obtenons que $\left(\cosh(\alpha l/\sqrt{2}) - \cos\left(\alpha l/\sqrt{2}\right)\right) > 0$ et le déterminant de M est $\neq 0$. Conséquemment le système d'équations linéaires ci-dessus a une seule solution $A = B = C = D = 0$. Nous devons donc exclure ce cas $\lambda < 0$, parce que nous cherchons une solution non-triviale.

Cas 2 Si $\lambda = 0$, alors la solution générale de l'équation différentielle $X^{(4)} = 0$ est $X(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$. Si nous tenons compte des conditions $X(0) = 0$, $X(l) = 0$, $X''(0) = 0$ et $X''(l) = 0$, alors nous obtenons le système d' équations linéaires suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le système d'équations linéaires ci-dessus a une seule solution $A = B = C = D = 0$. Nous devons donc

exclure ce cas $\lambda = 0$, parce que nous cherchons une solution non-triviale.

Cas 3 : $\lambda > 0$. Disons que $\lambda = \alpha^4$ avec $\alpha > 0$. L'équation (9) sera équivalente à

$$|r|^4 e^{i4\theta} = \alpha^4 e^{2\pi i}.$$

Après calcul on obtient

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = i, \qquad r_3 = -1 \quad \text{et} \quad r_4 = -i.$$

Alors, la solution générale de l'équation différentielle $X^{(4)} - \alpha^4 X = 0$ est

$$X(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + C\cosh(x) + D\sinh(x).$$

Si nous tenons compte des conditions $X(0) = 0$, $X(l) = 0$, $X''(0) = 0$ et $X''(l) = 0$, alors nous obtenons le

systéme d'équations linéaires suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\alpha l) & \sin(\alpha l) & \cosh(\alpha l) & \sinh(\alpha l) \\ -\alpha^2 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ -\alpha^2\cos(\alpha l) & -\alpha^2\sin(\alpha l) & \alpha^2\cosh(\alpha l) & \alpha^2\sinh(\alpha l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons donc $A = C = D = 0$ et $\sin(\alpha l)B = 0$. Comme nous voulons une solution non-triviale, nous

pouvons ainsi supposer que $B \neq 0$ et $\sin(\alpha l)B = 0$, nous avons donc que

$$\alpha = \frac{n\pi}{l} \text{ et } \lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 \qquad \forall n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Par conséquent,$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$ sont les valeurs propres et les fonctions propres associées aux valeurs propres λ_n sont :

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Si nous considérons maintenant l'équation $T^{(2)} + \lambda_n c^2 T = 0$, alors la solution générale est

$$T(t) = A^{'} cos\left(\frac{cn^2\pi^2}{l^2}t\right) + B^{'}\sin\left(\frac{cn^2\pi^2}{l^2}t\right)$$

Mais nous avons aussi à considèrer la condition $T'(0) = 0$, alors $B' = 0$.Donc la solution recherchée pour T

est

$$T(t) = A^{'}\cos\left(\frac{cn^2\pi^2}{l^2}\right)$$

Donc une solution du problème (5) et (8) est

$$u_n(t,x) = X_n(x)\,T_n(t) = A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{cn^2\pi^2}{l^2}t\right).$$

Acause de la linéarité de l'EDP, nous obtenons que

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{cn^2\pi^2}{l^2}t\right)$$

est la solution formelle du problème. Si nous revenons maintenant au problème initial, alors nous voulons

que

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x)$$

Donc les A_n sont les coefficients de la s erie de Fourier impaire de $f(x)$, i.e.

$$A_n = \frac{2}{l}\int f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \quad \text{pour tout } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

2. poutre encastrée-simplement supportée

De la méme facon que la poutre simplement supporté aux deux extrémités.

Exercise 3

1/ $a)$ la réponse à cette question est identique à la réponse àl'exercice 1 avec les conditions 1.

$b)$ Noter que la solution est $\frac{2\pi l}{c}$-périodique par rapport à la variable t : $u(t + \frac{2\pi l}{c}, x) = u(t,x)$. la limite d'une fonction périodique à l'infini n'existe pas.

2/ $a)$ Par séparation des variables on arrive à :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Exercise 4 *et*

$$T''(t) + +\alpha T'(t) + \lambda c^2 T(t) = 0. \tag{11}$$

Pour la résolution de l'équation (10) : vous pouvez consulter l'exercice 1. On obtient

Exercise 5 *les valeurs propres du problème aux limites (10) sont* $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ *et les fonctions propres associées aux valeurs propres* λ_n *sont :*

$$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

où A_n *sont des constantes arbitraires.*

Pour la résolution de l'équation (11) : *l'équation caractéristique est*

$$r^2 + \alpha r + \lambda_n c^2 = 0, \text{ de discriminant } \triangle = \alpha^2 - 4\lambda_n c^2. \tag{12}$$

On a $0 < \alpha < \frac{2\pi c}{l} < \frac{2n\pi c}{l} = 2c\sqrt{\lambda_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, *donc* $\triangle < 0$. *Par conséquent, les racines de l'équation* (12) *sont* $r_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{4\frac{n^2\pi^2}{l^2}c^2 - \alpha^2}}{2}$, *la solution générale de l'équation différentielle* (11) *est*

$$T(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(A_n' \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{n^2\pi^2}{l^2}c^2 - \alpha^2 t}\right) + B_n' \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{n^2\pi^2}{l^2}c^2 - \alpha^2 t}\right)\right).$$

En utilisant la condition $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \Longrightarrow T'(0) = 0 \Longrightarrow B_n' = 0$. *Alors la solution du problème s'écrit comme suite :*

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n' A_n}_{=B_n} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{n^2\pi^2}{l^2}c^2 - \alpha^2 t}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

b) limite

$$\lim_{t\to\infty} |u(t, x)| \leq \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sum_{n=1}^{\infty} |B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)| = 0.$$

car la série converge absolument (voir : Guy-Bart STAN, Convergence d'une série de Fourier, 2009).

Le terme d'amortissement est ce qui fait la solution tend vers zéro.

3/ Application :

1/ a) $A_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m, \\ 1 & si \quad n = m. \end{cases}$ $u\left(t,x\right) = \sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{cm^2\pi^2}{l^2}t\right).$

b) *La limite n'existe pas.*

2/ a) $B_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq m, \\ 1 & si \quad n = m. \end{cases}$ $u\left(t,x\right) = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\frac{m^2\pi^2}{l^2}c^2 - \alpha^2}t\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}x\right).$

b) *La limite* $\lim_{t\to\infty} u(t,x) = 0.$