

Exercices corrigés sur les intégrales simples

Exercice1: Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$g(x) = \frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} \quad k(x) = \cos x \sin^2 x \quad l(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$m(x) = 3x\sqrt{1+x^2}$$

Corrigé:

1) On reconnaît que $g(x) = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^{3x} > 0$. Les primitives de g sont donc les fonctions de la forme $G(x) = \frac{1}{3} \ln(1+e^{3x}) + c \quad c \in \mathbb{R}$

2) On reconnaît que $k(x) = \frac{1}{3} \cdot u'(x) \cdot u^2(x)$ avec $u(x) = \sin x$. Les primitives de k sont donc les fonctions de la forme $k(x) = \frac{1}{3} \sin^3 + c \quad c \in \mathbb{R}$

3) En écrivant $l(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$, on reconnaît que $l(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln x$. Les primitives de l sur l'intervalle $]1, +\infty[$, sont donc les fonctions de la forme $l(x) = \ln(\ln x) + c \quad c \in \mathbb{R}$.

4) On reconnaît que $m(x) = \frac{3}{2} \cdot u'(x) \cdot \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 1+x^2$. Les primitives de m sont donc les fonctions de la forme $m(x) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + c \quad c \in \mathbb{R}$

Exercice2: En effectuant un changement de variables, donner une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad g(x) = \cos \sqrt{x}$$

Corrigé

La fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$ intervalle sur lequel on cherche à calculer une primitive. Pour cela, on fait le changement de

variables $u = \ln x$, de sorte que $du = \frac{dx}{x}$ et on trouve

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x} dx &= \int u du \\ &= \frac{1}{2} u^2 + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 x + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. La fonction $g(x) = \cos \sqrt{x}$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$ intervalle sur lequel on cherche à calculer une primitive. Pour cela, on effectue le changement de variables $u = \sqrt{x}$, de sorte que $u^2 = x$ ou encore $2u du = dx$. On trouve alors

$$\begin{aligned} \int \cos \sqrt{x} dx &= 2 \int u \cos(u) du \\ &= 2u \sin u - 2 \int \sin(u) du \\ &= 2u \sin u + 2 \cos u + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(on a aussi effectué une intégration par parties).

Donner une primitive des fonctions suivantes :

Exercice 3: Donner une primitive des fonctions suivantes :

:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$$

$$h(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Corrigé

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{2^2} \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}$$

1. On remarque simplement que . les primitives

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4} \text{ est donc de la forme: } F(x) = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

2. On écrit le dénominateur sous forme

$$\text{canonique, } g(x) = \frac{1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{(x+2)^2+1} \text{ . La méthode précédente donne}$$

$$\int g(x) dx = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} \\ = \arctg(x+2) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Le dénominateur se factorise en $1-x^2 = (1-x)(1+x)$.

On sait donc qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$h(x) = \frac{1}{1-x^2} = \left(\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} \right)$$

En mettant tout au même dénominateur et en procédant par identification, on trouve

$$h(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$$

Une primitive de $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$ est donc $H(x) = \frac{1}{2} \ln|1-x| + \frac{1}{2} \ln|1+x|$