



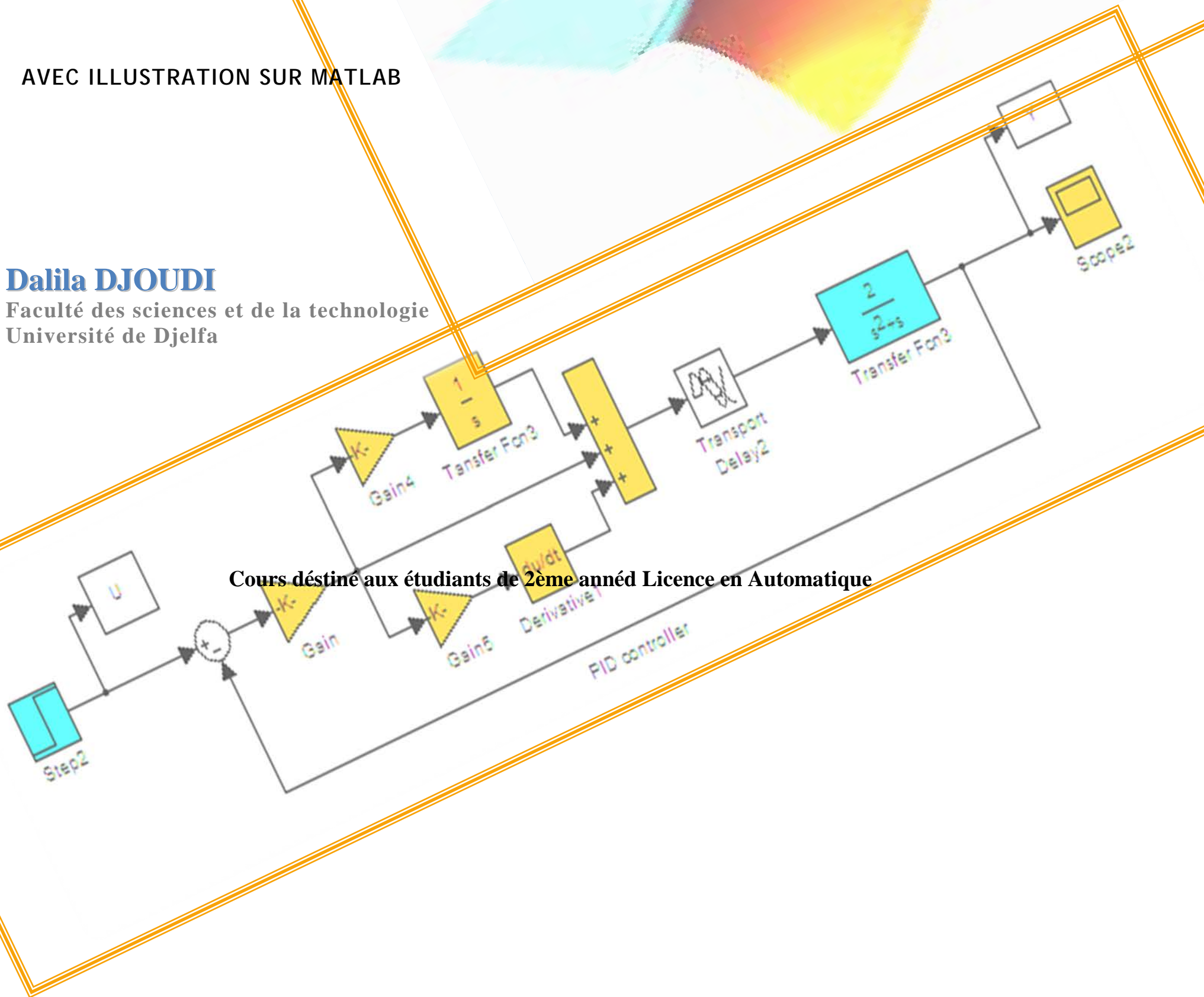
NOTES DE COURS DE ASSERVIS LINEAIRES ET CONTINUS

Partie I : Analyse d'un système asservi Approche Temporelle

AVEC ILLUSTRATION SUR MATLAB

Dalila DJOUDI

Faculté des sciences et de la technologie
Université de Djelfa



Cours destiné aux étudiants de 2ème année Licence en Automatique

NOTES DE COURS DE SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES ET CONTINUS

Dalila DJOUDI

Université de Djelfa
2020/2021

Sommaire

Chapitre.1.	Généralités sur les systèmes asservis	1
1.1	Définition d'un système asservi ou un système de commande :	1
1.2	Classification des systèmes de commande :	1
1.2.1	Les systèmes de commande en boucle ouverte	1
1.2.2	Les systèmes de commande en boucle fermée:	1
1.3	Quelques exemples des système asservis:	1
1.4	Le schéma fonctionnel :	2
1.5	Automatisation d'un processus :	2
1.5.1	Analyse fonctionnelle de l'automatisation d'un processus :	2
1.5.2	Quelques considérations pratiques :	3
Chapitre.2.	Transformée de Laplace	4
2.1	Introduction	4
2.2	La variable complexe s	4
2.3	Fonction d'une variable complexe s	4
2.4	La transformée de Laplace	4
2.4.1	Transformée de Laplace de quelques fonction de base	5
2.5	Propriétés de la Transformée de Laplace :	6
2.5.1	La multiplication par une constante :	6
2.5.2	La linéarité :	6
2.5.3	Le changement d'échelle :	6
2.5.4	Le retard :	6
2.5.5	Le produit de convolution :	6
2.5.6	La dérivation :	7
2.5.7	L'intégration	7
2.5.8	Multiplication par une exponentielle:	7
2.5.9	Théorème de la valeur initiale :	7
2.5.10	Théorème de la valeur finale :	7
2.5.11	Théorème du développement de Heaviside:	7
2.6	Transformée de Laplace inverse :	7
2.6.1	Calcul de la transformée de Laplace inverse par décomposition en fractions simples	7
2.7	Utilisation du logiciel Matlab dans le calcul de la transformée de Laplace et son inverse :	9
2.8	Utilisation de la transformée de Laplace dans la résolution des équations différentielles invariant dans le temps	10
Chapitre.3.	Représentation des systèmes asservis	12
3.1	Modélisation mathématique des systèmes dynamiques...	12
3.1.1	La fonction de transfert :	12
3.1.2	Réponse impulsionnelle	14
3.1.3	L'espace d'état :	14
3.2	Algèbre des schémas fonctionnels:	19
3.2.1	Eléments de base :	19
3.2.2	Association de fonctions de transfert :	20
3.2.3	Schéma fonctionnel d'un système asservi en boucle fermée	21
3.2.4	Réduction des schémas fonctionnels complexes	22
Chapitre.4.	Analyse temporelle du régime transitoire des systèmes de base	26
4.1	Introduction:	26
4.1.1	Les signaux de base de test :	26
4.2	L'intégrateur :	26
4.3	Le dérivateur :	27
4.4	Les Systèmes de premier ordre :	27
4.4.1	La réponse indicielle :	27
4.4.2	La réponse à une rampe :	28
4.4.3	Réponse impulsionnelle :	28

4.5	Les systèmes de deuxième ordre :.....	29
4.5.1	La réponse indicielle :.....	29
4.5.2	Spécifications de la réponse indicielle :.....	31
4.5.3	Identification d'un système de 2ème ordre :	32
Annex	41
Références Bibliographiques	42

Liste des figures

Figure 1. Système en boucle ouverte.....	1
Figure 2 : Système à boucle fermée.....	1
Figure 3. Système de remplissage d'un réservoir pour un humain	2
Figure 4. Système de remplissage d'un réservoir de point de vu automatique.....	2
Figure 5. Description du processus à réguler.....	2
Figure 6. Schéma fonctionnel de chaque élément	3
Figure 7. Processus vu par l'automaticien	3
Figure 8. Schéma bloc de l'ensemble de la boucle d'asservissement.....	3
Figure 9. Représentation d'un point s_1 dans le plan complexe s dit Plan- s	4
Figure 10. Représentation d'une fonction à variable complexe dans le plan complexe Plan- $G(s)$	4
Figure 11. Introduction de retard.....	6
Figure 12. Modèles mathématiques des systèmes dynamiques.....	12
Figure 13. Les pôles sont désignés par des croix et les zéros par des cercles dans le Plan- s	13
Figure 14. Circuit RC	13
Figure 15. Système masse ressort amortisseur	14
Figure 16. De l'équation différentielle à l'espace d'état	14
Figure 17. Fonction de transfert en contre-réaction.....	21
Figure 18. Fonction de transfert équivalente contre-réaction.....	21
Figure 19 bouclage à retour unitaire.....	21
Figure 20. Passage au système à bouclage unitaire	21
Figure 21. Schéma fonctionnel à réduire 1.....	23
Figure 22. Schéma fonctionnel à réduire 2.....	23
Figure 23. Schéma fonctionnel à réduire 3.....	24
Figure 24. Schéma fonctionnel à réduire 4.....	24
Figure 25. Relation entre les signaux de base.....	26
Figure 26 : Exemple d'intégrateur	26
Figure 27. Bloc intégrateur dans Simulink.....	27
Figure 28. Figure 29. Bloc intégrateur dans Simulink.....	27
Figure 30. Identification de la constante de temps T	28
Figure 31. Réponse impulsionnelle d'un 1er ordre	29
Figure 32 : Réponse oscillatoire du système de 2ème ordre pour $\zeta = 0$	30
Figure 33 : Réponse indicielle sous amortie du système de 2ème ordre pour $0 < \zeta < 1$:	31
Figure 34 : Réponse apériodique du système de 2ème ordre pour $\zeta = 1$	31
Figure 35 : Réponse indicielle qui diverge pour $\zeta < 0$:	31
Figure 36. Spécifications de la réponse indicielle d'un système de 2ème ordre.....	32
Figure 37 : Réponse indicielle de 2ème ordre avec spécifications sans avoir de fonction de transfert.....	33
Figure 38. Réponse indicielle pour identifier un système de 2ème Ordre/	33

Liste des tableaux

Tableau 1 : Décomposition en fractions simples via Matlab	9
Tableau 2 : Instruction Matlab pour calculer la Transformée de Laplace	9
Tableau 3 : Instruction Matlab pour calculer la Transformée de Laplace inverse	10
Tableau 4 : Solution d'un système d'équations par Matlab.....	11
Tableau 5 : Instruction de passage entre espace d'état et fonction de transfert et vice versa	18
Tableau 6 : Contrôlabilité sur Matlab.....	19
Tableau 7 : Observabilité sur Matlab	19
Tableau 8 : Exemple de rectangles dans les schémas fonctionnels et leurs rôles.....	20
Tableau 9 : Réduction des schémas fonctionnels complexe	22
Tableau 10 : Les signaux de commande de base.....	26
Tableau 11: Tableau des paires de Transformée de Laplace	35

Preface

Ces notes de cours sont destinées aux étudiants de deuxième année License en Automatique, à la faculté des sciences et de la technologie de l'université de Djelfa. elles contiennent les éléments fondamentaux nécessaires à la compréhension des systèmes asservis linéaires et continus. Ces notes sont le support officiel de mon cours qui est -en plus- soutenu par les notes de cours sous forme de PowerPoint disponibles sur la plateforme d'enseignement à distance de l'université de Djelfa ainsi que sur ma chaîne youtube.

-Plate forme d'enseignement à distance

<http://elearning.univ-djelfa.dz/course/view.php?id=403>

-Ma Chaîne Youtube:

<https://www.youtube.com/channel/UChUbppzJ8nw6dMWXd2Kh04w/videos>

Ce cours est supporté par des illustrations sur le logiciel Matlab afin de faciliter aux étudiants l'accès au monde de simulation des systèmes linéaires continus.

Chapitre.1. Généralités sur les systèmes asservis

1.1 Définition d'un système asservi ou un système de commande :

Un système asservi ou bien un système de commande est un assemblage de constituants physiques branchés ou reliés les uns aux autres de telle sorte qu'ils puissent se commander, se diriger ou se régler lui-même, ou bien commander, diriger ou régler un autre système.

En anglais c'est "*The control system*" et sa définition est donnée ainsi :

"A control system is an arrangement of physical components connected or related in such a manner as to command, or regulate itself or another system"

Et en arabe c'est " نظام التحكم "

"نظام التحكم هو تجميع وتركيب لمركبات فيزيائية مختلفة مرتبطة فيما بينها بشكل يمكنها من التحكم والتوجيه والتعديل فيما بينها أو التحكم وتوجيه وتعديل نظام آخر"

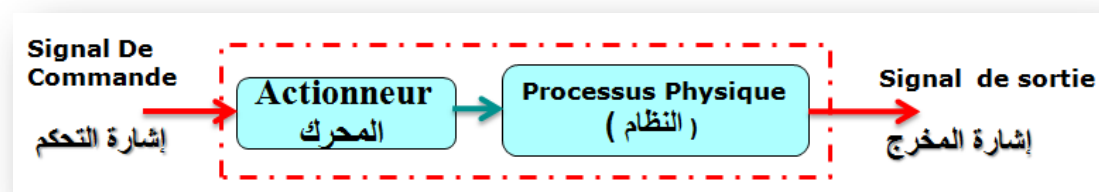
1.2 Classification des systèmes de commande :

Les systèmes de commande sont classifiés selon deux catégories : les systèmes de commande en boucle ouverte et les systèmes de commande en boucle fermée

1.2.1 Les systèmes de commande en boucle ouverte

Le système de commande à boucle ouverte (Open loop system) est un système où le signal de commande est indépendant du signal de sortie. En général tous les systèmes à minuterie.

Figure 1. Système en boucle ouverte



1.2.2 Les systèmes de commande en boucle fermée:

Le système de commande à boucle fermée (Closed loop system) est un système où le signal de commande dépend d'une façon ou d'une autre du signal de sortie et présente une relation systématique qui compare entre le signal de sortie et le signal d'entrée (la consigne).

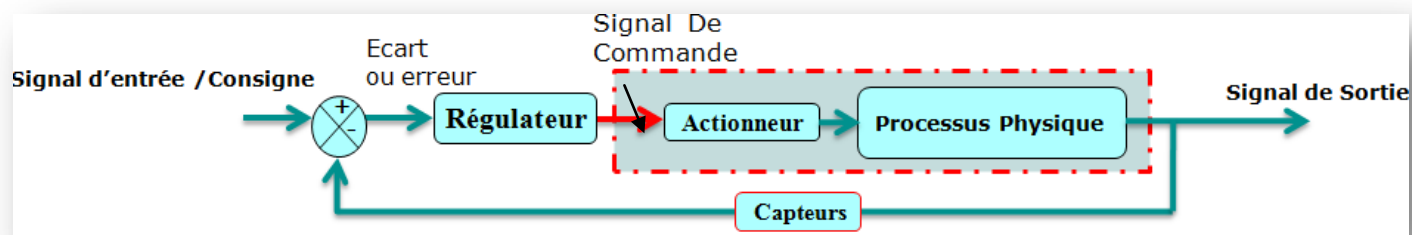


Figure 2 : Système à boucle fermée

1.3 Quelques exemples des système asservis:

Dans notre vie courante, l'humain dans les tâches qu'il effectue à tout moment peut être assimilé à un système de commande, dont le cerveau est le principal contrôleur. Un des exemples connus d'un système de commande est le système de remplissage d'un réservoir d'huile, voir figure. Fig.1. Quand on veut remplir un réservoir on ouvre le robinet et le flux d'huile remplit le réservoir avec le temps et l'humain avec ses yeux il observe le niveau d'huile le cerveau compare donc le niveau d'huile actuel avec le niveau désiré quand le niveau arrive presque au niveau désiré l'humain décide par le cerveau de diminuer le flux jusqu'à fermeture complète, une fois le niveau désiré atteint et ceci via l'action motrice des muscles de la main.

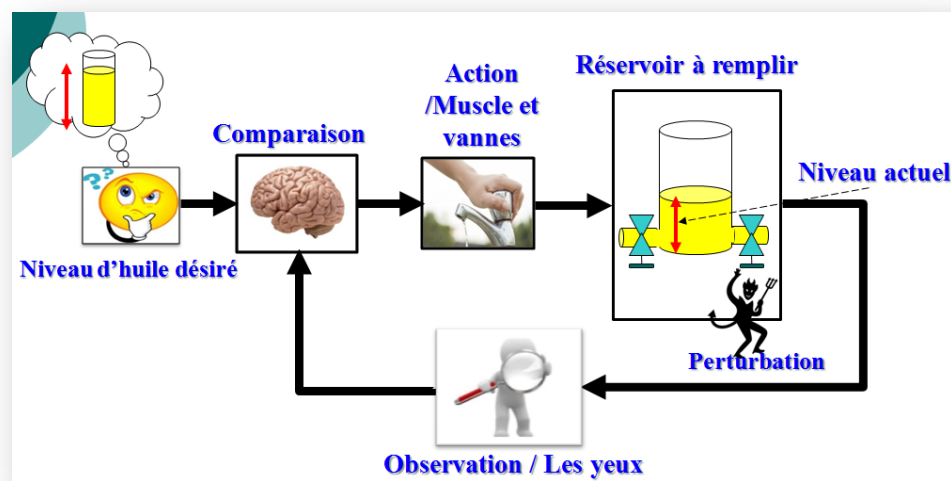


Figure 3. Système de remplissage d'un réservoir pour un humain

Ce remplissage d'un réservoir se présente de point de vue automatique par le schéma de la Figure 1, Le niveau d'huile désiré est représenté par le signal d'entrée qui est la consigne ou la sortie désirée. La perception du niveau d'huile dans le réservoir fait par les yeux chez l'humain est le rôle du capteur. La comparaison entre le niveau désirée et le niveau actuel est effectuée par un comparateur qui calcule l'écart, selon l'écart calculé (ou remarqué dans le cas de l'humain) le régulateur change le signal de commande envoyé au moteur qui actionne le robinet ou la vanne pour réguler le flux selon la valeur de l'écart jusqu'à fermeture lorsque le niveau est atteint.

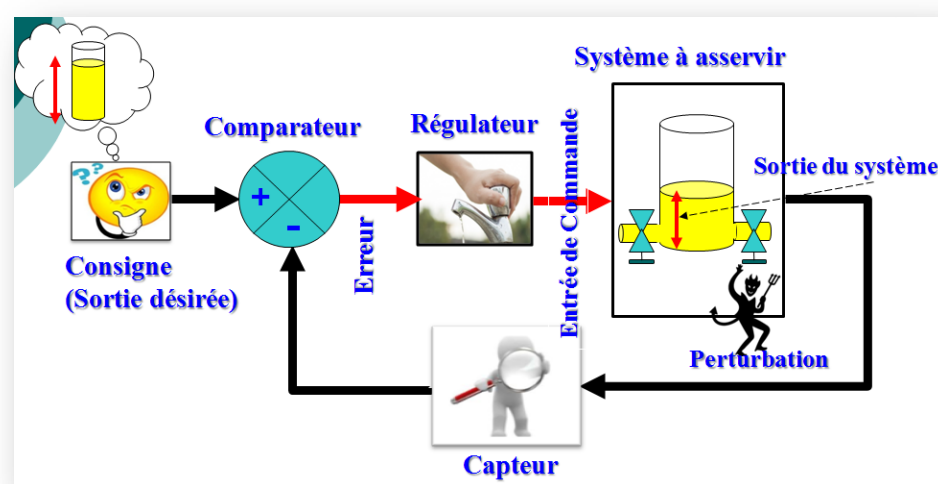


Figure 4. Système de remplissage d'un réservoir de point de vu automatique

1.4 Le schéma fonctionnel :

Le schéma fonctionnel est une représentation graphique qui résume les relations entre les signaux d'entrée et de sortie du processus physique à commander.

1.5 Automatisation d'un processus :

L'automatisation d'un processus consiste à transformer sa conduite manuelle en un système fonctionnant complètement (ou partiellement) indépendamment de tout être humain.:

1.5.1 Analyse fonctionnelle de l'automatisation d'un processus :

L'analyse fonctionnelle de l'automatisation du processus se fait en trois étapes principales:

1) Etape 1:

a. **Décrire le processus à réguler:** cette étape consiste à :

- Donner un nom au processus lui-même
- Définir les grandeurs d'entrée dont la commandes et les perturbations et les grandeurs de sorties .
- Dessiner le schéma fonctionnel du processus physique

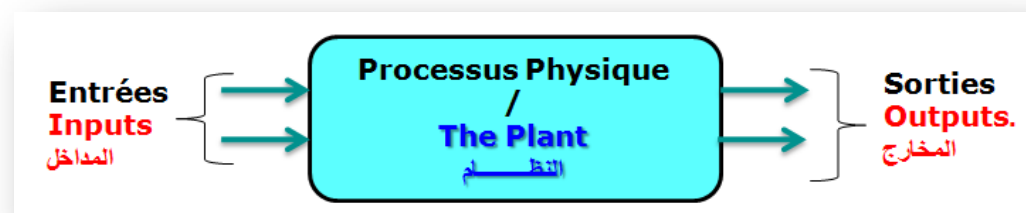


Figure 5. Description du processus à réguler

Remarque: Le système peut avoir une seule entrée et une seule sortie, c'est un système dit **SISO** (Singal Input, Single Output) ou MIMO avec plusieurs entrées et plusieurs sorties (Multi Inputs, Multi Outputs). On s'intéresse dans ce cours aux systèmes **SISO**.

b. **Donner le schéma fonctionnel de chaque élément du système :** dont le transducteur d'entrée : capteurs, actionneurs, comparateurs, régulateurs

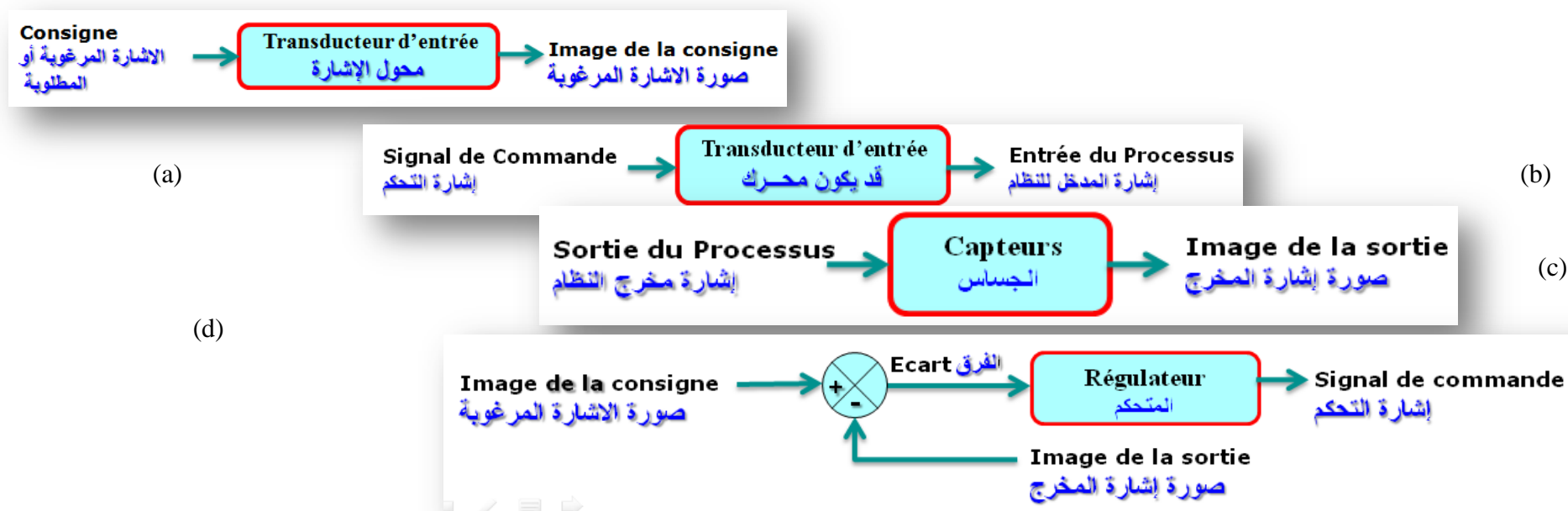


Figure 6. Schéma fonctionnel de chaque élément

2) Etape 2: Description du processus vu par l'automaticien :

C'est la description du processus physique muni de ses capteurs et actionneurs, :

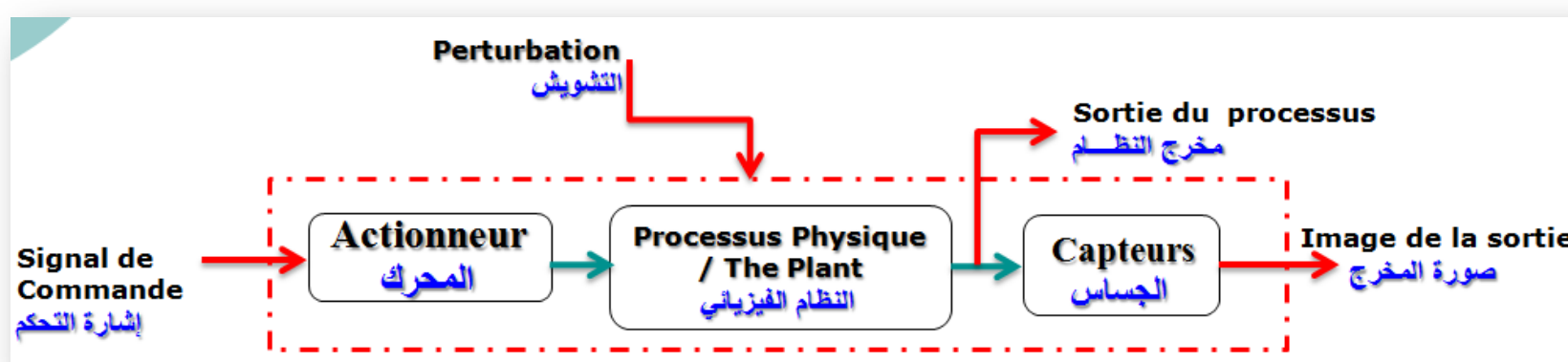


Figure 7. Processus vu par l'automaticien

3) Etape 3: Dessin du schéma bloc représentant l'ensemble de la boucle d'asservissement, comme dans Figure 8.

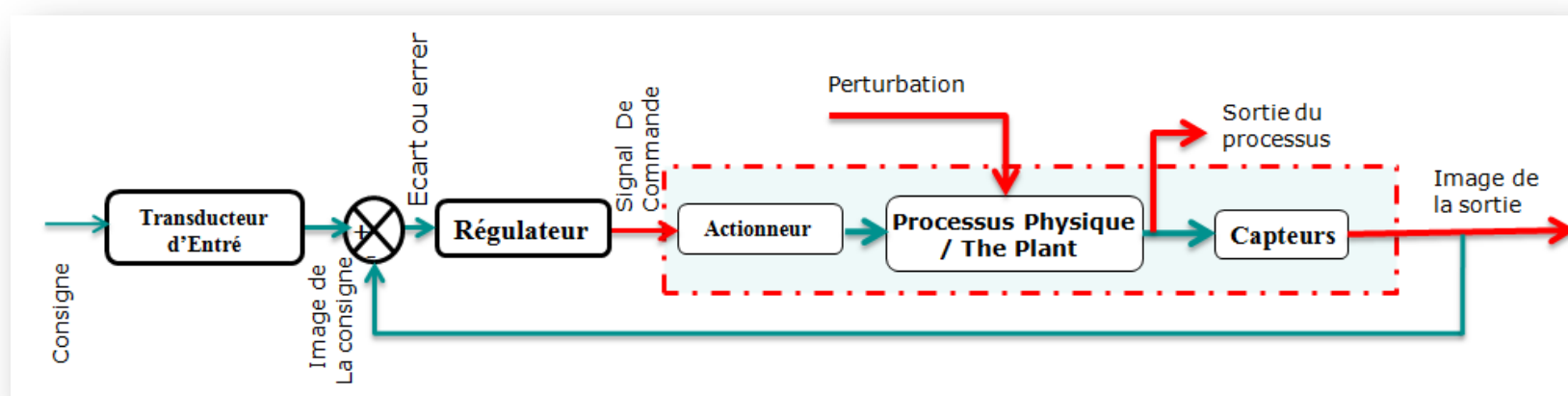


Figure 8. Schéma bloc de l'ensemble de la boucle d'asservissement

1.5.2 Quelques considérations pratiques :

Durant l'automatisation d'un processus quelques considérations doivent être prises en compte :

- Les deux grandeurs comparées doivent être homogènes.
- Le comparateur n'est pas toujours un composant localisé, il figure la comparaison réalisée quelque part.
- Une perturbation est une entrée du système qui agit sur la sortie et elle n'est pas contrôlable par l'opérateur, elle dépend de l'environnement.
- Le signal de commande est à la disposition de l'opérateur pour piloter le processus.
- Le capteur de sortie, a en général une constante de temps très petite devant celle du processus, il est incorporé au processus à piloter il donne l'image de la sortie.
- Si le gain du capteur est k le **Signal de la sortie = Image de la sortie / K**

Après avoir identifier le processus à commander dans le sens où on connaît ses entrées ses sorties ses capteurs et ses transducteurs et aussi les signaux susceptibles de le perturber, l'automaticien a pour rôle de concevoir et d'ajuster le REGULATEUR qui le pilotera conformément à une cahier de charge. Pour ce faire on a besoin d'un modèle qui représente ce système et quelques outils mathématiques nécessaires à cette conception. Le chapitre suivant est dédié à la représentation d'un système asservi dans le but de le commander.

Chapitre.2. Transformée de Laplace

2.1 Introduction

La transformée de Laplace est un outil mathématique primordial dans l'étude des systèmes asservis, il sert à écrire le système en fonction d'une variable complexe ce qui facilite l'analyse du système et la résolution des équations différentielles le représentant plus aisément.

2.2 La variable complexe s

Une variable complexe s a deux parties : une partie réelle σ et une partie imaginaire $j\omega$. Graphiquement et dans le plan complexe s **plan-s**, la partie réelle de s est représentée par l'axe horizontal σ et la partie imaginaire est représentée par l'axe vertical $j\omega$.

Un point arbitraire $s=s_1$ est défini par les coordonnées $\sigma = \sigma_1$ et $\omega = \omega_1$ ou simplement : $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$

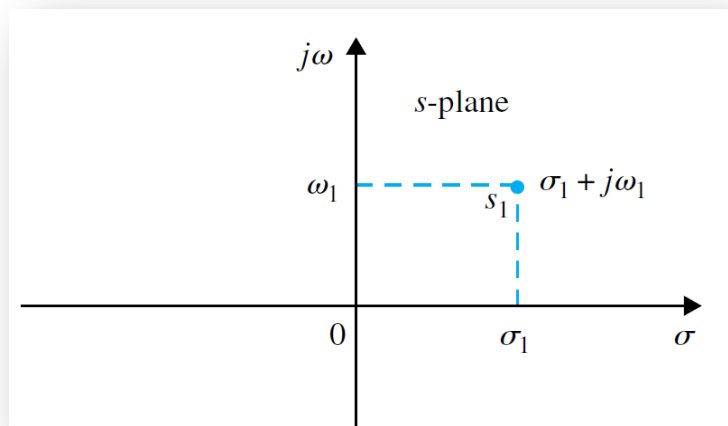


Figure 9. Représentation d'un point s_1 dans le plan complexe s dit Plan- s

2.3 Fonction d'une variable complexe s

Une fonction $G(s)$ est dite une fonction de variables complexes s si pour toute valeur de s il y a au moins une valeur correspondante de $G(s)$. Comme s est définie telle qu'elle ait une partie réelle et une partie imaginaire $G(s)$ l'est aussi et a une partie réelle et une autre imaginaire, voir Figure 10, telle que:

$$G(s) = \text{Re}(G(s)) + j \text{Im}(G(s)) \quad (1.1)$$

avec $\text{Re}(G(s))$ et la partie réelle et $\text{Im}(G(s))$ est la partie imaginaire de la fonction $G(s)$.

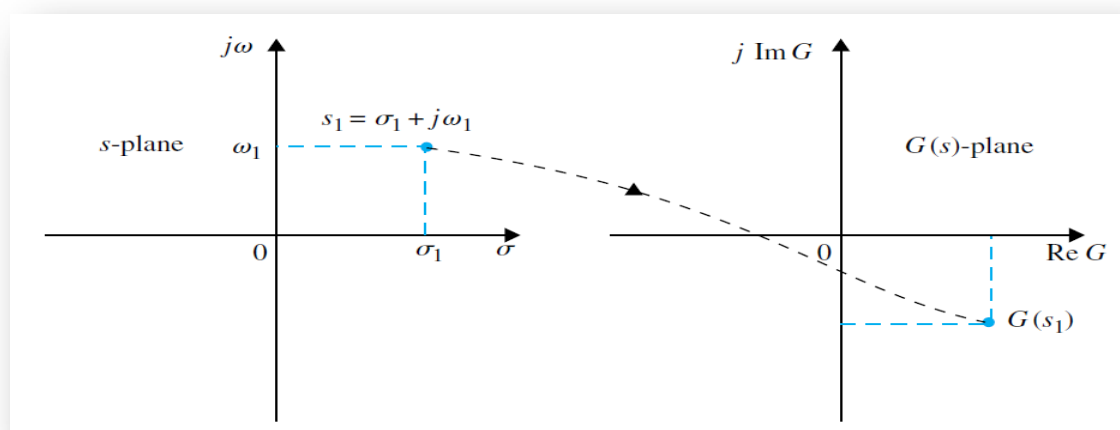


Figure 10. Représentation d'une fonction à variable complexe dans le plan complexe Plan- $G(s)$

2.4 La transformée de Laplace

Soit une fonction $f(t)$ telle que $f(t)=0$ si $t<0$ (*fonction causale*) et soit s une variable complexe telle que : $s = \sigma + j\omega$;

Définition : La transformée de Laplace est l'application \mathfrak{L} qui transforme la fonction temporelle $f(t)$ en une fonction complexe $F(s)$ $F(s) = \mathfrak{L}(f(t))$ via l'intégrale de Laplace :

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.3)$$

La transformée de Laplace existe si l'intégrale dans l'équation (1.3) converge¹.

2.4.1 Transformée de Laplace de quelques fonction de base

2.4.1.1 L'échelon unitaire :

Par définition la fonction échelon unitaire est définie par

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.4)$$

La transformée de Laplace de $u(t)$ est $U(s) = \mathfrak{L}(u(t))$ tel que :

$$\begin{aligned} U(s) = \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt &\Rightarrow U(s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt \Rightarrow U(s) = \left[\frac{-e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} \Rightarrow U(s) = \frac{-1}{s} [e^{-\infty} - e^0] \\ &\Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (1.5)$$

2.4.1.2 La rampe

La fonction rampe est définie telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ At & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\Rightarrow F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \Rightarrow F(s) = \int_0^{\infty} Ate^{-st} dt$$

$$\Rightarrow F(s) = A \int_0^{\infty} te^{-st} dt \quad (1.7)$$

L'intégrale (1.7) se calcule en utilisant l'intégration par partie,

Rappel :

Soient deux fonctions u et v , on a : $(u \cdot v)' = u'v + uv' \Rightarrow uv' = (u \cdot v)' - u'v$

$$\Rightarrow \int uv' = u \cdot v - \int u'v \quad (1.8)$$

En appliquant la règle (1.8), on pose : $\begin{cases} u = At \\ v' = e^{-st} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = A \\ v = \frac{-1}{s} e^{-st} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Donc l'équation (1.7)} &\Rightarrow A \int_0^{\infty} te^{-st} dt = A \left[\frac{-t}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} - A \int_0^{\infty} \frac{-1}{s} e^{-st} dt \Rightarrow F(s) = -\frac{-1}{s} \left[\frac{-A}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = -\frac{A}{s^2} [e^{-\infty} - e^0] \Rightarrow \\ &F(s) = \frac{A}{s^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

2.4.1.3 Fonction exponentielle :

La fonction exponentielle est définie telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \cdot e^{-at} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.10)$$

Donc sa transformée de Laplace est telle que :

$$\begin{aligned} F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt &\Rightarrow F(s) = \int_0^{\infty} A e^{-at} \cdot e^{-st} dt \Rightarrow F(s) = A \int_0^{\infty} e^{-(a+s)t} dt \Rightarrow F(s) = A \left[\frac{-e^{-(a+s)t}}{s+a} \right]_0^{\infty} \Rightarrow F(s) = \frac{-A}{(s+a)} [e^{-\infty} - e^0] \\ &\Rightarrow F(s) = \frac{A}{(s+a)} \end{aligned} \quad (1.11)$$

2.4.1.4 La Sinusoïde :

La fonction sinusoïde est définie telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \sin(\omega t) & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow F(s) = \int_0^{\infty} A \sin(\omega t) e^{-st} dt \quad (1.13)$$

Pour calculer l'intégrale (1.13), il faut réécrire la sinusoïde de la façon suivante :

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j} [e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}] \quad (1.14)$$

A partir des équations (1.13) et (1.14), la transformée de Laplace de la fonction sinusoïde est:

¹ L'étude de la convergence de l'intégrale sort du contexte de ce cours.

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{\infty} \frac{A}{2j} [e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}] e^{-st} dt = \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t} dt - \frac{A}{2j} \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t} dt \\
\Rightarrow F(s) &= \frac{-A}{2j(s-j\omega)} \left[e^{-(s-j\omega)t} \right]_0^{\infty} - \frac{-A}{2j(s+j\omega)} \left[e^{-(s+j\omega)t} \right]_0^{\infty} \\
\Rightarrow F(s) &= \frac{-A}{2j(s-j\omega)} [e^{-\infty} - e^0] - \frac{-A}{2j(s+j\omega)} [e^{-\infty} - e^0] = \frac{A}{2j(s-j\omega)} - \frac{A}{2j(s+j\omega)} \\
\Rightarrow F(s) &= \frac{2A(j(s+j\omega) - j(s-j\omega))}{4j^2(s^2 - (j\omega)^2)} = \frac{-2A(2\omega)}{-4(s^2 + \omega^2)} \\
\Rightarrow F(s) &= \frac{A\omega}{(s^2 + \omega^2)} \quad (1.15)
\end{aligned}$$

De la même façon on peut calculer les transformées de Laplace de la fonction cosinus et toutes autres fonctions en utilisant simplement la règle (1.3) et les outils mathématiques utilisés dans les calculs des intégrales en général. Des transformées de Laplace de certaines fonctions temporelles connues sont données dans [Tableau 11](#).

2.5 Propriétés de la Transformée de Laplace :

La transformée de Laplace a quelques propriétés importantes qui servent à faciliter le calcul et l'utilisation des fonctions exprimées dans le domaine complexe.

Soient les fonctions $F(s)$ transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ et la fonction $G(s)$ la transformée de Laplace de la fonction $g(t)$, les propriétés suivantes s'appliquent:

2.5.1 La multiplication par une constante :

$$\mathfrak{L}[A \cdot f(t)] = A \cdot \mathfrak{L}[f(t)] = A \cdot F(s) \quad (1.16)$$

2.5.2 La linéarité :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[f_1(t) + f_2(t)] &= \mathfrak{L}[f_1(t)] + \mathfrak{L}[f_2(t)] \\
\Rightarrow \mathfrak{L}[f_1(t) + f_2(t)] &= F_1(s) + F_2(s) \quad (1.17)
\end{aligned}$$

2.5.3 Le changement d'échelle :

$$\mathfrak{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha F(\alpha s) \quad (1.18)$$

Exemple 1: soit $f(t) = e^{-t}$ sa transformée de Laplace est $F(s) = \frac{1}{s+1}$, voir [Tableau 11](#) ou [équation \(1.11\)](#).

La transformée de Laplace de $f\left(\frac{t}{5}\right) = e^{-\frac{t}{5}}$ selon la propriété (1.18) est $5F(5s)$, alors $\mathfrak{L}\left[f\left(\frac{t}{5}\right)\right] = \frac{5}{5s+1}$.

2.5.4 Le retard :

Si on a une fonction $f(t)$ subit un retard τ , elle devient $f(t - \tau)$, voir la [Figure 11](#).

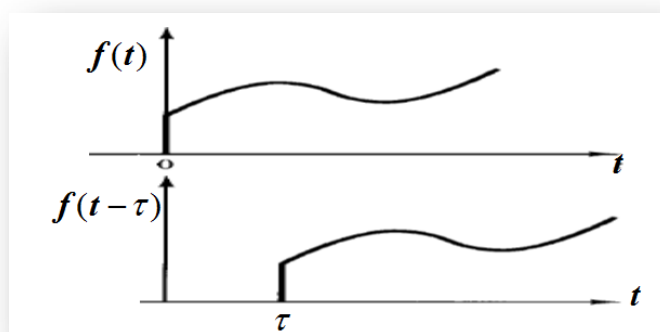


Figure 11. Introduction de retard

La transformée de Laplace de $f(t - \tau)$ est donnée par :

$$\mathfrak{L}[f(t - \tau)] = e^{-\tau s} F(s) \quad (1.19)$$

2.5.5 Le produit de convolution :

La transformée de Laplace d'un produit de convolution de deux fonctions temporelles est le produit ordinaire des transformées de Laplace de ces deux fonctions :

$$\mathfrak{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) F_2(s) \quad (1.20)$$

Avec :

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (1.21)$$

2.5.6 La dérivation :

La transformée de Laplace de la fonction dérivée $\frac{\partial f(t)}{\partial t}$ est donnée par

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right] = sF(s) - f(0) \quad (1.22)$$

avec $f(0)$ est la valeur initiale de $f(t)$. Si la valeur initiale à gauche est différente de la valeur initiale à droite $f(0+) \neq f(0-)$, on a donc:

$$\mathfrak{L}_+\left[\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right] = sF(s) - f(0+)$$

$$\mathfrak{L}_-\left[\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right] = sF(s) - f(0-)$$

Pour une dérivation de deuxième ordre :

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (1.23)$$

Et pour le $n^{\text{ème}}$ ordre on a :

$$\mathfrak{L}\left[\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0) - \dots - s^{(n-2)} f^{(n-2)}(0) - s^{(n-1)} f^{(n-1)}(0) \quad (1.24)$$

2.5.7 L'intégration

La transformée de Laplace de l'intégrale d'une fonction $f(t)$ est donnée par :

$$\mathfrak{L}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} - \frac{f^{-1}(0)}{s} \quad (1.25)$$

avec $f^{-1}(0) = \int f(t) dt$ pour $t=0$, est la valeur initiale de la fonction primitive de $f(t)$. De même que pour la dérivation si $f^{-1}(0+) \neq f^{-1}(0-)$ on remplace dans (1.25) par la valeur convenable.

2.5.8 Multiplication par une exponentielle:

$$\mathfrak{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) e^{-st} dt \Rightarrow \mathfrak{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(a+s)t} dt$$

Donc par définition (1.3):

$$\mathfrak{L}\left[e^{-at} f(t)\right] = F(s+a) \quad (1.26)$$

Exemple 2: On a si:

$$f(t) = \sin(wt) \Rightarrow F(s) = \frac{w}{s^2 + w^2} \text{ donc } \mathfrak{L}\left[e^{-at} \sin(wt)\right] = F(s+a) = \frac{w}{(s+a)^2 + w^2}$$

2.5.9 Théorème de la valeur initiale :

La valeur la valeur initiale $f(0)$ de $f(t)$ peut être calculée en utilisant la transformée de Laplace $F(s)$ de la façon suivante :

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (1.27)$$

2.5.10 Théorème de la valeur finale :

La valeur finale d'une fonction $f(t)$ peut être calculée par $F(s)$ sans avoir l'expression de $f(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (1.28)$$

2.5.11 Théorème du développement de Heaviside:

$$\mathfrak{L}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{at}\right) = \frac{1}{(s-a)^k} \quad (1.29)$$

2.6 Transformée de Laplace inverse :

L'application inverse qui permet de trouver la fonction temporelle $f(t)$ à partir d'une fonction complexe $F(s)$ est la transformée de Laplace inverse notée \mathfrak{L}^{-1} :

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \quad (1.30)$$

La transformation se fait via l'intégrale inverse :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (1.31)$$

En général l'intégrale (1.31) est évitée dans le calcul de la transformée inverse pour éviter les complications du calcul mathématique. La transformée de Laplace inverse est souvent calculée en utilisant quelques astuces basées sur les transformées de Laplace des fonctions usuelles.

2.6.1 Calcul de la transformée de Laplace inverse par décomposition en fractions simples

La fonction F(s) transformée de Laplace de f(t) dans les systèmes de commande se trouve souvent sous la forme suivante :

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (1.32)$$

Avec B(s) et A(s) sont des polynômes en s. Le Degré du polynôme A(s) doit être supérieur au degré du polynôme B(s). Si on peut décomposer F(s) à une somme de fonctions plus simples F_i(s), on obtient:

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + \dots + F_n(s) \quad (1.33)$$

La transformée de Laplace inverse est simplement :

$$\mathfrak{S}^{-1}[F(s)] = \mathfrak{S}^{-1}[F_1(s)] + \mathfrak{S}^{-1}[F_2(s)] + \mathfrak{S}^{-1}[F_3(s)] + \dots + \mathfrak{S}^{-1}[F_n(s)] \quad (1.34)$$

$$\mathfrak{S}^{-1}[F(s)] = f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots + f_n(t) \quad (1.35)$$

2.6.1.1 Cas de F(s) ayant des pôles distincts:

Si F(s) est une fonction qui a des pôles distincts on peut l'écrire sous la forme suivante :

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k(s+z_1)(s+z_2)(s+z_3)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)\dots(s+p_n)} \quad (1.36)$$

Où z₁...z_m et p₁...p_n sont des racines réelles ou complexes, avec n>m. dans ce cas on peut trouver la décomposition en somme de fractions simples de la fonction (1.36), de telle sorte qu'on ait :

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \frac{a_3}{s+p_3} + \dots + \frac{a_n}{s+p_n} \quad (1.37)$$

Avec a_k est le résidu (constant) qui se calcule en multipliant les deux membres de F(s) par (s+p_k) puis mettre s=-p_k.

Donc :

$$a_k = \left[(s+p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k} \quad (1.38)$$

Si ils se trouvent deux racines p₁ et p₂ conjuguées, les résidus correspondants a₁ et a₂ le sont aussi, il suffit de calculer un seul a. Une fois tous les résidus a_k calculés, il est facile de trouver la TL inverse de F(s) dans l'équation (1.37):

$$f(t) = \mathfrak{S}^{-1}[F(s)] = \mathfrak{S}^{-1}\left[\frac{a_1}{s+p_1}\right] + \mathfrak{S}^{-1}\left[\frac{a_3}{s+p_3}\right] + \mathfrak{S}^{-1}\left[\frac{a_3}{s+p_3}\right] + \dots + \mathfrak{S}^{-1}\left[\frac{a_n}{s+p_n}\right] \quad (1.39)$$

$$\Rightarrow f(t) = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + a_3 e^{-p_3 t} + \dots + a_n e^{-p_n t} \quad (1.40)$$

Exemple 3:

$$\text{Soit: } F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+4)(s+5)} \quad (1.41)$$

Calcul de la transformée de Laplace inverse de F(s): F(s) a des pôles distincts on peut l'écrire donc sous forme:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+4} + \frac{a_3}{s+5} \quad (1.42)$$

On cherche donc les résidus a₁, a₂, a₃ en appliquant la règle (1.38) on trouve:

$$a_1 = \left[(s+1)F(s) \right]_{s=-1} = \left[(s+1) \frac{s+3}{(s+1)(s+4)(s+5)} \right]_{s=-1} = \left[\frac{s+3}{(s+4)(s+5)} \right]_{s=-1} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{6}$$

$$a_2 = \left[(s+4)F(s) \right]_{s=-4} = \left[(s+4) \frac{s+3}{(s+1)(s+4)(s+5)} \right]_{s=-4} = \left[\frac{s+3}{(s+1)(s+5)} \right]_{s=-4} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \left[(s+5)F(s) \right]_{s=-5} = \left[(s+5) \frac{s+3}{(s+1)(s+4)(s+5)} \right]_{s=-5} = \left[\frac{s+3}{(s+1)(s+4)} \right]_{s=-5} \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{2}$$

Alors l'équation (1.42) devient :

$$F(s) = \frac{1}{6} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s+4} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+5} \quad (1.43)$$

$$f(t) = \mathfrak{S}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{6} \mathfrak{S}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{1}{3} \mathfrak{S}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] + \frac{1}{2} \mathfrak{S}^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right] \quad (1.44)$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{6} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{-4t} + \frac{1}{2} e^{-5t} \quad (1.45)$$

2.6.1.2 Cas de F(s) ayant des pôles multiples:

Soit F(s) une fonction ayant des pôles multiples, on veut calculer sa transformée de Laplace inverse : $F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)^3}$ (1.46)

$$\Rightarrow F(s) = \frac{a}{(s+1)} + \frac{b}{(s+1)^2} + \frac{c}{(s+1)^3} \quad (1.47)$$

1) Multiplions les membres de F(s) par $(s+1)^3$ et mette s=-1 :

$$\Rightarrow [s^2 + 2s + 3] = [a(s+1)^2 + b(s+1) + c]_{s=-1} \Rightarrow c = 2$$

2) Dérivons les deux membres de (1.46) et (1.47) deux fois par rapport à s, on obtient donc et remplaçons s=-1:

$$\text{La première dérivation donne : } [2s + 2]_{s=-1} = [2a(s+1) + b]_{s=-1} \Rightarrow b = 0$$

$$\text{La deuxième dérivation/s : } [2] = [2a] \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Donc: } F(s) = \frac{1}{(s+1)} + \frac{0}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)^3} \quad (1.48)$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)}\right) + \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^3}\right) = (1+t^2)e^{-t}$$

$$\Rightarrow f(t) = (1+t^2)e^{-t} \quad (1.49)$$

Si F(s) a un dénominateur d'ordre très élevé on utilise le logiciel Matlab, un exemple est donné dans la suite, voir **Exemple 4**.

2.6.1.3 Utilisation de Matlab dans la simplification des fonctions en fractions simples

Soit F(s)=B(s)/A(s) telle que:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + b_2s^{n-2} + \dots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \dots + a_n} \quad (1.50)$$

On définit les deux vecteurs num et den pour déclarer à Matlab le numérateur B(s) et le dénominateur A(s) de la fonction F(s):

```
num=[b0 b1 b2 .....bn]
den=[1 a0 a1 a2 .....an]
L'instruction residue s'utilise comme suit
[r,p,k]=residue(num,den)
```

Elle retourne les vecteurs r, p et k telle que :

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s-p(1)} + \frac{r(2)}{s-p(2)} + \dots + \frac{r(n)}{s-p(n)} + k(s) \quad (1.51)$$

Exemple 4: On peut tester l'instruction sur la fonction (1.46) qui peut s'écrire $F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$, donc sur Matlab on écrit : voir **Tableau 1**:

Instructions Matlab	Résultat d'exécution		
<code>%Décomposition en fractions simples num=[1 2 3] den=[1 3 3 1] [r,p,k]=residue(num,den)</code>	<code>r = 1 0 2</code>	<code>p = -1 -1 -1</code>	<code>k = [] >></code>

Tableau 1. Décomposition en fractions simples via Matlab

En remplaçant le résultat du tableau ci-dessus dans l'équation (1.51) on tombe exactement sur l'équation (1.48).

2.7 Utilisation du logiciel Matlab dans le calcul de la transformée de Laplace et son inverse :

Il est possible de calculer la transformée de Laplace d'une fonction temporelle sur le logiciel Matlab s'il contient la toolbox symbolique, pour ce faire on utilise l'exemple les fonctions rampe, sinusoïde et exponentielle, un petit programme avec son exécution est donné dans le Tableau 2.

Instructions Matlab	Résultat d'exécution
<code>disp('-----') disp('Calcul de la transformée de Laplace') disp('-----') syms t a w real % Ramp function f1=t; F1=laplace(f1) %Exponential function f2=exp(-a*t); F2=laplace(f2) %Sinusoidal function f3=sin(w*t); F3=laplace(f3)</code>	<code>----- Calcul de la transformée de Laplace ----- F1 = 1/s^2 F2 = 1/(a + s) F3 = w/(s^2 + w^2) >></code>

Tableau 2: Instruction Matlab pour calculer la Transformée de Laplace

Pour calculer la transformée de Laplace inverse on utilise l'instruction "ilaplace", voir **Tableau 3**, la fonction de transfert (1.41) de l'**Exemple 3**: est utilisée pour calculer sa transformée inverse, on obtient le même résultat (1.45) obtenu par calcul analytique c'est la fonction f5.

Instructions Matlab	Résultat d'exécution
---------------------	----------------------

<pre> disp('-----') disp('La transformée de Laplace inverse') disp('-----') syms s F5=(s+3)/((s+1)*(s+4)*(s+5)); f5=ilaplace(F5) F6=1/s^2; f6=ilaplace(F6) F7=1/(s^2+1); f7=ilaplace(F7) F8=(s^2+2*s+3)/(s+1)^3 f8=ilaplace(F8) </pre>	<pre> ----- La transformée de Laplace inverse ----- f5 = 1/(6*exp(t)) + 1/(3*exp(4*t)) - 1/(2*exp(5*t)) f6 = t f7 = sin(t) f8 = 1/exp(t) + t^2/exp(t) </pre>
--	--

Tableau 3 : Instruction Matlab pour calculer la Transformée de Laplace inverse

2.8 Utilisation de la transformée de Laplace dans la résolution des équations différentielles invariant dans le temps

La transformée de Laplace peut donner une solution complète à l'équation différentielle Linéaire invariante dans le temps sans passer par les solutions particulières et générales souvent utilisées dans la résolution des équations différentielles:

Deux étapes sont nécessaires :

- 1) Calcul de la transformée de Laplace de chaque terme des deux membres de l'ED pour obtenir une équation algébrique en « s »
- 2) Chercher la transformée de Laplace inverse pour trouver la réponse temporelle.

Exemple 5:

Trouvons $x(t)$ solution de l'équation différentielle (1.52) en utilisant la Transformée de Laplace :

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 0 \quad \text{avec } x(0) = a, \dot{x}(0) = b \quad (1.52)$$

- 1) Premièrement et en utilisant les propriétés de linéarité, section(2.5.2), et de multiplication par une constante, section(2.5.1), la transformée de Laplace de l'équation différentielle (1.52) est :

$$\mathfrak{L}[\ddot{x}] + 3\mathfrak{L}[\dot{x}] + 2\mathfrak{L}[x] = 0 \quad (1.53)$$

$$\mathfrak{L}[x(t)] = X(s) \quad (1.54)$$

En utilisant le théorème de dérivation voir la section (2.5.6) , on a :

$$\mathfrak{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0) \Rightarrow \mathfrak{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - a \quad (1.55)$$

$$\mathfrak{L}[\ddot{x}(t)] = s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) \Rightarrow \mathfrak{L}[\ddot{x}(t)] = s^2X(s) - as - b \quad (1.56)$$

On substitue les équations (1.54)(1.55)(1.56) dans (1.53) on obtient:

$$s^2X(s) - as - b + 3(sX(s) - a) + 2X(s) = 0$$

On fait sortir la valeur de $X(s)$: $(s^2 + 3s + 2)X(s) - as - b - 3a = 0$

$$X(s) = \frac{as + b + 3a}{s^2 + 3s + 2} \quad (1.57)$$

- 2) Une fois $X(s)$ calculée, on cherche $x(t)$ par la transformée de Laplace inverse. L'équation (1.57) a deux pôles distincts -1 et -2 et peut être décomposée en une somme de fraction , voir **section(2.6.1.1)** :

$$\Rightarrow X(s) = \frac{2a+b}{s+1} + \frac{a+b}{s+2} \quad (1.58)$$

Donc de (1.58) on a :

$$x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[X(s)] = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{2a+b}{s+1}\right] + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{a+b}{s+2}\right] \quad (1.59)$$

En se référant au **Tableau 11**, des paires de transformées de Laplace on trouve:

$$x(t) = (2a+b)e^{-t} + (a+b)e^{-2t} \quad (1.60)$$

L'équation (1.60) est la solution de l'équation différentielle équation (1.52)

Exemple 6 :

Résoudre l'équation différentielle suivante : $2\ddot{y} + 3\dot{y} - 2y = te^{-2t}$ avec $y(0) = 0, \dot{y}(0) = -2$ (1.61)

Solution : La transformée de Laplace de l'ED (1.61) est :

$$2(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) + 3(sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (2s^2 + 3s - 2)Y(s) + 4 &= \frac{1}{(s+2)^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1 - 4(s+2)^2}{(2s^2 + 3s - 2)(s+2)^2} \quad \text{avec } 2s^2 + 3s - 2 = (2s-1)(s+2) \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{-4s^2 - 16s - 15}{(2s-1)(s+2)^3} \end{aligned} \quad (1.62)$$

On décompose $Y(s)$ en une somme de fractions simples telle que :

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{A}{2s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{(s+2)^3} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(s) &= \frac{A(s+2)^3 + B(2s-1)(s+2)^2 + C(2s-1)(s+2) + D(2s-1)}{(2s-1)(s+2)^3} \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{(A+2B)s^3 + (6A+7B+2C)s^2 + (12A+4B+3C+2D)s + 8A-4B-2C-D}{(2s-1)(s+2)^3} \end{aligned} \quad (1.64)$$

Par identification entre les équations (1.64) et (1.62) on trouve :

$$\begin{cases} A+2B=0 \\ 6A+7B+2C=-4 \\ 12A+4B+3C+2D=-16 \\ 8A-4B-2C-D=-15 \end{cases} \quad \text{cet ensemble d'équations peut être résolu avec les méthodes usuelles, on a un système régulier de 4 équations}$$

avec quatre variables A,B,C et D. ceci est équivalent à $J \cdot \chi = K \Rightarrow \chi = J^{-1}K$: , avec

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 0 \\ 12 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & -4 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \chi = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -16 \\ -15 \end{bmatrix} \Rightarrow \chi = \begin{bmatrix} -1.536 \\ 0.768 \\ -0.08 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

La solution est telle que **A= -1.536, B= 0.768, C= -0.08, D=-0.2.**

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{-1.536}{2s-1} + \frac{0.768}{s+2} + \frac{-0.08}{(s+2)^2} + \frac{-0.2}{(s+2)^3} \quad (1.65)$$

$$\Rightarrow y(t) = -0.768e^{0.5t} + 0.768e^{-2t} - 0.08te^{-2t} - 0.2t^2e^{-2t} \quad (1.66)$$

$y(t)$ est donc la solution de l'équation différentielle (1.61). Ici on a eu recours au Tableau 11 des paires de Laplace.

Sur Matlab ce même calcul se fait très facilement selon le programme suivant :

Instructions Matlab	Résultat d'exécution
<pre>%Solution du système d'équations %-- J=[1 2 0 0; 6 7 2 0; 12 4 3 2; 8 -4 -2 -1] %-- K=[0;-4;-16;-15] %-- shi=inv(J)*K %-- A=shi(1) B=shi(2) C=shi(3) D=shi(4)</pre>	<pre>shi = -1.5360 0.7680 -0.0800 -0.2000 A = -1.5360 B = 0.7680 C = -0.0800 D = -0.2000</pre>

Tableau 4: Solution d'un système d'équations par Matlab

Chapitre.3. Représentation des systèmes asservis

3.1 Modélisation mathématique des systèmes dynamiques

Un modèle mathématique est l'ensemble des équations mathématiques qui décrivent le comportement d'un système dynamique. Dans ce chapitre on présente les modèles les plus connus et utilisés en automatique notamment les équations différentielles, la fonction de transfert et l'espace d'état, Figure 12. Le modèle doit être choisi selon la particularité du système, la fonction de transfert est plus convenable dans l'étude du régime transitoire ou la réponse fréquentielle d'un système SISO, la représentation dans l'espace d'état quant à elle, elle est plus convenable dans le cas de commande optimale. Tous ces modèles sont liés les uns aux autres et le passage entre eux est faisable.

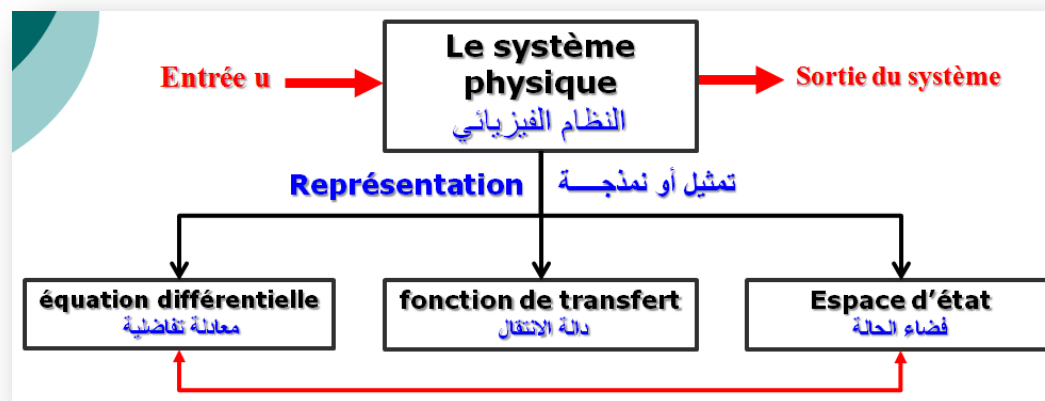


Figure 12. Modèles mathématiques des systèmes dynamiques

3.1.1 La fonction de transfert :

La fonction de transfert d'un système linéaire invariant dans le temps SLIT est une fonction algébrique en 's' la variable complexe, elle représente le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie et la transformée de Laplace de l'entrée d'un système dynamique, telle que toutes les conditions initiales sont nulles.

$$G(s) = \frac{\mathfrak{Z}[\text{Signal de sortie}]}{\mathfrak{Z}[\text{Signal d'entrée}]} \Bigg|_{\text{Conditions initiales nulles}} \quad (2.1)$$

Soit le système LIT décrit par l'ED dans l'équation (2.2) telle que toutes les conditions initiales sont nulles :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + b_2 x^{(m-2)} + \dots + b_{m-1} \dot{x} + b_m x \quad (2.2)$$

Avec $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = b_0, b_1, b_2, \dots, b_{m-1}, b_m$, des constantes, y est le signal de sortie, et x est le signal d'entrée. n: l'ordre du système avec $n \geq m$.

Calculons d'abord la transformée de Laplace de l'ED (2.2)

$$a_0 s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + a_2 s^{n-2} Y(s) + \dots + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s) = b_0 s^m X(s) + b_1 s^{m-1} X(s) + b_2 s^{m-2} X(s) + \dots + b_{m-1} s X(s) + b_m X(s)$$

$$\Rightarrow [a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n] Y(s) = [b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_{m-1} s + b_m] X(s)$$

La fonction de transfert du système est selon l'équation (2.1) :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (2.3)$$

3.1.1.1 Pôles et zéros d'une fonction de transfert:

Les valeurs de s pour lesquelles $G(s)=0$ c'est à dire les racines du numérateur s'appellent **les zéros** de la Fonction de transfert on les désigne par des petits cercles sur le plan-s "O".

Les valeurs pour lesquelles $G(s)=\infty$ c'est à dire les racines du dénominateur s'appellent les pôles de la fonction de transfert (ou du système) on les désigne par des croix "X" dans le Plan-s.

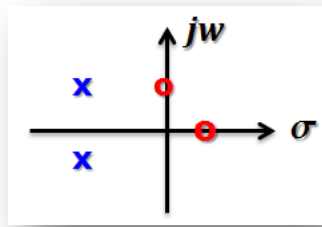


Figure 13. Les pôles sont désignés par des croix et les zéros par des cercles dans le Plan-s

Exemple 7 : Fonction de transfert d'un système électrique :

Soit le circuit RC de la Figure 14 :

1) Trouvons l'équation différentielle liant la tension de sortie v_2 à v_1 (entrée) ainsi que la fonction de transfert du circuit $F(s)$:

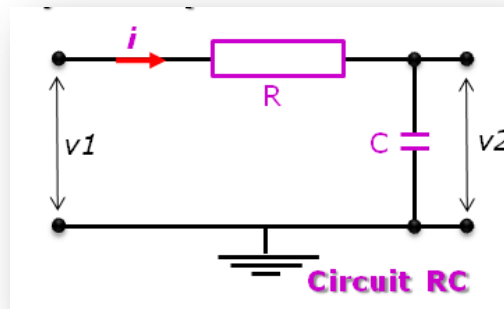


Figure 14. Circuit RC

Solution: on a selon la loi des mailles :

$$v_1 - Ri - v_2 = 0 \text{ et}$$

$$v_2 = \frac{1}{c} \int i dt \Rightarrow i = c \frac{dv_2}{dt}$$

En substituant dans v_1 on obtient :

$$v_1 = Rc \frac{dv_2}{dt} + v_2 \Rightarrow v_2 + Rc \dot{v}_2 = v_1 s \quad (2.4)$$

L'équation (2.4) est une équation différentielle de 1^{er} ordre, on calcule sa transformée de Laplace, on obtient :

$$V_2(s) + Rcs.V_2(s) = V_1(s) \quad (2.5)$$

la fonction de transfert correspondante est donc :

$$F(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{1 + Rcs} \quad (2.6)$$

Si on veut avoir l'expression de la sortie en fonction de l'entrée, c'est résoudre l'équation différentielle, il suffit de calculer la Transformée de Laplace inverse de $V_2(s)$. On a à partir de l'équation (2.6):

$$V_2(s) = F(s)V_1(s) \quad (2.7)$$

$V_1(t)$ représente la valeur de tension du générateur à courant continu. $V_1(t)=12v$ c'est une constante donc sa transformée de Laplace est :

$$V_1(s) = \frac{12}{s} \quad (2.8)$$

Substituons les équations (2.6) et (2.8) dans (2.7) on obtient

$$V_2(s) = \frac{1}{1 + Rcs} \cdot \frac{12}{s} \quad (2.9)$$

$V_2(s)$ peut être décomposée pour avoir :

$$V_2(s) = \frac{12}{s} - 12 \frac{1}{s + 1/Rc} \quad (2.10)$$

La transformée de Laplace inverse de $V_2(s)$ est :

$$V_2(t) = 12(1 - e^{-t/Rc}) \quad (2.11)$$

Exemple 8: Fonction de transfert d'un système mécanique:

Soit le système mécanique masse ressort amortisseur donnée dans la Figure 15.

2) Trouvons l'équation différentielle liant l'oscillation de la masse représentée par la sortie $z(t)$ et la force extérieure appliquée qui représente l'entrée du système, ainsi que la fonction de transfert du système $F(s)$, avec m est la masse k est la raideur du ressort et B est le coefficient d'amortissement:

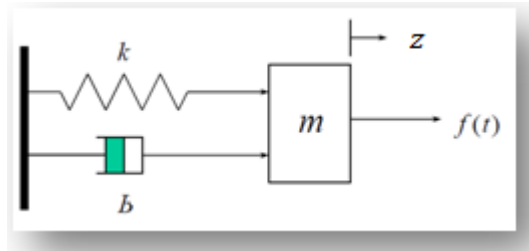


Figure 15. Système masse ressort amortisseur

Solution:

- a. Pour un système mécanique on applique la loi de Newton-Euler qui déclare que la résultante des forces extérieures égale la masse fois l'accélération du corps.

$$\sum f_{exterieure} = m\ddot{z} = f + f_{ressort} + f_{amortisseur} \quad (2.12)$$

$$\text{avec } \begin{cases} f_{ressort} = -kz \\ f_{amortisseur} = -b\dot{z} \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow m\ddot{z} = f - kz - b\dot{z} \quad (2.14)$$

L'équation différentielle régissant le système mécanique Figure 15 est donnée par :

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = f \quad (2.15)$$

- b. La fonction de transfert est par définition la transformée de Laplace de la sortie c-à-d dans notre cas Z(s) sur la transformée de Laplace de l'entrée f(s), on calcule donc la transformée de Laplace de l'ED

$$ms^2Z(s) + bsZ(s) + kZ(s) = f(s) \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow Z(s)(ms^2 + bs + k) = f(s)$$

Donc la fonction de transfert est donc :

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Z(s)}{f(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \quad (2.17)$$

3.1.2 Réponse impulsionnelle

Pour un système linéaire dont la fonction de transfert est G(s), lorsque le signal d'entrée est une impulsion de Dirac, la réponse y(t) de ce système est dite la réponse impulsionnelle et est donnée dans le domaine de Laplace par :

$$Y(s) = G(s).\delta(s) \quad (2.18)$$

avec $\delta(s) = 1$ est la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac, voir **Tableau 11**, on obtient donc :

$$Y(s) = G(s) \quad (2.19)$$

La réponse impulsionnelle g(t) est simplement la TL inverse de la fonction de transfert G(s):

$$g(t) = y(t) = \mathcal{T}^{-1}(G(s)) \quad (2.20)$$

Cette réponse contient toutes les informations sur le système, donc pour étudier le comportement dynamique d'un système linéaire il suffit d'étudier sa réponse impulsionnelle.

3.1.3 L'espace d'état :

L'utilisation de la méthode classique qui est la fonction de transfert dans la modélisation et l'étude des systèmes dynamiques est uniquement applicable dans les cas suivants :

- Les systèmes à entrée et sortie unique "SISO"
- Les systèmes linéaires ou ceux qui peuvent être linéarisés
- Les systèmes invariants dans le temps c-à-d dont les paramètres sont constants.

L'approche d'état est une méthode modélisation des systèmes dynamiques plus généralisée et plus moderne par rapport à la fonction de transfert. elle est plus convenable dans l'étude des systèmes ayant plusieurs entrées et plusieurs sorties (MIMO) ou les systèmes non linéaires qui sont décrits dans le domaine temporel par des équations d'état. Les équations d'état sont un ensemble d'équations différentielles de premier ordre.

L'approche d'état se distingue par rapport à la fonction de transfert par le fait d'introduire un nouveau concept pour la description d'un système dynamique notamment les variables d'état. Les variables d'état donnent une information sur les variables internes d'un système ce que ne donne pas la fonction de transfert, cette information est très utile dans l'étude de la structure et les propriétés du système, elle permet aussi de résoudre de problèmes de commande à haute performance comme la commande optimale, adaptative ou aussi robuste.



Figure 16. De l'équation différentielle à l'espace d'état

Pour un système linéaire invariant dans le temps, le modèle d'état est donné par :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.21)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.22)$$

$$x(0) = x_0 \quad (2.23)$$

Avec $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ est le vecteur de variable d'état de dimension (nx1) avec n est l'ordre du système étudié. A est la matrice d'état de dimension (nxn) elle contient les paramètres du systèmes. B est la matrice d'entrée de dimension (rx1) avec r est le nombre de signaux d'entrée. C est la matrice de sortie de dimension (mxn) avec m est le nombre de signaux de sortie. D est la matrice de contre-réaction de dimension (mxr).

L'équation (2.21) est dite l'équation d'état, l'équation (2.22) est dite l'équation de sortie et l'équation (2.23) représente la condition initiale pour la variable d'état.

Le premier objectif de cette partie est de résoudre l'équation d'état (2.21) en trouvant la valeur de $x(t)$. Cette solution est discutée dans la section(3.1.3.2).

3.1.3.1 Représentation d'état d'un système d'ordre n :

Soit le système dont l'équation différentielle est donnée par

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u(t) \quad (2.24)$$

la connaissance des valeurs initiales $y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ et de la commande $u(t)$ permet de connaître le comportement futur du système. Un choix convenable des variables d'état x peut être² :

$$\mathbf{x} = [y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}] \quad (2.25)$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n] \quad (2.26)$$

On a donc :

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases} \quad (2.27)$$

En dérivant (2.27) par rapport au temps on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} \\ \dot{x}_3 = \ddot{\dot{y}} \\ \vdots \\ \dot{x}_n = y^{(n)} = -a_1 y^{(n-1)} - a_2 y^{(n-2)} - \dots - a_{n-1} \dot{y} - a_n y + u(t) \end{cases} \quad (2.28)$$

avec $y^{(n)}$ dans le système (2.28) est calculée à partir de l'équation différentielle (2.24).

En utilisant la définition des variables d'état dans (2.27) on écrit les système (2.28) uniquement en fonction des variables d'état et leurs dérivées, on trouve donc:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.30)$$

Avec l'équation (2.30), on a donc obtenu la forme de l'équation d'état (2.21) avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & a_n \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Il nous reste maintenant de représenter l'équation de sortie (2.22). On a choisi dans (2.27):

$$x_1 = y \quad (2.32)$$

$$\Rightarrow y = x_1$$

On écrit l'équation (2.32) en fonction du vecteur d'état complet donné dans l'équation (2.26) on obtient l'équation de sortie suivante :

$$y = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}u \quad (2.33)$$

² D'autres choix du vecteur de variables d'état x peuvent être faits, dont les formes canoniques, mais ceci sort du cadre de ce cours et présente juste une introduction à l'espace d'état.

avec : $C = [1 \ 0 \ \dots \ 0], D = 0$

Exemple 9 : Soit le système masse ressort amortisseur de la Figure 15, son entrée est la force f et sa sortie est z . Il est régi par l'équation différentielle (2.15) qui se peut se mettre sous la forme suivante:

$$\ddot{z} + \frac{b}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{1}{m} f(t) \quad (2.34)$$

Exprimer ce système dans l'espace d'état.

Solution : Le système est d'ordre 2, donc le vecteur d'état est $x = [x_1, x_2]$ et on a une seule entrée $u = f$:
Un choix des variables d'état est :

$$\begin{aligned} x_1 &= z \\ x_2 &= \dot{z} \end{aligned} \quad (2.35)$$

donc en dérivant par rapport au temps on trouve :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{z} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{z} \end{aligned} \quad (2.36)$$

A partir de l'équation différentielle (2.34) on a : $\dot{x}_2 = \ddot{z} = -\frac{b}{m} \dot{z} - \frac{k}{m} z + \frac{1}{m} f(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1 + \frac{1}{m} u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] u \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0] x \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, C = [1 \ 0], D = 0 \quad (2.40)$$

3.1.3.2 Solution de l'équation d'état :

Une fois l'espace d'état construit il est nécessaire de le résoudre afin de connaître le comportement de la sortie ou des variables d'état en fonction du temps.

Il s'agit de résoudre une Equation Différentielle du 1^{er} ordre, $\dot{x} = Ax + Bu$ c'est l'équation d'état, équation (2.21), ceci donne l'état $x(t)$ et puis on cherche la sortie $y=Cx$ pour $D=0$ à partir de l'équation de sortie (2.22). Pour une équation différentielle on cherche d'abord une solution homogène pour une entrée nulle $u=0$ et puis on cherche la solution générale.

3.1.3.2.1 Solution homogène $u=0$

La solution homogène est la solution de l'équation différentielle

$$\dot{x} = Ax \quad (2.41)$$

$$\Rightarrow sX(s) - x(t_0) = Ax(s)$$

$$\Rightarrow x(s) = [sI - A]^{-1} x(t_0) \quad (2.42)$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathcal{S}^{-1} \left([sI - A]^{-1} \right) x(t_0) \quad (2.43)$$

$$\Rightarrow x(t) = \varphi(t, t_0) x(t_0) \quad (2.44)$$

On pose :

$$\varphi(t, t_0) = \mathcal{S}^{-1} \left([sI - A]^{-1} \right) \quad (2.45)$$

$\varphi(t, t_0)$, s'appelle la matrice de transition d'état.

Cette transformée de Laplace inverse (2.45) est identique au Théorème du développement de Heaviside, section(2.5.11), applicable aussi dans le cas des matrice. Donc en utilisant l'équation (1.29), on trouve l'expression dans le temps de la matrice de transition d'état :

$$\varphi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \quad (2.46)$$

Donc la solution homogène est

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) \quad (2.47)$$

3.1.3.2.2 Solution globale $u(t) \neq 0$: $\dot{x} = Ax + Bu$ avec $x_0 = x(t_0)$

La transformée de Laplace donne :

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \quad (2.48)$$

$$\Rightarrow X(s) = [sI - A]^{-1} x(t_0) + [sI - A]^{-1} BU(s) \quad (2.49)$$

Donc $x(t)$ est calculée par la transformée de Laplace inverse, elle est donnée par :

$$\mathbf{x}(t) = \mathfrak{S}^{-1} \left([\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \right) \mathbf{x}(t_0) + \mathfrak{S}^{-1} \left([\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}U(s) \right) \quad (2.50)$$

La solution $\mathbf{x}(t)$ comporte la transformée de Laplace inverse (2.43), c'est la solution homogène (2.44). L'équation (2.50) devient :

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \mathfrak{S}^{-1} \left([\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}U(s) \right) \quad (2.51)$$

La deuxième partie de la transformée de Laplace inverse: $\mathfrak{S}^{-1} \left([\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}U(s) \right)$ est une transformée inverse de deux fonctions exprimées dans Laplace $[\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1}$ et $U(s)$ avec \mathbf{B} constante n'affectant pas la transformée. La propriété du produit de convolution s'applique, voir **section 2.5.5**,

On a donc à partir de la propriété **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** :

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \mathfrak{S}^{-1} \left([\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \right) * \mathbf{B} \mathfrak{S}^{-1} (u(s)) \quad (2.52)$$

En utilisant la définition du produit de convolution (1.21), on obtient :

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(t - \tau, t_0) \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (2.53)$$

La réponse $y(t)$ est donc :

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \varphi(t, t_0) \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C} \int_{t_0}^t \varphi(t - \tau, t_0) \mathbf{B}u(\tau) d\tau \quad (2.54)$$

Pour compléter cette solution, il reste le calcul de la matrice de transition (2.46). On peut la calculer par le calcul direct de la transformée de Laplace inverse $\mathfrak{S}^{-1} \left([\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \right)$.

3.1.3.3 Relation entre l'espace d'état et la fonction de transfert:

Soit la fonction de transfert d'un système donné :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.55)$$

La représentation d'état correspondante est donnée dans les équation (2.21), (2.22), la transformée de Laplace de ces équations est donnée par :

$$\mathbf{sX}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (2.56)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s) \quad (2.57)$$

avec $\mathbf{x}_0 = [0, 0, \dots, 0]^T$

A partir de l'équation (2.56), on obtient : $\mathbf{X}(s)[\mathbf{sI} - \mathbf{A}] = \mathbf{B}U(s)$

$$\Rightarrow \mathbf{X}(s) = [\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B}U(s) \quad (2.58)$$

avec \mathbf{I} est la matrice identité de dimension (nxn).

Remplaçons $\mathbf{X}(s)$ par sa valeur dans l'équation de sortie (2.57) on trouve :

$$\mathbf{Y}(s) = U(s) \mathbf{C} [\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}U(s)$$

$$\Rightarrow \mathbf{Y}(s) = \left[\mathbf{C} [\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] U(s)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{Y}(s)}{U(s)} = \left[\mathbf{C} [\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right]$$

on a donc la fonction de transfert $G(s)$ calculée à partir de la forme d'état, et c'est :

$$\Rightarrow G(s) = \mathbf{C} [\mathbf{sI} - \mathbf{A}]^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (2.59)$$

Exemple 10 : Passage de l'espace d'état à la fonction de transfert

Reprenons l'Exemple 9 de masse ressort amortisseur :

On applique la relation (2.59) en prenant en compte les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} données par l'équation (2.60):

$$G(s) = [1 \ 0] \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{bmatrix} + 0 \quad (2.61)$$

$$G(s) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

On calcule la matrice inverse, ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

A partir des équations (2.62) et (2.63) on a :

$$G(s) = [1 \ 0] \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \quad (2.64)$$

La fonction de transfert (2.64) calculée à partir de la forme d'état (2.39) est donc identique à la fonction de transfert (2.17) calculée à partir de l'équation différentielle (2.15) dans l'Exemple 8.

```

%-----
%Sur Matlab on peut utiliser les instructions : tf2ss et ss2tf
%-----
Sin on a une fonction de transfert définie par un numérateur "num" et dénominateur "den", l'instruction suivante
fait le passage à l'espace d'état:
Exemple:
>> num=[1 2 3]
>> den=[1 3 3 1]
%-----
Si on veut voir la forme de la fonction de transfert on tape:
%-----
>>F=tf(num,den)

Transfer function:
      s^2 + 2 s + 3
-----
s^3 + 3 s^2 + 3 s + 1
%-----
Pour passer à la forme d'état:
%-----
>>[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)
A =
    -3    -3    -1
     1     0     0
     0     1     0
B =
     1
     0
     0
C =
     1     2     3
D =
     0
%-----
Et pour passer de l'espace d'état à la fonction de transfert :
%-----
>>[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
num =
    1.0000    2.0000    3.0000
den =
    1.0000    3.0000    3.0000    1.0000
%-----
%Donc on trouve la même fonction de transfert de départ
%-----
>> F=tf(num,den)

Transfer function:
      s^2 + 2 s + 3
-----
s^3 + 3 s^2 + 3 s + 1

```

Tableau 5. Instruction de passage entre espace d'état et fonction de transfert et vice versa

3.1.3.4 Notions de contrôlabilité et d'observabilité dans l'espace d'état

3.1.3.4.1 La contrôlabilité :

Définition : Un système est dit **contrôlable** s'il existe un vecteur de commande $u(t)$ qui transfère le système à partir de tout état initial $x(t_0)$ à un état finale $x(t_f)$ en un temps fini.

Une **condition suffisante** pour qu'un système représenté par la forme d'état, équation (2.21), soit **complètement**³ **contrôlable** est que la matrice de contrôlabilité **M** de dimension (**n**×**n**) soit de rang plein c'est à dire **rang(M)=n**. avec :

$$M = [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B] \quad (2.65)$$

On peut tester la contrôlabilité du système par le calcul du déterminant de M, il doit être différent de zéro :

$$\det(M) \neq 0 \quad (2.66)$$

```

%-----
%Sur Matlab on peut utiliser les instructions : ctrb, rank, et det pour calculer tester la contrôlabilité:

```

³ On dit **complètement** contrôlable et **complètement** observable car il y a d'autres formes de contrôlabilité et d'observabilité réduites qui sortent du cadre de ce cours.


```

%-----
>>M=ctrb(A,B)           %Calcul de la matrice contrôlabilité
>>rang_M=rank(M)       %Calcul du rang
>>determinant_M=det(M) %Calcul du déterminant

```

Tableau 6 : Contrôlabilité sur Matlab

3.1.3.4.2 L'observabilité :

Définition : Un système est dit **observable** si l'état du système $x(t)$ peut être déduite de façon exacte par l'observation de la sortie $y(t)$ et l'entrée $u(t)$ sur un temps fini.

Une **condition suffisante** pour qu'un système représenté par la forme d'état, équations (2.21) et (2.22), soit **complètement observable** est que la matrice d' **observabilité** O de dimension $(n \times n)$ soit de rang plein c'est à dire **rang(O)=n**. avec :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

On peut tester l'observabilité du système par le calcul du déterminant de O , il doit être différent de zéro :

$$\det(O) \neq 0 \quad (2.68)$$

```

%-----
% Sur Matlab on peut utiliser les instructions : obsv, rank, et det pour calculer tester la contrôlabilité:
%-----
>>O=obsv(A,C)           %Calcul de la matrice d'observabilité
>>rang_M=rank(M)       %Calcul du rang
>>determinant_M=det(M) %Calcul du déterminant

```

Tableau 7 Observabilité sur Matlab

Exemple 11: Vérifier si le système suivant est complètement contrôlable et complètement observable.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] u \end{cases} \quad (2.69)$$

Solution:

De l'équation (2.69), on a : $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad -1]$.

1) Test de controlabilité : le système est d'ordre 2, donc la matrice de controlabilité est :

$$M = [B \quad AB] \text{ et } AB = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{donc } M = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

le déterminant de M est $\det(M) = 3$, il est différent de zéro donc le rang de M est plein $\text{rang}(M)=3$ et par conséquent le système est complètement contrôlable.

2) Test d'observabilité : La matrice d'observabilité est telle que :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \text{ et } CA = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = [-5 \quad 5]$$

$$\text{donc } O = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de O est $\det(O) = 0$, il est nul donc le rang de O n'est pas plein $\text{rang}(O)=1$ et par conséquent le système n'est pas complètement Observable.

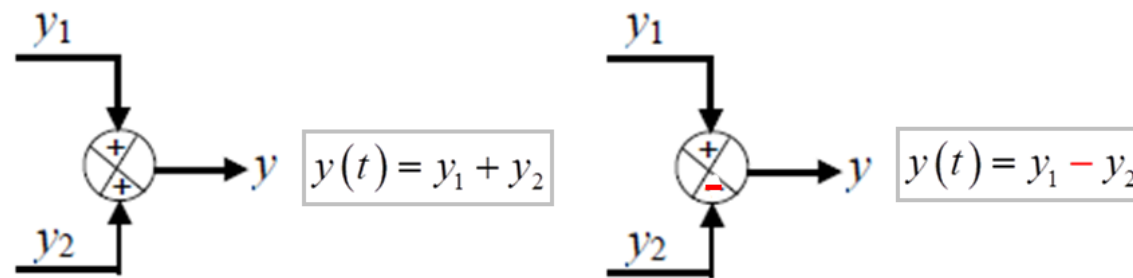
3.2 Algèbre des schémas fonctionnels:

Le schéma fonctionnel consiste à une représentation graphique abrégée d'un système physique. C'est un moyen aisé de caractériser les relations fonctionnelles entre les différents organes d'un système de commande.

3.2.1 Eléments de base :

Dans cette section on présente les éléments de base des schémas fonctionnels, pour chaque élément on donne la relation qu'il représente:

3.2.1.1 Les comparateurs



3.2.1.2 Les flèches d'orientation de la circulation des signaux :

Indique le sens d'orientation des signaux et ne peuvent être changées

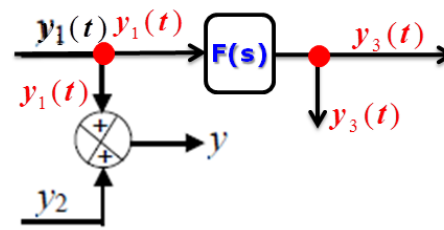
3.2.1.3 Les rectangles :

Ils décrivent le rôle d'un élément :

$x(t) \rightarrow$ Description de l'élément $\rightarrow y(t)$ وصف مهمة العنصر	
$x(t) \rightarrow$ F(s) $\rightarrow y(t) \Rightarrow Y(s) = F(s)X(s)$	$x(t) \rightarrow$ \int $\rightarrow y(t) \Rightarrow y(t) = \int x(t)dt$
$x(t) \rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t}$ $\rightarrow y(t) \Rightarrow y(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial t}$	$x(t) \rightarrow$ F(s) $\rightarrow y_1$ y_1 and y_2 enter a summing junction $\rightarrow y \Rightarrow Y(s) = F(s)X(s) + Y_2(s)$

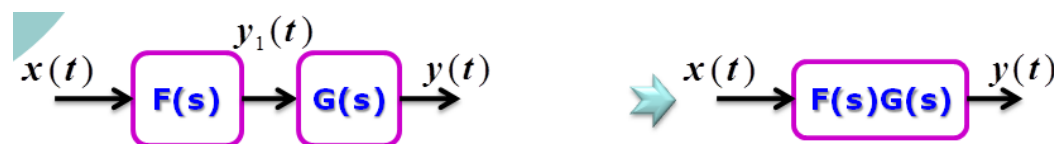
Tableau 8. Exemple de rectangles dans les schémas fonctionnels et leurs rôles

3.2.1.4 Point de dérivation

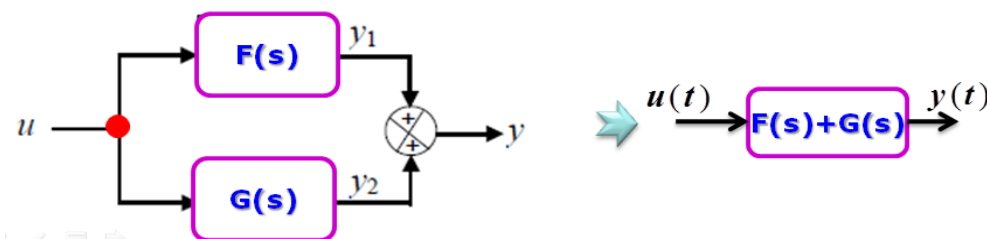


3.2.2 Association de fonctions de transfert :

3.2.2.1 Association de FT en série ou cascade



3.2.2.2 Association de FT en parallèle:



3.2.2.3 Fonction de transfert en réaction

La fonction de transfert en réaction veut dire qu'un signal de sortie est réinjectée à l'entrée du système, c'est dans le cas des systèmes en boucle fermée, voir [section \(1.2.2\)](#)

Calcul de la fonction de transfert équivalente du système de la [Figure 17](#)

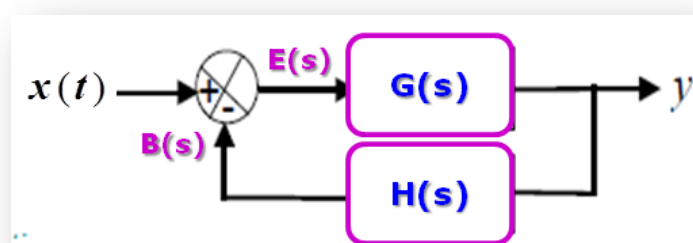


Figure 17. Fonction de transfert en contre-réaction

on a $Y(s) = G(s)E(s)$ et $E(s) = X(s) - B(s)$ on a donc $Y(s) = G(s)(X(s) - B(s))$
 d'un autre coté : on a $B(s) = H(s)Y(s)$ donc :

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)(X(s) - H(s)Y(s)) \\ \Rightarrow (1 + G(s)H(s))Y(s) &= G(s)X(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} X(s) \end{aligned}$$

Donc la fonction de transfert e réaction ou en boucle fermée est :

$$\Rightarrow F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (2.70)$$

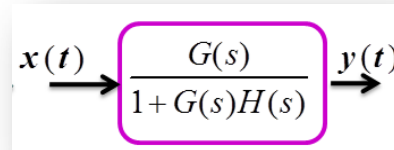


Figure 18. Fonction de transfert équivalente contre-réaction

3.2.3 Schéma fonctionnel d'un système asservi en boucle fermée

La forme canonique d'un système asservi en boucle est la forme donnée sur la Figure 17.

On définit les quantités suivantes :

$G(s)$: est la fonction de transfert direct.

$H(s)$: est la fonction de transfert de retour.

$\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$: est la fonction de transfert de boucle dite aussi le transfert de boucle ou fonction de transfert en boucle ouverte.

$\frac{B(s)}{X(s)}$: Rapport de retour primaire.

$\frac{E(s)}{X(s)}$: Rapport d'erreur.

$\frac{Y(s)}{X(s)}$ est la fonction de transfert en boucle fermée. elle est donnée par l'équation (2.70).

Le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée, équation (2.70), donne l'équation caractéristique du système en boucle fermée $D(s)$.

$$D(s) = 1 + G(s)H(s) \quad (2.71)$$

Les racines de l'équation caractéristique (2.71), $D(s)=0$, sont les pôles du système en boucle fermée, ils sont primordiaux dans l'étude des performances et de la stabilité du système de commande.

3.2.3.1 Le bouclage à retour unitaire :

Soit le système général en boucle fermée système est dit à retour unitaire si

donné dans la la Figure 17. Un $H(s)=1$. voir

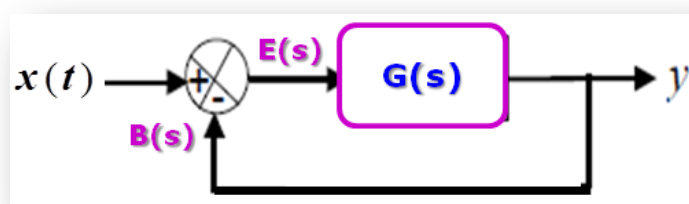


Figure 19 bouclage à retour unitaire

Tout système bouclé peut être transformé en bouclage unitaire

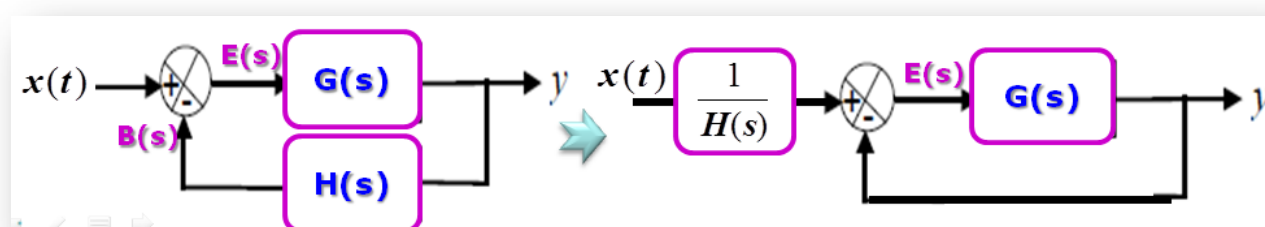


Figure 20. Passage au système à bouclage unitaire

3.2.4 Réduction des schémas fonctionnels complexes

Un schéma fonctionnel d'un système de commande compliqué peut être simplifié en utilisant quelques transformations voir **Tableau 9** :

Transformation	Equation	Block Diagram	Equivalent Block Diagram
1 Combining Blocks in Cascade	$Y = (P_1 P_2)X$		
2 Combining Blocks in Parallel; or Eliminating a Forward Loop	$Y = P_1 X \pm P_2 X$		
3 Removing a Block from a Forward Path	$Y = P_1 X \pm P_2 X$		
4 Eliminating a Feedback Loop	$Y = P_1(X \mp P_2 Y)$		
5 Removing a Block from a Feedback Loop	$Y = P_1(X \mp P_2 Y)$		
6a Rearranging Summing Points	$Z = W \pm X \pm Y$		
6b Rearranging Summing Points	$Z = W \pm X \pm Y$		
7 Moving a Summing Point Ahead of a Block	$Z = PX \pm Y$		
8 Moving a Summing Point Beyond a Block	$Z = P[X \pm Y]$		
9 Moving a Takeoff Point Ahead of a Block	$Y = PX$		
10 Moving a Takeoff Point Beyond a Block	$Y = PX$		
11 Moving a Takeoff Point Ahead of a Summing Point	$Z = X \pm Y$		
12 Moving a Takeoff Point Beyond a Summing Point	$Z = X \pm Y$		

Tableau 9 Réduction des schémas fonctionnels complexe

Exemple 12: Réduire le schéma fonctionnel d'un système de commande donné dans la Figure 21

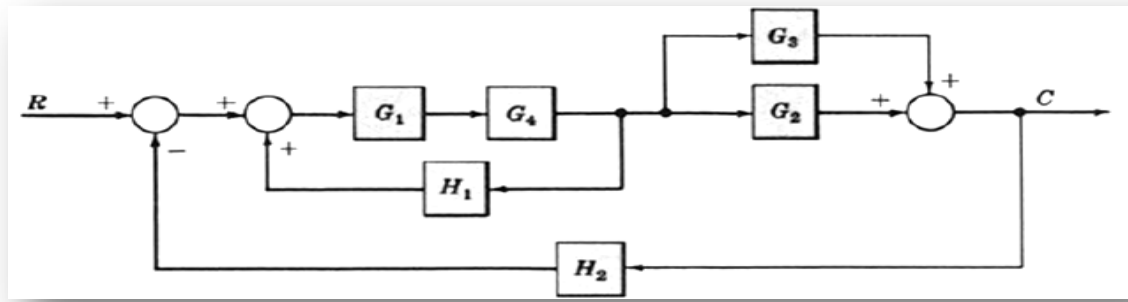
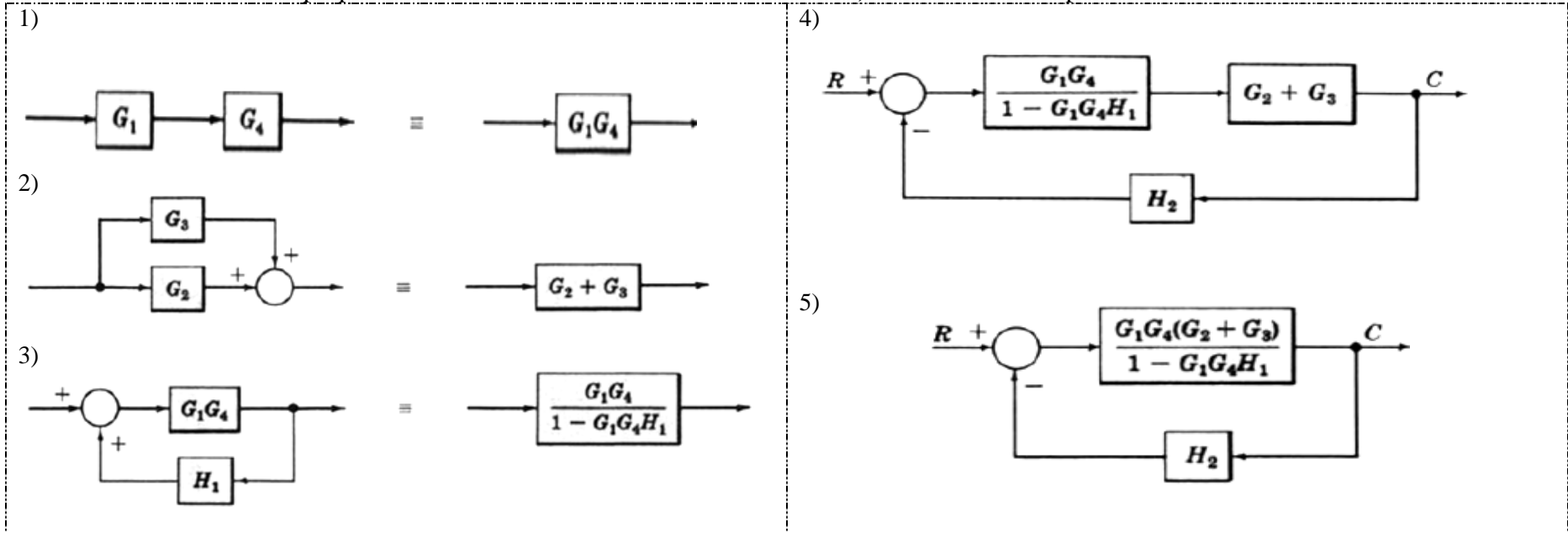


Figure 21. Schéma fonctionnel à réduire 1

Solution : En utilisant les propriétés de réduction données dans le Tableau 9, on réduit branche par branche :



Exemple 13: Réduire le schéma fonctionnel d'un système de commande donné dans la Figure 22 :

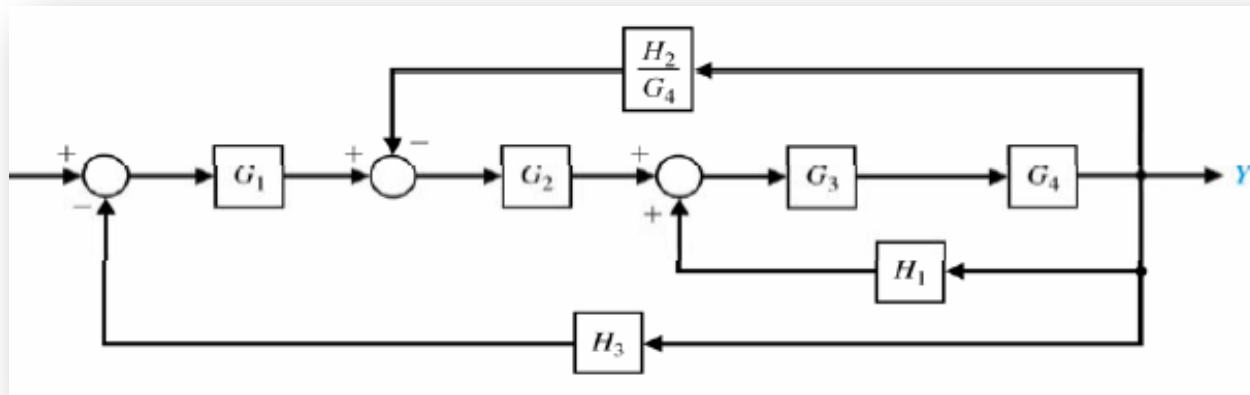
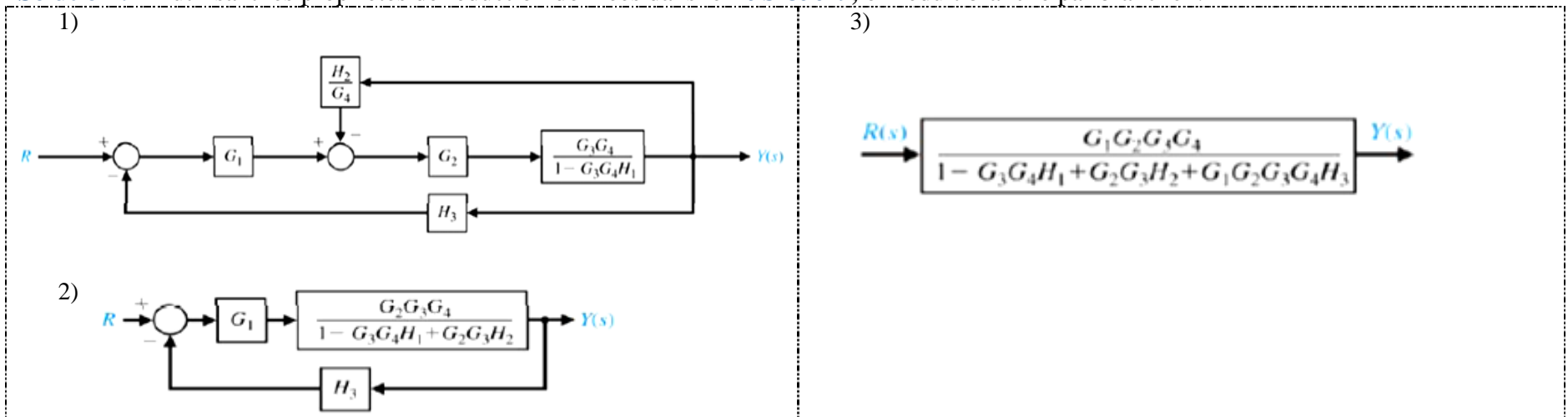


Figure 22. Schéma fonctionnel à réduire 2

Solution : En utilisant les propriétés de réduction données dans le Tableau 9, on réduit branche par branche :



Exemple 14: Réduire le schéma fonctionnel d'un système de commande donné dans la Figure 23:

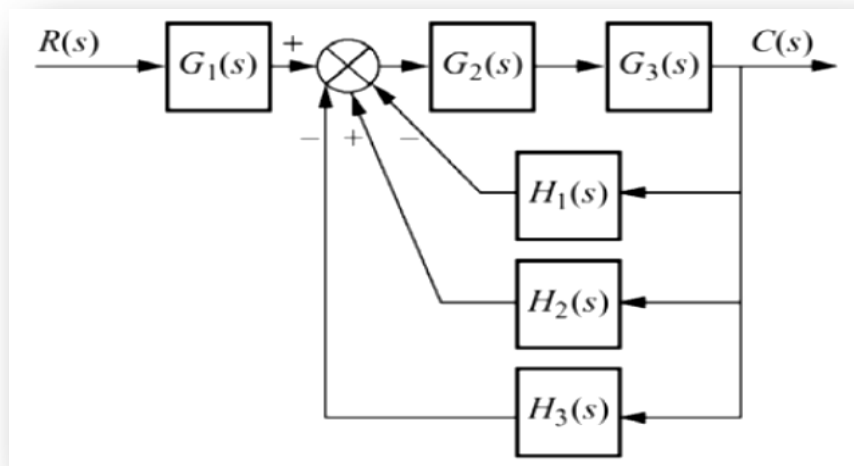
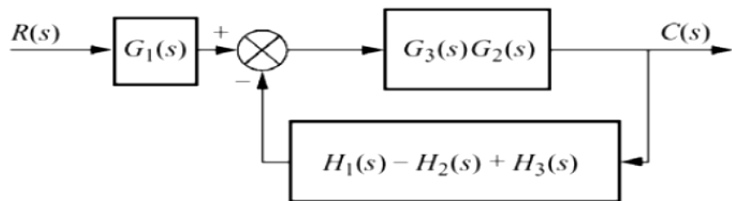


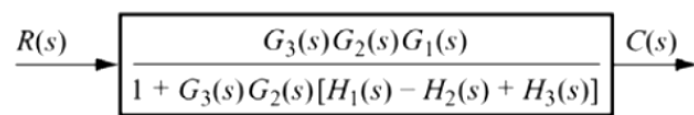
Figure 23. Schéma fonctionnel à réduire 3

Solution : En utilisant les propriétés de réduction données dans le **Tableau 9**, on réduit branche par branche :

1) On simplifie la branche de la somme :



2) On simplifie le bouclage :



Exemple 15: Réduire le schéma fonctionnel d'un système de commande donné dans la **Figure 24** :

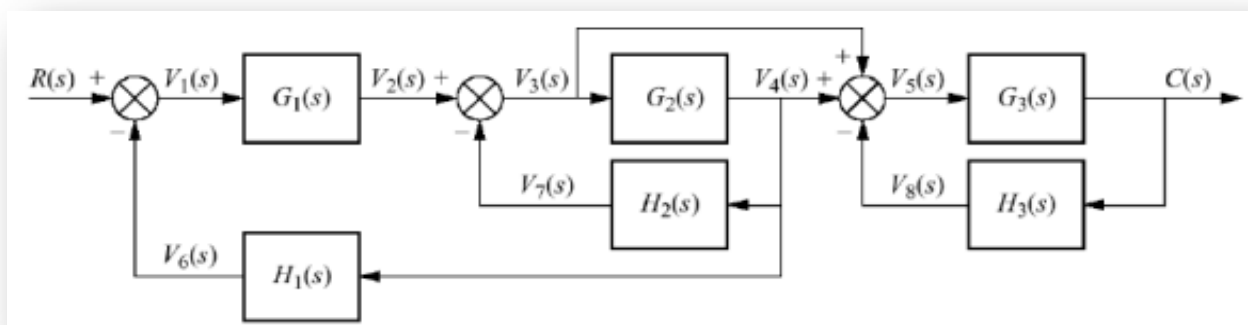
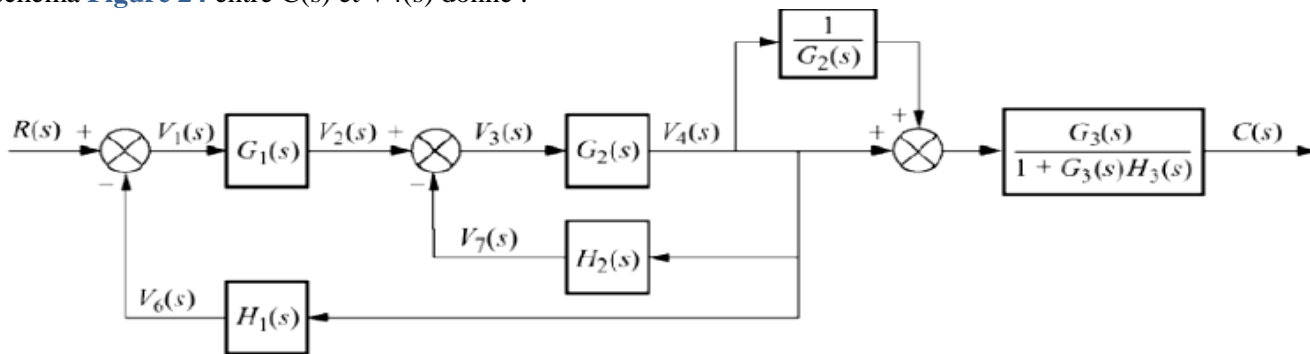


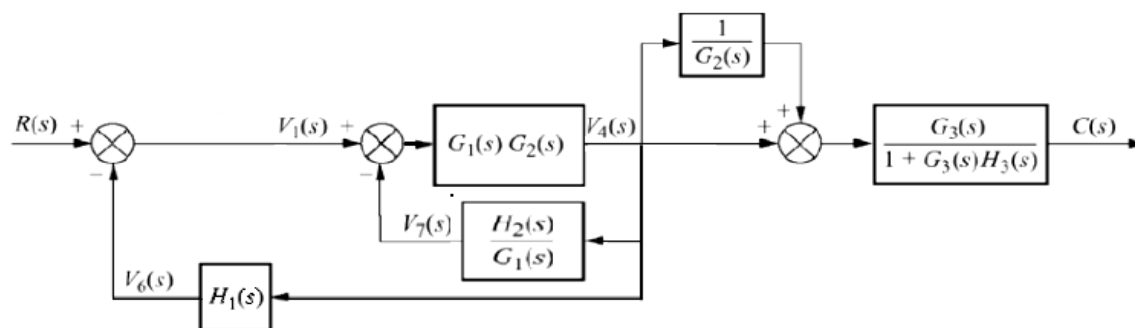
Figure 24. Schéma fonctionnel à réduire 4

Solution : En utilisant les propriétés de réduction données dans le **Tableau 9**, on réduit branche par branche :

1) Simplification du schéma **Figure 24** entre C(s) et V4(s) donne :

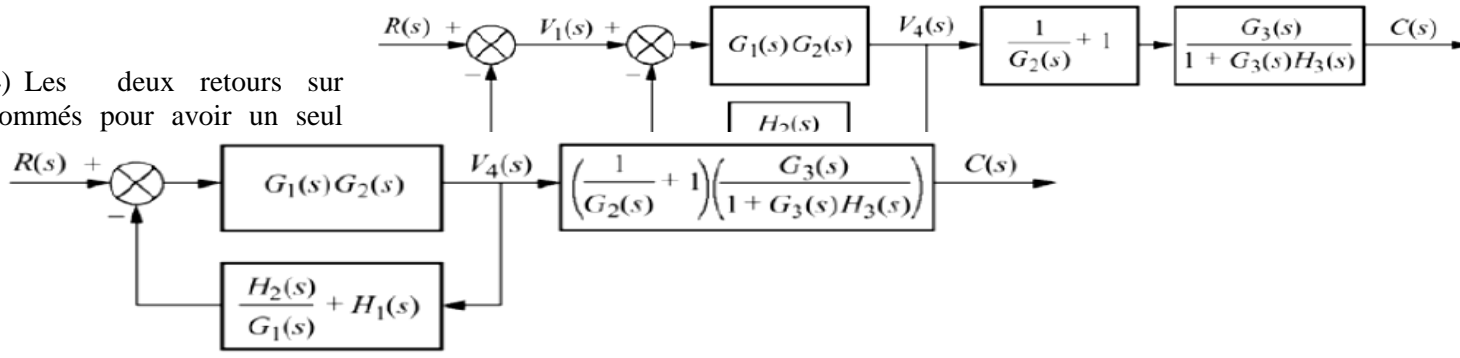


2) On fait rentrer G1(s) dans la boucle entre V4(s) et V2(s) ceci donne :



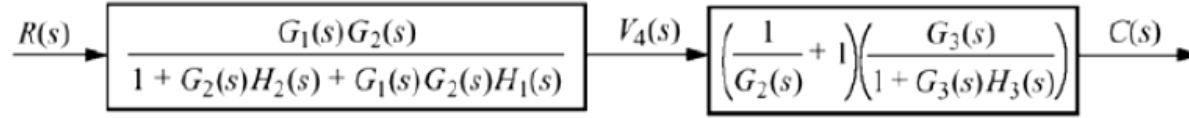
3) On simplifie au niveau de la somme sur 1/G2(s) après le point de dérivation de V4(s) :

4) Les deux retours sur sommés pour avoir un seul

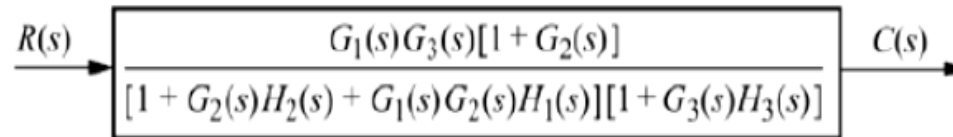


V4(s) peuvent être retour :

5) On simplifie la boucle fermée V4(s) et R(s)



6) A final on multiplie les fonctions de transfert C(s)/V4(s) et V4(s)/R(s) qui sont en cascade pour trouver la fonction de transfert globale :



Chapitre.4. Analyse temporelle du régime transitoire des systèmes de base

4.1 Introduction:

4.1.1 Les signaux de base de test :

Les signaux de base ou les signaux de commande sont les signaux qui sont généralement utilisés pour exciter un système de commande dans le but d'étudier son comportement c'est-à-dire sa réponse ou l'évolution temporelle ou fréquentielle de sa sortie. Parmi ces signaux on a l'impulsion de Dirac, l'échelon unitaire, la rampe ou la parabole. Les signaux de type sinusoïdal sont utilisés pour étudier la réponse fréquentielle d'un système.

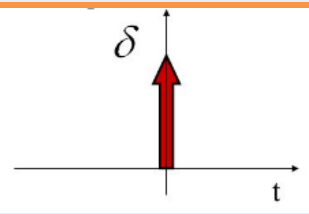
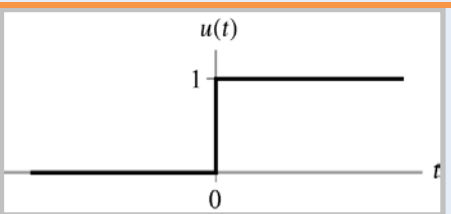
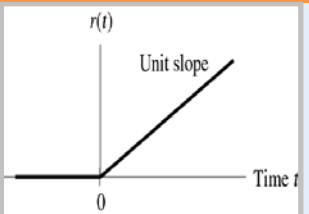
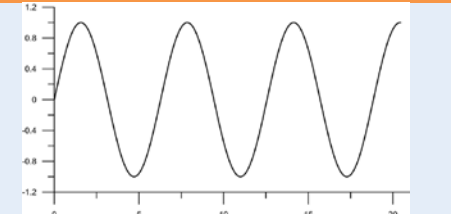
L'impulsion de Dirac		L'échelon unitaire	
$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$		$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	
La rampe		La parabole	
$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$		$x(t) = \begin{cases} \sin(\omega t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	

Tableau 10 : Les signaux de commande de base

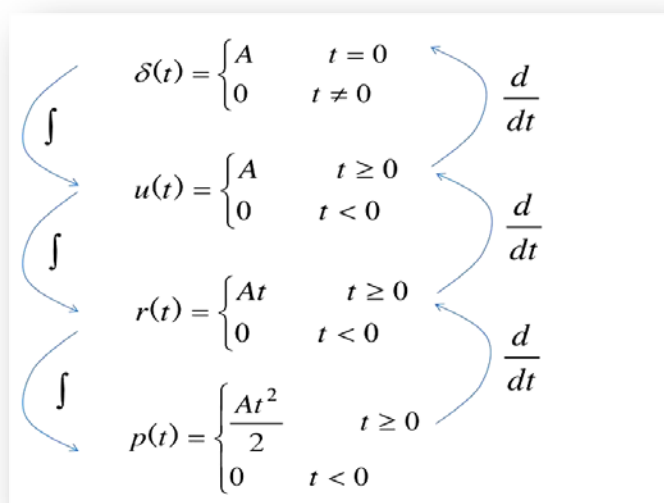


Figure 25. Relation entre les signaux de base

4.2 L'intégrateur :

Dans un navire si on fixe l'angle de barre à une valeur constante u , la sortie évolue infiniment en fonction du temps « pratiquement » le navire tourne sans cesse c'est **l'intégrateur!**

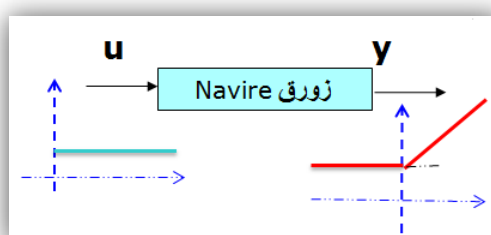


Figure 26 : Exemple d'intégrateur

L'équation différentielle qui représente l'intégrateur est donnée par :

$$\dot{y} = ku(t) \Rightarrow y = \int_0^t ku(t) dt + y(0) \quad (4.1)$$

Si les conditions initiales sont nulles, on a donc la transformée de Laplace de l'équation (4.1):

$$sY(s) = kU(s)$$

$$Y(s) = \frac{k}{s}U(s) \quad (4.2)$$

Un intégrateur dans le temps a une fonction de transfert $\frac{k}{s}$:

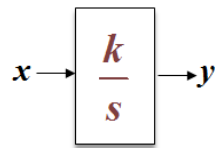
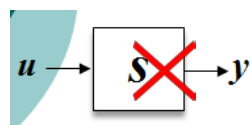


Figure 27. Bloc intégrateur dans Simulink

4.3 Le dérivateur :

$$y(t) = \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow Y(s) = sU(s)$$

Donc la fonction de transfert est donnée par $\frac{Y(s)}{U(s)} = s$ mais c'est la forme parfaite elle n'existe pas en pratique ceci



La dérivation se traite numériquement par exemple par programmation sur Matlab. Ou en utilisant les blocs Simulink :

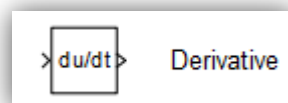


Figure 28. Figure 29. Bloc intégrateur dans Simulink

4.4 Les Systèmes de premier ordre :

Les systèmes de premier ordre sont tous les systèmes décrits par une équation différentielle de 1^{er} ordre de la forme :

$$y + T\dot{y} = ku(t) \quad (4.3)$$

La Transformée de Laplace de (4.3) : $Y(s) + TsY(s) = kU(s)$

$$Y(s) = \left[\frac{k}{1+Ts} \right] U(s) \quad (4.4)$$

$$G(s) = \left[\frac{k}{1+Ts} \right] \quad (4.5)$$

Tout système ayant une FT de la forme de G(s) est dit du premier ordre.

k=G(0): le gain statique (*steady state gain*).

T: constante du temps (*time constant*).

4.4.1 La réponse indicielle :

La réponse indicielle d'un système est la réponse correspondant à un signal d'entrée échelon. Donc si est u(t) échelon donc U(s)=1/s donc de l'équation (4.4) on trouve :

$$\Rightarrow Y(s) = \left[\frac{k}{1+Ts} \right] \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{k}{s} - k \frac{1}{s+1/T} \quad (4.6)$$

LA transformée de Laplace de (4.6) est :

$$y(t) = k(1 - e^{-t/T}) \quad (4.7)$$

$$y(0) = 0, \quad y(\infty) = k$$

Donc la réponse démarre à une valeur nulle et tend vers une valeur finale constante égale à k qu'on appelle le gain statique.

On a une caractéristique importante pour t=T :

$$y(T) = k(1 - e^{-1})$$

$$y(T) = k(1 - 0.3679)$$

$$y(T) = 0.6321k$$

$$\Rightarrow y(T) = 0.632 y(\infty)$$

- La constante de temps T est la valeur pour laquelle la sortie arrive à 63% de sa valeur finale.
- Le système est d'autant plus rapide quand T est plus petite.

4.4.1.1-Mesure de la constante de temps T:

-On peut mesurer (ou identifier) la constante du temps T à partir d'une courbe de réponse d'un système de premier ordre de deux façons:

Figure 30:

1. La tangente à l'origine et le point d'intersection avec la valeur finale est T
2. Chercher T à 63.2% de la valeur finale

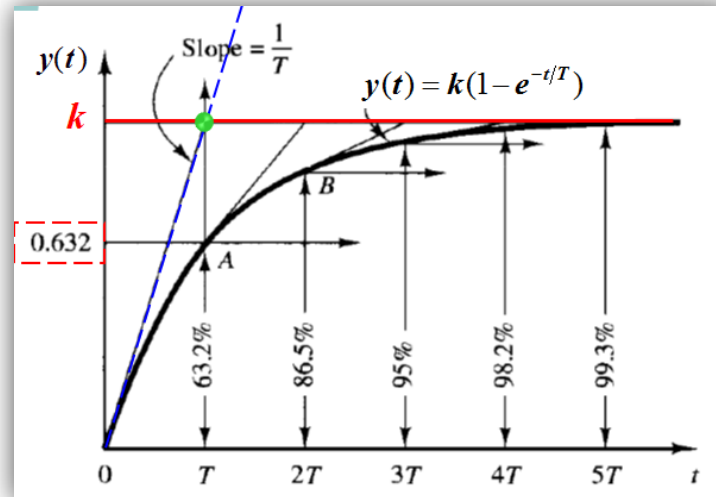


Figure 30. Identification de la constante de temps T

4.4.2 La réponse à une rampe :

La réponse à une rampe consiste à calculer y(t) pour un signal d'entrée rampe u(t)=t, donc on a $U(s) = 1/s^2$:

Donc de l'équation (4.4) implique pour k=1 :

$$\Rightarrow Y(s) = \left[\frac{k}{1+Ts} \right] \frac{1}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{T^2}{1+Ts} \quad (4.8)$$

La réponse est donc la transformée de Laplace inverse de (4.8) et elle est égale à :

$$y(t) = t - T + Te^{-t/T} \quad (4.9)$$

Le signal d'erreur $e(t)=u(t)-y(t)$ pour un système de 1er ordre a la propriété d'être égal à la valeur de la constante de temps à l'infini. on

$$\begin{aligned} e(t) &= u(t) - y(t) \\ \Rightarrow e(t) &= t - (t - T + Te^{-t/T}) \\ \Rightarrow e(t) &= T - Te^{-t/T} \end{aligned}$$

La valeur finale de l'erreur e(t) est :

$$e(\infty) = T \quad (4.10)$$

Donc quand t tends vers l'infini l'erreur tend vers T, on en conclut que plus la constante de temps est petite la valeur de l'erreur est petite.

-Remarque : On peut identifier un système de 1er ordre à partir de la réponse à une rampe.

4.4.3 Réponse impulsionnelle :

La réponse impulsionnelle d'un système est la réponse correspondant à un signal d'entrée impulsion de Dirac. Donc si est u(t) est une impulsion $U(s)=1$ donc de l'équation (4.4) devient :

$$\Rightarrow Y(s) = \left[\frac{k}{1+Ts} \right] \quad (4.11)$$

Donc :

$$y(t) = e^{-t/T}$$

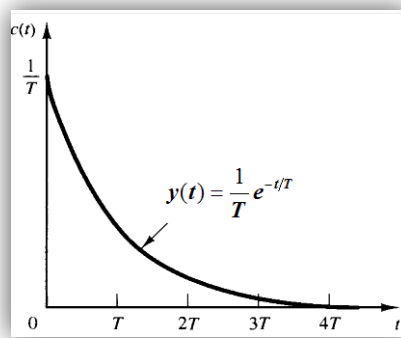


Figure 31. Réponse impulsionnelle d'un 1er ordre

La réponse impulsionnelle démarre à une valeur de $1/T$ et tend vers zéro quand t tend vers l'infini.

4.5 Les systèmes de deuxième ordre :

Tous les systèmes de 2^{ème} ordre sont des systèmes dont l'équation différentielle est de 2^{ème} ordre et a une forme canonique unique du type :

$$\ddot{y} + 2\zeta \omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = K \omega_n^2 u(t) \quad (4.12)$$

Encore la fonction de transfert de ces systèmes a la même forme canonique suivante :

$$H(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.13)$$

avec :

K : est le gain statique $H(0)$.

ω_n : est la pulsation propre non amortie .

ζ : est le coefficient d'amortissement.

Tous les systèmes de 2^{ème} ordre sont analysés et commandés de la même façon. Le comportement dynamique transitoire du système de 2^{ème} ordre est complètement défini par ζ , ω_n , k qui sont directement liés aux pôles de la fonction de transfert!

Les pôles de $H(s)$, équation (4.13), sont les racines de l'équation caractéristique :

$$s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (4.14)$$

Pour calculer les racines de (4.14), on calcule le discriminant

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\zeta \omega_n)^2 - 4\omega_n^2 \Rightarrow \Delta = 4\omega_n^2(\zeta^2 - 1) \\ s_{1,2} &= \frac{-2\zeta \omega_n \pm \sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-2\zeta \omega_n \pm \sqrt{4\omega_n^2(\zeta^2 - 1)}}{2} \\ s_{1,2} &= -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.5.1 La réponse indicielle :

$$H(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{K \omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)} \frac{1}{s} \quad (4.16)$$

On distingue 4 cas selon la valeur de ζ : $s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

Cas 1 : $\zeta = 0$ donc de (4.15); on a deux pôles imaginaires purs $s_1 = j\omega_n$, $s_2 = -j\omega_n$:

$$\begin{aligned} \text{Donc l'équation (4.16) devient : } Y(s) &= \frac{K \omega_n^2}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{K}{s} - \frac{Ks}{(s^2 + \omega_n^2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{K}{s} - \frac{Ks}{(s^2 + \omega_n^2)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

En calculant la transformée de Laplace inverse de $Y(s)$ dans l'équation (4.17). La réponse indicielle pour ce cas est donnée :

$$y(t) = K - K \cos(\omega_n t) \quad (4.18)$$

La réponse est oscillatoire et non-amortie : on a des oscillations entretenues.

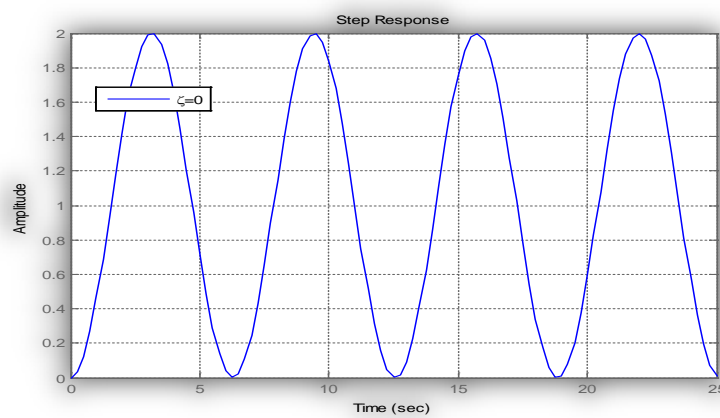


Figure 32 : réponse oscillatoire du système de 2ème ordre pour $\zeta = 0$

Cas 2 : $0 < \zeta < 1$ donc de (4.15); on a deux pôles conjugués $s_1 = -\zeta \omega_n + j\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$, $s_2 = -\zeta \omega_n - j\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$:
On pose :

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow s_1 = -\zeta \omega_n - j\omega_d, \quad s_2 = -\zeta \omega_n + j\omega_d \quad (4.20)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{k\omega_n^2}{s(s + \zeta \omega_n + j\omega_d)(s + \zeta \omega_n - j\omega_d)} \quad (4.21)$$

Pour $K=1$:

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta \omega_n}{(s + \zeta \omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} \frac{\omega_d}{(s + \zeta \omega_n)^2 + \omega_d^2} \quad (4.22)$$

La transformée de Laplace inverse de (4.22) est :

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t) - \frac{\zeta \omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t) \quad (4.23)$$

Prenons en compte l'équation (4.19) on obtient:

$$\Rightarrow y(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t) \right) \quad (4.24)$$

$$\Rightarrow y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\omega_d t) + \zeta \sin(\omega_d t) \right) \quad (4.25)$$

Cette équation peut se simplifier si on trouve une variable β telle que :

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} (\sin(\beta) \cos(\omega_d t) + \cos(\beta) \sin(\omega_d t)) \quad (4.26)$$

En identifiant les équations (4.25)(4.26), on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \zeta^2} &= \sin(\beta) \Rightarrow \tan(\beta) = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \\ \zeta &= \cos(\beta) \\ \Rightarrow \beta &= \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Le terme : $\sin(\beta) \cos(\omega_d t) + \cos(\beta) \sin(\omega_d t) = \sin(\omega_d t + \beta)$, l'équation (4.27) devient donc :

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta) \quad (4.28)$$

La réponse du deuxième ordre est une fonction de forme sinusoïdale dont l'enveloppe est une forme exponentielle, voir Figure 33.
La réponse est sous-amortie : il y a des oscillations amorties, c'est le cas auquel on s'intéresse.

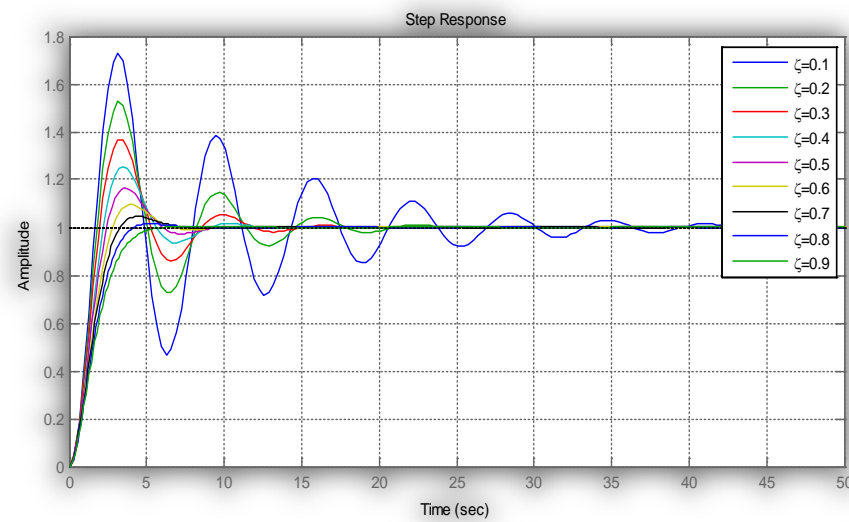


Figure 33 : réponse indicielle sous amortie du système de 2ème ordre pour $0 < \zeta < 1$:

Cas 3 : $\zeta = 1$ donc de (4.15); on a un pôle double réelle strictement négatif : $s_{1,2} = -\omega_n$

L'équation (4.16) s'écrit donc :

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{k\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \frac{1}{s} \quad (4.29)$$

$$\Rightarrow y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (4.30)$$

La réponse est apériodique, elle atteint sa valeur finale le plus rapidement possible sans oscillation et sans dépassement.

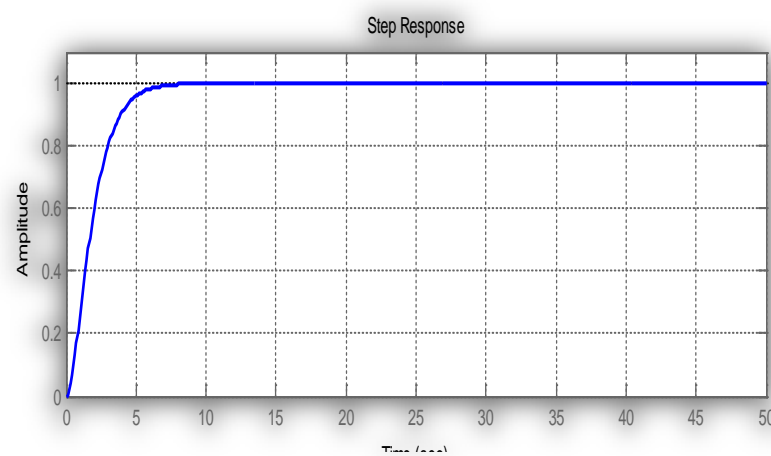


Figure 34 : réponse apériodique du système de 2ème ordre pour $\zeta = 1$

Cas 4 : $\zeta < 0$ donc de (4.15); on a deux pôles positifs instables $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$:

Les pôles sont réels positifs et la réponse diverge et tend vers l'infini, voir Figure 35.

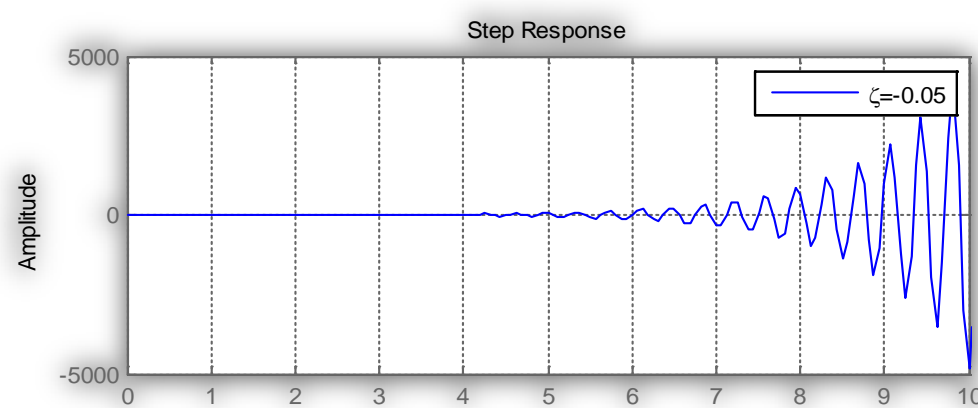


Figure 35 : réponse indicielle qui diverge pour $\zeta < 0$:

4.5.2 Spécifications de la réponse indicielle :

Dans une réponse indicielle, il y a certains paramètres qui spécifient l'allure de cette réponse, ces paramètres sont :

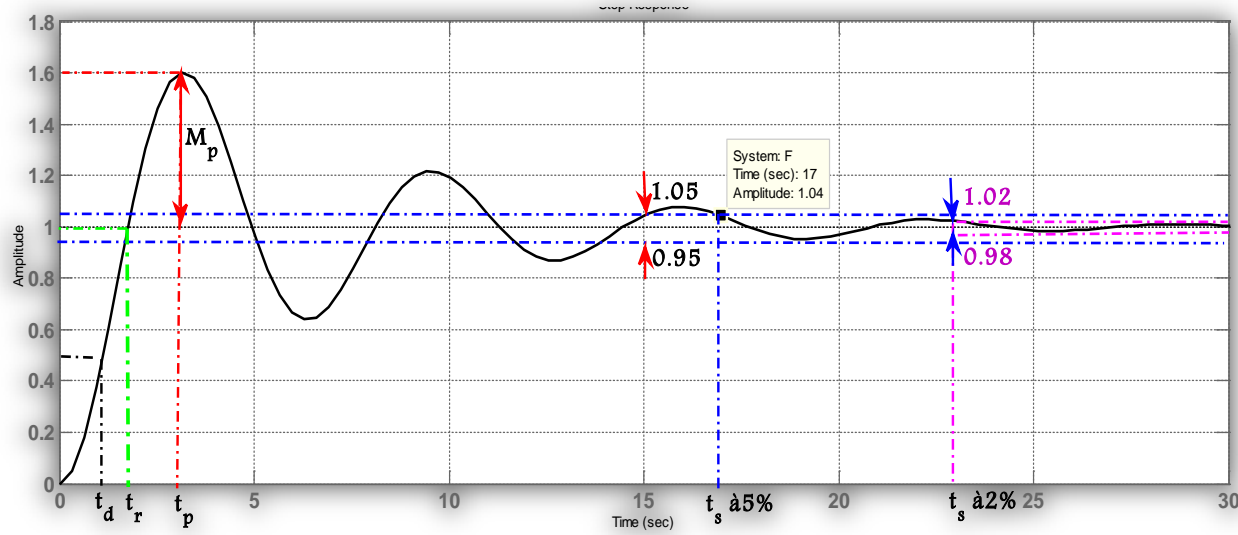


Figure 36. Spécifications de la réponse indicielle d'un système de 2ème ordre

t_d : temps de retard c'est le temps où la réponse arrive la moitié de la valeur finale pour la première fois

t_r : temps de montée : c'est le temps nécessaire à la réponse pour passer de 10% à 90% ou de 5% à 95% ou encore de 0% à 100%.

M_p : Dépassement maximal: est la valeur maximale que peut avoir la réponse du système en dessus de la valeur finale de la réponse. Elle influence directement la stabilité relative du système. A partir d'une courbe elle se calcule par :

$$M_p = \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} 100\% = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} 100\% \quad (4.31)$$

t_p : temps de pic : est le temps nécessaire à la réponse pour arriver au dépassement maximal M_p qui est le premier dépassement.

t_s : temps de stabilisation, c'est le temps nécessaires à la réponse pour arriver à la valeur finale. Ce temps est estimés avec deux tolérances :

t_s à 5% c'est le temps nécessaires à la réponse à arriver pour la première fois à une valeur de $\pm 5\%$ et y rester. t_s à 2% c'est le temps nécessaire à la réponse à arriver pour la première fois à une valeur de $\pm 2\%$ et y rester.

Ces paramètres peuvent tous être calculés à partir de la réponse

4.5.3 Identification d'un système de 2ème ordre :

4.5.3.1 : Identification à partir de la forme canonique:

Si on a les valeurs de ζ , w_n et K soit directement soit qu'on peut les calculer à partir du dépassement et le temps de pic et la valeur finale de la réponse indicielle, alors il est donc facile d'identifier les paramètres physiques d'une fonction de transfert en utilisant la forme canonique (4.13) .

Soit la fonction de transfert (2.17) du système masse-ressort-amortisseur donnée par

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \quad (4.32)$$

On souhaite identifier les paramètres m , b , k en connaissant les valeurs de ζ , w_n .

Premièrement on met la fonction (4.32), sous forme canonique de 2ème ordre (4.13), elle devient :

$$G(s) = \frac{\frac{1}{k} \frac{k}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (4.33)$$

Par identification entre les fonctions de transfert canonique (4.13) et la fonction de transfert masse-ressort-amortisseur(4.33), on trouve :

1) les gains statiques sont identique donc $G(0)=H(0) \Rightarrow \frac{1}{k} = K \Rightarrow k = \frac{1}{K}$

2)
$$\begin{cases} w_n^2 = \frac{k}{m} \\ 2\zeta w_n = \frac{b}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{k}{w_n^2} \\ b = 2\zeta w_n m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{Kw_n^2} \\ b = \frac{2\zeta}{Kw_n} \end{cases}$$

On a donc identifié notre système.

4.5.3.2 : Identification à partir des spécifications de la réponse

Si on a la réponse d'un système de 2ème ordre sans avoir sa formule analytique on peut trouver ζ , w_n à partir des spécifications de cette réponse, Figure 37.

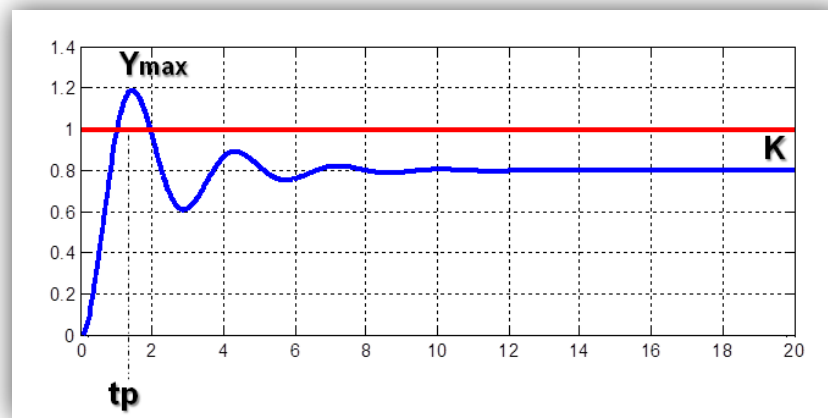


Figure 37 : réponse indicielle de 2ème ordre avec spécifications sans avoir de fonction de transfert

- 1) A partir de la réponse indicielle sur la Figure 37, on peut tirer les spécifications suivantes:
La valeur maximale de la réponse Y_{\max} , la valeur finale de la réponse y_{fin} et le temps de pic t_p .
- 2) A partir de la valeur finale de la réponse on trouve k , $k=y_{\text{inf}}$.
- 3) Le dépassement maximal se calcule par l'équation () $M_p = \frac{Y_{\max} - k}{k}$
- 4) A partir du dépassement maximal M_p on peut calculer le coefficient d'amortissement comme suit :
on a $M_p = e^{\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}$ voir équation () ceci implique

$$\zeta = \frac{|\ln(M_p)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln(M_p)^2}} \quad (4.34)$$

- 5) Jusqu'ici on a utilisé deux spécifications qui sont Y_{\max} et la valeur finale k . Il reste le temps de pic. Le temps de pic permet de calculer facilement la pulsation propre non amortie ω_n en utilisant l'équation, on trouve donc :

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4.35)$$

Jusqu'ici on a trouvé ζ , ω_n et k donc la fonction de transfert du système 2ème ordre est donc trouvé en utilisant la forme canonique (4.13) sa

fonction de transfert est : $H(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Exemple 16 :

Trouver la fonction de transfert du système de 2ème ordre dont la réponse est donnée ci dessous

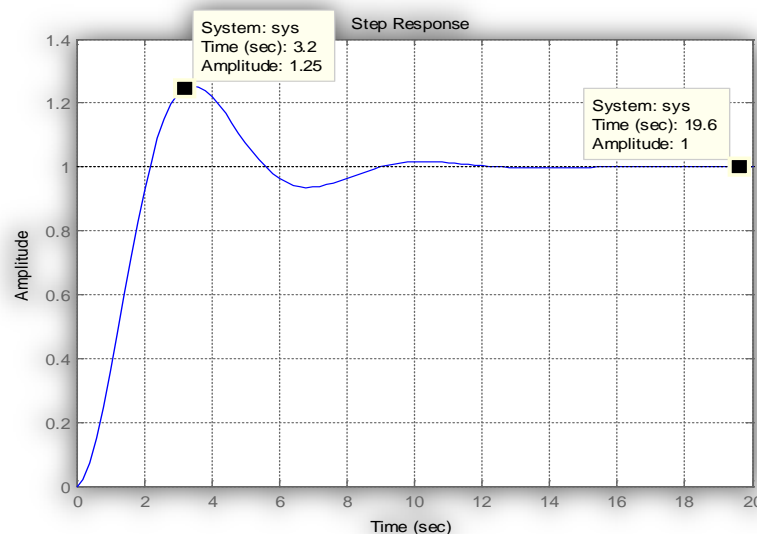


Figure 38. Réponse indicielle pour identifier un système de 2ème Ordre/

Solution :

A partir de la courbe on peut tirer les spécifications suivantes :

$$y(\infty) = 1$$

$$y_{\max} = y(t_p) = 1.25$$

$$t_p = 3.2$$

On doit calculer donc ζ , ω_n et k donc

$$1) \quad y(\infty) = 1 \text{ et } y(\infty) = F(0) \Rightarrow k = 1$$

donc $k = y(\infty)$

$$2) \quad M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} = \frac{1.25 - 1}{1} = 0.25 \Rightarrow \zeta = \frac{|\ln(0.25)|}{\sqrt{\pi^2 + \ln(0.25)^2}} = \mathbf{0.4037};$$

$$3) \quad t_p = 3.2 \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{3.2 \sqrt{1 - (0.4037)^2}} = \mathbf{1.073}$$

$$4) \quad \text{Donc la fonction de transfert est } \Rightarrow F(s) = \frac{\mathbf{1.15}}{s^2 + \mathbf{0.8664}s + \mathbf{1.15}}$$

Annexe

A. Tableau des paires des transformées de Laplace

8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
13	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
14	$\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
	$f(t)$	$F(s)$
1	Unit impulse $\delta(t)$	1
2	Unit step $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$

18	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
21	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
22	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
23	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
24	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$
25	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$

Tableau 11: Tableau des paires de Transformée de Laplace

Références Bibliographiques

1. Katsuhiko Ogata, Modern Control Engineering , 3rd Edition, Prentice Hall, USA, 1997
2. Modern Control Engineering : P.N. Paraskevopoulos
3. Advanced Control Engineering; Roland S Burns. Batteredworth-Heinemann, USA, 2001.
4. J.J. DiStefano, A.R. Stubberud, I.J. Williams. Systèmes asservis, deuxième édition, série schaum, McGraw-Hill. Gande Bgretagne. 1990.
5. J.F. Piasco. Systèmes asservis, Polycopie de l'école centrale de Nantes. France .2001.
6. <https://tutorial.math.lamar.edu/classes/de/IVPWithLaplace.aspx>