قبل التطرق الى البرمجة الخطية ، يتعين علينا
معرفة البرنامج الخطي في صورته الرياضية .

أولا مفهوم البرنامج الخطي :

هو صيغة رياضية مستمدة من واقع معين
هدفها البحث عن أحسن استخدام عن أحسن حالة رياضية
تتكون من مجموعة من المتباينات من الدرجة الأولى
تسمى دالة الهدف (أو الدالة الاقتصادية)
في وجود مجموعة من القيود تكون في شكل
معادلة أو متراجحة أو كلاهما من الدرجة الأولى أيضا

← والمقصود من كلمة أمثلية هو الوصول الى
أعظم قيمة لدالة الهدف (الدالة الاقتصادية) أو أدنى قيمة
حسب الحالة في وجود تلك القيود .

← وكلمة خطي تعني متغيرات الدالة والقيود
من الدرجة الأولى .

Scanné avec CamScanner

① حالة التعظيم

$$\text{Max } Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \cdots + c_n x_n$$

$$\text{S/c} \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \cdots a_{1n} x_n \leqslant b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \cdots a_{2n} x_n \leqslant b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 \cdots a_{mn} x_n \leqslant b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0 \quad x_2 \geqslant 0 \quad x_3 \geqslant 0 \cdots x_n \geqslant 0$$

Max تعني Maximisation

ومعناها جعل الدالة في أعلى قيمة لها.

$x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$ هي متغيرات البرنامج

والمطلوب البحث عن قيمها.

وشرط أن تكون غير سالبة كما في القيد الأخير $\neq 0$

وهذا معناه أن القيم غير سالبة.

Scanné avec CamScanner

وممكن كتبها بالشكل المصفوفي

$$Max Z = [c_1\ c_2\ c_3\ \dots\ c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$S/c \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

واختصاراً نكتب :

Matrice : $Max\ Z = C'X$

$$S/c \begin{cases} AX \leqslant B \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

C : منقول مصفوفة معاملات دالة الهدف .

X : شعاع المتغيرات

A : مصفوفة معاملات القيود .

B : شعاع الثوابت .

Scanné avec CamScanner

مثال:

أكتب البرنامج الخطي التالي بالشكل المصفوفي

$$\text{Max } Z = 300x_1 + 60x_2$$

$$\text{S/c} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 400 \\ 2x_1 + 9x_2 \leq 1080 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 960 \\ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الإجابة

دالة الهدف تكتب:

$$\text{Max } Z = \begin{bmatrix} 300 & 60 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

أما القيود تكتب بالشكل

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 400 \\ 1080 \\ 960 \end{bmatrix}$$

وفي الأخير شرط عدم السلبية:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

② حالة التدنية

$$\text{Min } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{S/c} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \dots a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \dots a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \dots x_n \geq 0$$

في حالة Minimisation Min تبقى

وبالشكل المصفوفي

$$\text{Min } Z = [c_1\ c_2\ c_3 \dots c_n] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\text{S/c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

الخلاصة

$$\text{Min } Z = c\,x$$
$$\text{S/c} \begin{cases} Ax \geq B \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

مثال : حل البرنامج الخطي بالطريقة المعيارية

$$\text{Min}: Z = 4x_1 + 18x_2 + 2x_3$$

$$\text{S/c} \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 14x_3 \geq 20 \\ 2x_1 + 6x_3 \geq 14 \\ 2x_1 + 34x_2 + 30x_3 \geq 50 \\ x_1 \geq 0 \cdot x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

الحل :

$$\text{Min}: Z = \begin{bmatrix} 4 & 18 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{S/c} \quad \begin{bmatrix} 4 & 4 & 14 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 34 & 30 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 20 \\ 14 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

يفهم من العرض السابق أن البرنامج الخطي

في شكل تعظيم أو تدنية يتألف من المكونات التالية :

① دالة الهدف : وتسمى بدالة المقاومة ، وهي تعبر عن الهدف الذي تسعى المؤسسة الوصول إليه

كتعظيم الانتاج أو تعظيم الربح أو تدنية التكاليف ...

وتكون متألفة من متغيرات ذات الدرجة الأولى ...

② القيود : عبارة عن المتراجحات أو المعادلات أو كلاهما

تحد من الحرية حلا لدالة الهدف مع أخذها بعين الاعتبار

تقدها الدنيا وجميعه معاملات معلومة لمتغيرات من الدرجة الأولى

وتتمثل الأعمدة عبارة عن أعداد ثابتة .

③ شرط عدم السلبية : يعني أن كل المتغيرات

قيم أو تساوي الصفر . لأنها تتعلق بكميات مادية

والكميات المادية لا يمكن أن تساوي قيم سالبة .

Scanné avec CamScanner

مفهوم البرمجة الخطية :

إن تشكيل البرنامج الذي رأينا ~~[illegible]~~ سابقاً .

انطلاقا من مسائل واقعية و طرق حل البرنامج

والوصول الى قيمة المتغيرات التي تحقق الحل الأمثل

و ~~[illegible]~~ هي من المواضيع التي تدرسها البرمجة الخطية

مجالات استخدامها

حالة التعظيم	حالة التدنية
- تعظيم الأرباح .	- تدنية التكاليف
- " الانتاج	- " الخسائر
- " ملفات التخزين	- " عدد العوضيفة
- " استخدام رؤوس الأموال	- " الأجور الأجالية
- " المتداخل اليد العاملة	

Scanné avec CamScanner

بناء البرنامج الخطي

هو أحد خطوات في البحث عن المثالية ، ويقصد به تحويل المسألة من واقع كلامي مسرود في قضايا أدبية إلى شكل مسألة مصاغة في قالب رياضي واضح .

تتكون من عدد من المتغيرات به ← دالة الهدف (Max أو Min)

قيود في شكل متراجحات أو معادلات أو معا .

← ولبناء نموذج البرنامج الخطي يجب :

أولا : تحديد المتغيرات .

ثانيا : تحديد دالة الهدف .

ثالثا : تحديد القيود .

رابعا : شرط عدم السالبية

وعليه تتكفل جدول المسألة للحالة :

ملاحظة : يجب أن تكون وحدات قياس العناصر المتشابهة متجانسة

مثال :

تنتج إحدى مؤسسات الخياطة المنتوجات التالية :

الجزائر ، المكاسي ، الكراسي .

- الورشة الأولى طاقة العمل القصوى بها 32 ساعة يومياً
- الورشة الثانية طاقة العمل القصوى بها 24 ساعة يومياً
- الورشة الثالثة طاقة العمل القصوى بها 18 ساعة يومياً .

تسعى المؤسسة لتحقيق أعظم ربح ممكن ، و بعد الدراسة وجدت المعطيات التالية :

← انتاج وحدة واحدة من المنتوج الأول تتطلب :

6 ساعات عمل في الورشة الأولى و 2 ساعة عمل في الورشة الثانية
و 1 ساعات عمل في الورشة الثالثة .

← انتاج وحدة واحدة من المنتوج الثاني تتطلب :

6 ساعات عمل في الورشة الأولى و 4 ساعات عمل في الورشة الثانية و 2 ساعات عمل في الورشة الثالثة

← انتاج وحدة واحدة من المنتوج الثالث تتطلب :

4 ساعات عمل في الورشة الأولى و 3 ساعات عمل في الورشة الثانية و 1 ساعة عمل في الورشة الثالثة

ان ربح الوحدة الواحدة من المنتوج الأول هو 200 دج
وربح الوحدة الواحدة من المنتوج الثاني هو 150 دج .
وربح الوحدة الواحدة من المنتوج الثالث هو 125 دج .

المطلوب : شكل المسألة في نموذج خطي ، و اكتبه بالشكل المعنوي .

Scanné avec CamScanner

المعطيات :

او جد الصيغة الرياضية لهذه المسألة، والتي من شأنها إعداد الكمياء الواجب إنتاجها من كل صنف لأجل تعظيم ربح هذه المؤسسة.

الإجابة :

← أول خطوة : هي تحديد المتغيرات :

بما ان المؤسسة تبحث عن الكمياء الواجب انتاجها من كل منتوج لتحقيق أرباحها، لذلك فان المجاهيل هي عدد الخزائن و عدد المكاتب و عدد الكراسي

نفرض : x_1 : عدد الخزائن

x_2 : عدد المكاتب .

x_3 : عدد الكراسي .

← ثاني خطوة : تحديد دالة الهدف و تحديد القيود .

لكن الاستعانة بـ جدول المسألة وهو جدول مساعد يحتوي على كل خواص القيود و خواص دالة الهدف .

جدول المسألة :

المتوسبات / الورشات	المنتوج y_1	المنتوج y_2	المنتوج y_3	الطاقة القصوى
الورشة 1	4	6	5	32
الورشة 2	2	4	3	24
الورشة 3	2	2	1	16
ربح الوحدة الواحدة	80	120	150	

Scanné avec CamScanner

يلخص الجدول معطيات المسألة. فعلى سبيل المثال

انتاج وحدة واحدة من المنتوج الثاني يتطلب 4 ساعات عمل

وانتاج وحدتين منه يتطلب 2X4 ساعة عمل.

وانتاج الكمية X_2 منه يتطلب $4X_2$ ساعة عمل.

واذا تم انتاج وحدة واحدة من كل منتوج فذلك يتطلب $(1\times4)+(1\times4)+(1\times5)=13$ ساعة

بينما الطاقة القصوى للورشة الاولى هي 32 ساعة عمل.

واذا رمزنا انتاج المصباح (x_1, x_2, x_3) من كل منتوج فان $4x_1+4x_2+5x_3$ يتطلب

ويجب ان لا يتجاوز 32 ساعة عمل وهي الطاقة القصوى.

اذا كتبنا: $4x_1+4x_2+5x_3 \leqslant 32$

ومنه منتوج القيود:

$$S/c \begin{cases} 4x_1+4x_2+5x_3 \leqslant 32 & \text{قيد الورشة 1} \\ 2x_1+4x_2+3x_3 \leqslant 24 & \text{قيد الورشة 2} \\ 2x_1+2x_2+1x_3 \leqslant 16 & \text{قيد الورشة 3} \end{cases}$$

وبما ان المصباح لا يمكن ان تكون سالبة نكتب

$$x_1 \geqslant 0 \quad x_2 \geqslant 0 \quad x_3 \geqslant 0$$

ويمكن ايضا من الجدول

اذا ربح الوحدة الواحدة من المنتوج الاول هو 250 دج

واذا ربح وحدتين منه هو 400 دج

ومنه انتاج الكمية x_1 منه فالربح هو $250x_1$

نكتب دالة الهدف $\boxed{M_{ax}\, Z = 250x_1 + 150x_2 + 120x_3}$

أي أن الهدف هو إيجاد قيم x_i التي تجعل Z في أعظم قيمة لها، دون تجاوز قدرة الورشات.

وعليه يكون النموذج الخطي للمسألة على الشكل:

$$Max: Z = 200x_1 + 150x_2 + 120x_3$$

$$s/c \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 32 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 8x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 11 \\ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

و نكون بذلك قد انتقلنا من الشكل الأصلي للمسألة إلى تمثيلها الرياضي، و هذا ما يعاطلح عليه بمناء النموذج الخطي

Scanné avec CamScanner