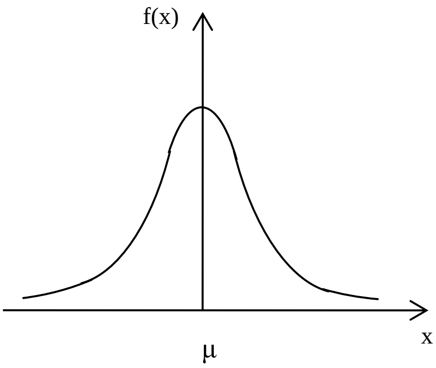
التوزيعات الاحتمالية الشائعة المستمرة

1 التوزيع الطبيعي أو توزيع لابلاس قوس[1] D. Normale ou D. de Laplace -Gausse

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية شائعة الاستخدام لما له من خصائص تنطبق على نسبة كبيرة من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية. فلو اخترنا بالصدفة مئة أو ألفا من المارين في شارع ما وقسنا أطوالهم لوجدنا نسبة كبيرة منها قريبة من متوسط ما، ونسبة قليلة من طوال القامة ونسبة مقاربة لها من قصار القامة. ومثل هذا بالنسبة للأوزان. ولو مثلنا هذه البيانات في معلم متعامد متجانس لكان المنحنى الذي يمثل النسبة، أو ما يمكن أن نسميه الاحتمال، ذا شكل جرسي متماثل حول المتوسط وهي صفات التوزيع الطبيعي (الشكل9) :

(أ) صيغة القانون

تكتب دالة الكثافة لمنحنى للتوزيع الطبيعي كما يلي:



الشكل العام للتوزيع الطبيعي

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

حيث μ و σ هما على التوالي التوقع والانحراف المعياري.   ونكتب $X \sim N(\mu, \sigma)$

دالة التوزيع (الدالة التجميعية) للتوزيع الطبيعي تكتب كما يلي:

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-1/2\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

المتغيرة المركزية أو المعيارية : تستخدم المتغيرة المعيارية $Z = (X-\mu)/\sigma$ لتكوين الجداول الإحصائية للاحتمالات:

$F(z) = P(Z \le z)$ أو $P(0 \le Z \le z)$،

حيث تسمح بكتابة الدالة f و F بدلالة مجهول واحد Z بدلا من 3 مجاهيل x و μ و σ وذلك كما يلي:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < \infty$$

$$F(z) = P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

---

[1] باسم العالمان الرياضيان الفيزيائيان و الفلكيان الفرنسي Pière Simon de Laplace (1749-1827) والألماني Carl Freidrich Gauss – الصورة لهذا الأخير–، (1777-1855) الذين كانا من أوائل من اكتشف هذا القانون. أما من أعطاه تسمية التوزيع الطبيعي فهو Pearson في 1893. أنظر J. J. Droesbeke (1997) ، ص329 .

بالنظر إلى العلاقة الخطية بين المتغيرتين X و Z، فإن Z تتبع نفس توزيع X أي التوزيع الطبيعي. ونعلم أن:

$$\mathbf{V(Z) = 1} \qquad \mathbf{E(Z) = 0}$$

(ب) خصائص التوزيع الطبيعي

الدالة المتجددة للعزوم :

$$M_x(t) = \exp\left(t\mu + \frac{t^2\mu^2}{2}\right)$$

من خصائص التوزيع الطبيعي أنه يعتبر معتدلا لا مدببا ولا مفلطحا، حيث يعتبر معامل التفلطح $\alpha_4 = 3$ للتوزيع الطبيعي معيارا لاعتدال المنحنيات.

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$$

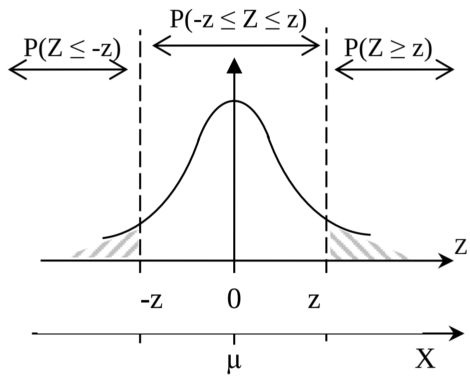
من خصائص التوزيع الطبيعي أيضا أنه متماثل حول القيمة المتوقعة

تماثل منحنى X حول المتوسط (أنظر الشكل) يعني تماثل لمنحنى Z حول 0، مما يعني أنه من أجل أي قيمة للمتغيرة المعيارية

: $z > 0$

$$P(0 \le Z \le z) = P(-z \le Z \le 0) = P(-z \le Z \le z) / 2$$

$$P(Z \le -z) = 1 - P(Z \le z) = P(Z \ge z)$$



استخدام تماثل الوزيع الطبيعى فى حساب الاحتمالات

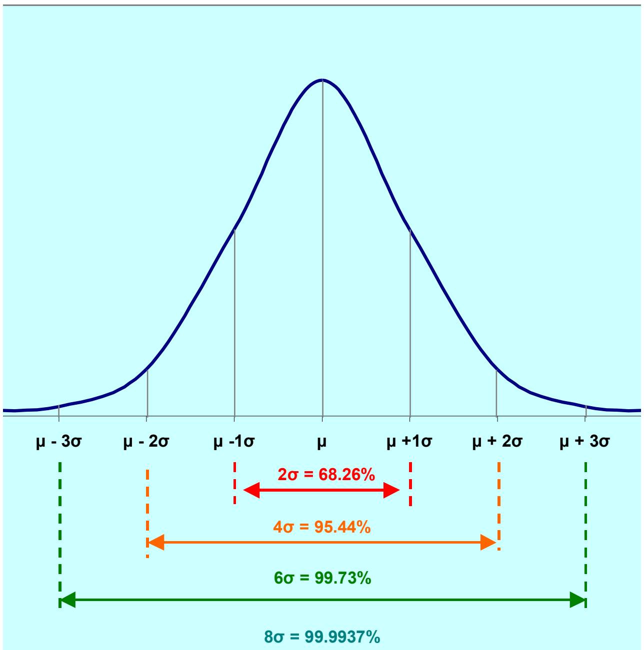
و لقد تم باستخدام المتغيرة المعيارية Z حساب الاحتمالات (المساحات) تحت المنحنى ومنها خاصة:

$$P(-\sigma \le X \le \sigma) = P(-\sigma \le Z \le \sigma) = 0.6837,$$

$$P(-2\sigma \le X \le 2\sigma) = P(-2 \le Z \le 2) = 0.9544,$$

$$P(-3\sigma \le X \le 3\sigma) = P(-3 \le Z \le 3) = 0.9973.$$

هذه القيم وغيرها متوفرة في الجداول الإحصـــائية التي نجدها في الكثير من المراجع، كما يمكن حســـابها باســـتخدام الحاسوب.



المساحات الأساسية تحت منحنى التوزيع الطبيعي

مثال: باستعمال الجداول الاحصائية 1) أحسب : $P(0 \leq Z \leq z)$ حيث $z = 1, 2, 3$

2) أحسب $P(-z \leq Z \leq z)$ من أجل نفس القيم ل z.

1) 0.3413 ، 0.47725 ، 0.49865

2) 0.6827، 0.9545، 0.9973

2 توزيع ستودنت "ت" Student Distribution

يشبه توزيع t التوزيع الطبيعي حيث يكون متامثل حول المتوسط الحسابي الذي يساوي صفر (t=0) حيث تكون دالة الكثافة الاحتمالية له هي:

$$f(t) = c\left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\gamma+\frac{1}{2}} \qquad -\infty < t < \infty$$

ويسمى أيضا توزيع Student's Distribution حيث تمثل γ درجات الحرية (degree of freedom) كما نلاحظ هنا فإن شكل توزيع t يشبه التوزيع الطبيعي وله نفس الخصائص حيث يمتد من طرفيه من ∞- إلى∞ + ومتماثل حول محور المتوسط. $P(t>t_\alpha)=\alpha$ والمساحة تحته تساوي الواحد. ولكنه يختلف عن التوزيع

الطبيعي في كون قيمة تعتمد على درجات الحرية . ولإيجاد قيمة t نجد درجات الحرية وهي $df = n-1$ ونجدها من الجدول المخصص لها.

مثال: استخرج القيم التالية من الجدول.

T(29,0.025) ; T(29,0.001) ; T(3,0.995) ; T(25,0.95)

من الجدول الخاص بالتوزيع "ت" نجد ما يلي:

1) $t[29,0.025] = 2.045$

2) $t[29, 0.001] = 3.396$

3) $t[25,0.95] = -t[25,1-0.95]$

$= -t[25,0.05] = -1.708$

4) $t[3,0.995] = -t[3,0.005]$

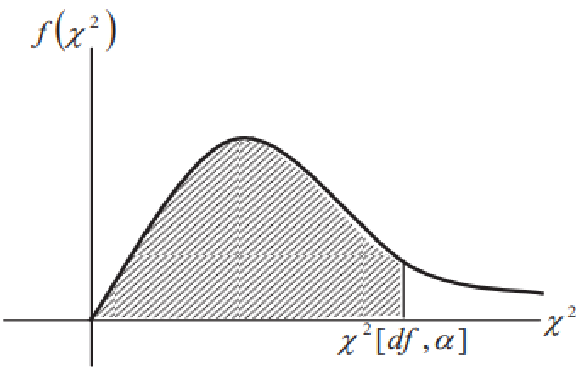
$= -0.5841$

3- توزيع كاي تربيع: χ^2 distribution

إن توزيع χ^2 من التوزيعات الاحتمالية المتصلة حيث يكون اقتران كثافته الاحتمالية معطى بالعلامة

$$f(\chi^2)=c(\chi^2)^{(\gamma-c)/2}\quad e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad,\quad \chi^2>0$$

ومن هنا نرى أن منحنى χ^2 يكون في الموجب فقط حيث يكون منحناه على الصورة.



ويعطي الجدول قيمة χ^2 التي على يسارها مساحة α ودرجات حرية df.

مثال:

احسب قيمة χ^2 في كل مما يلي:

1) $\chi^2\ [20,0.99]$

2) $\chi^2[15.0.05]$

3) $\chi^2[2,0.975]$

الحل:

1) $\chi^2\ [20,0.99] = 8.2604$

2) $\chi^2\ [15,0.05] = 24.9958$

3) $\chi^2[2,0.975] = 0.0506356$

4 التوزيع الأسي Distribution exponentielle

عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في مسائل متعلقة بقياس الزمن. من ذلك مدة خدمة شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة...في العلوم الدقيقة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة الذرات المشعة (atomes radioactives) قبل أن تتفكك، حيث يعبر الوسيط عن اللحظة التي يبقى فيها نصف المجتمع الأصلي.[2]

[2] راجع موقع موسوعة Wikipédia .

من الضروري فهم الآتي: كقاعدة عامة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة ظاهرة ما إذا كان لها متوسط ثابت $1/\lambda$ وكانت هذه الظاهرة لا تخضع للتقادم (vieillissement) أي أن مدة حياة الظاهرة بعد لحظة ما T لا تتبع اللحظة T؛ أي لا تتأثر بالمدة التي دامتها الظاهرة من قبل. مثلا قد نستبعد استخدام التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة آلة عاملة قبل تعطلها لأن احتمال تعطلها في لحظة ليس مستقلا عن المدة التي عملتها الآلة من قبل، كذلك الأمر بالنسبة لمدة حياة الإنسان.

عمليا، نتحقق من دقة تمثيل التوزيع الأسي _أو أي توزيع آخر_ لظاهرة ما من خلال تقنيات اختبارات الفروض، وبالتحديد اختبار التجانس و التعديل.

(أ) صيغة القانون الأسي أو دالة الكثافة و الدالة التجميعية للتوزيع.

بينت دراسة أن عدد حوادث العمل في معمل معين تتبع توزيع بواسون بمعدل λ حادث يوميا.

أوجد احتمال أن يسجل حادث على الأقل (حادث أو أكثر) في مدة t يوم.

$P(X \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - [\lambda^{0t} * e^{-\lambda t}/0!] \Rightarrow \mathbf{P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t}}$

لنرمز ب T للزمن (باليوم) بين حادثين إذن سيكون لدينا f(t) دالة الكثافة للزمن بين حادثين، و $F(t) = P(T \leq t)$ دالة التوزيع ل T.

لنحسب احتمال P أن يكون الزمن بين حادثين يوم أو أقل:

لدينا $P = P(T \leq t = 1)$ إذن:

$P = F(t = 1)$ ………… (1)

لاحظ من ناحية أخرى أن P هو معادل لاحتمال أن يسجل على الأقل حادث في يوم معين:

$P = P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t}$ ……….(2)

من (1) و(2) نستنتج أن $\boxed{\mathbf{F(t) = 1 - e^{-\lambda t}}}$…………(3)

و منه $f(t) = F(t)' = (1 - e^{-\lambda t})'$

إذن $\mathbf{f(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$

قاعدة: إذا كان حدث عشوائي ما يتكرر في الزمن وفق توزيع بواسون:

$$p_\tau(x) = \frac{(\lambda\tau)^x e^{-\lambda\tau}}{x!}$$

فإن الزمن T بين حادثين يتبع التوزيع التالي:

$$f(\tau) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\tau} & , \quad \tau > 0 \\ 0 & , \quad \tau \leq 0 \end{cases}$$

حيث λ عدد حقيقي موجب.

و يسمى هذا التوزيع التوزيع الأسي ويسمى أيضا التوزيع الأسي السالب لعلاقته بتوزيع بواسون.

(ب) خصائص التوزيع الأسي

$$\mu = 1/\lambda \quad , \quad \sigma^2 = 1/\lambda^2 \quad M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

5 توزيع قاما Distribution gamma

توزيعي قاما و بيتا يمثلان مجموعة واسعة من التوزيعات ذات معلمتين تتميز بمرونة وقدرة على توليد توزيعات متعددة حسب قيم المعلمتين. ندرس هذين التوزيعين أيضا لعلاقتهما بالتوزيعات F، t، و ك2. يستخدم توزيع قاما لتمثيل بعض الظواهر مثل توزيع الدخل والادخار تحت شروط معينة[3].

(أ) صيغة القانون.

نقول عن متغيرة عشوائية أنها تتبع توزيع قاما إذا كانت دالة كثافتها كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0 \quad , & x \le 0 \end{cases} \quad , \alpha > 0, \beta > 0$$

حيث Γ(α) هي الدالة قاما: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \qquad \alpha > 0$

ونكتب **X ~ Γ(α, β)**

(ب) خصائص توزيع قاما

$$\mu = \alpha\beta \quad , \quad \sigma^2 = \alpha\beta^2, \quad M(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$$

Pour $\alpha>1$: $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ et si $\alpha \in N$: $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

من خصائص توزيع قاما علاقته بالتوزيع الأسي كما سنرى في السلسلة.

مثال. أحسب ما يلي:

$$\int_0^{\infty} t^4 e^{-t} dt, \quad \int_0^{\infty} x^6 e^{-x} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{1/2}} dx, \quad \Gamma(7), \quad \Gamma(4.5), \quad \Gamma(2.5).$$

$$\int_0^{\infty} t^4 e^{-t} dt = \Gamma(5) = 4! = 24, \int_0^{\infty} x^6 e^{-x} dx = \Gamma(7) = 6! = 720, \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^{1/2}} dx = \int_0^{\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(4.5) = \Gamma(3.5+1) = 3.5\Gamma(3.5) = 3.5(2.5)\Gamma(2.5) = 3.5(2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5) = 3.5(2.5)(1.5)(0.5)\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(7) = 6! = 720, \qquad \Gamma(2.5) = 1.5\Gamma(0.5) = 1.5\sqrt{\pi}$$

مثال2. أحسب المتوسط والتباين للمتغيرات العشوائية X و Y و Z المعرفة كما يلي:

[3] أنظر: آيفازيان و آخرون، مبادئ النمذجة و المعالجة الأولية للبيانات، سلسلة : Mathématiques، Editions Mir، موسكو، 1983، ترجمة من الروسية إلى الفرنسية جيلالي مبارك، 1986. ص158.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4e^{-x/2}}{2^5\Gamma(5)}, & x>0\\ 0 \quad , & x\le 0\end{cases}, \qquad f(y)=\begin{cases}\dfrac{y^3e^{-y/4}}{4^4(6)}, & y>0\\ 0 \quad , & y\le 0\end{cases}, \qquad f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^2e^{-z}}{6}, & z>0\\ 0 \quad , & z\le 0\end{cases}$$

$$\mu_x=\alpha\beta=5(2)=10, \sigma^2{}_x=\alpha\beta^2=5(2^2)=20, \mu_y=4(4)=16, \sigma^2{}_y=4(4^2)=64, \mu_z=3(1)=3, \sigma^2{}_z=3$$

6 توزيع بيتا Distribution bêta

يتميز توزيع بيتا بمرونته الكبيرة تبعا لقيم معلمتيه (أنظر الرسم) حيث يستخدم لحساب توزيع t^2، F، التوزيع الثنائي، الثنائي السالب وغيرها[4]، وتستخدم لتمثيل بعض المتغيرات التي تتراوح بين 0 و 1، مثل نسبة ما كنسبة التالف أو المبيعات، إلخ.

(أ) صيغة القانون.

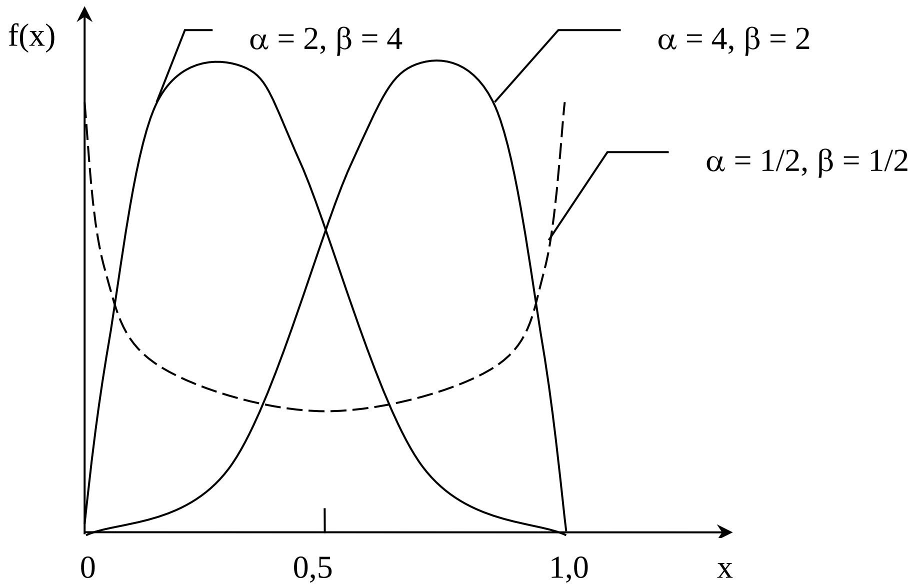
نقول عن متغيرة عشوائية أنها تتبع توزيع بيتا إذا كانت دالة كثافتها كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & 0<x<1 \\ 0 & ailleurs\end{cases} \qquad (\alpha,\beta>0)$$

حيث $B(\alpha, \beta)$ هي الدالة بيتا: $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du, \qquad \alpha,\beta>0$

و نكتب $X \sim B(\alpha, \beta)$

$\alpha = 4, \beta = 2$



التمثيل البياني لدالة الكثافة للتوزيع بيتا من أجل قيم مختلفة للمعالم

[4] المرجع السابق.

(ب) **خصائص توزيع بيتا**

$$\alpha = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

(ج) **العلاقة بين الدالتين قاما وبيتا:**

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

مثال. أحسب ما يلي:

$$B(3,4), \qquad B(1/2,1/2), \quad B(n,2), \qquad B(1,n), \qquad B(n,1) \quad (n \in N)$$

$$B(3,4) = \frac{(3-1)!(4-1)!}{(7-1)!} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}, \quad B(1/2,1/2) = \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)\left(\sqrt{\pi}\right)}{(1/2)+(1/2)} = \pi,$$

$$B(n,\ 2) = \frac{(n-1)!1!}{(2+1)!} = \frac{1}{n(n+1)!}, \qquad B(1,n) = \frac{1(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} = \frac{1}{n}, \qquad B(n,1) = \frac{(n-1)!1}{n!} = \frac{1}{n}$$

مثال2. أحسب ما يلي: $\int_0^1 x(1-x)dx$، $\int_0^1 x^4(1-x)^3 dx$، $B(3,2)$

$$B(3,2) = 1/[n(n+1)] = 1/[3(4)] = 1/12$$

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3 dx = B(5,4) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)} = \frac{4!3!}{8!} = \frac{1}{280}, \qquad \int_0^1 x(1-x)dx = B(2,2) = \frac{1!1!}{3!} = 1/6$$

وباستعمال العلاقة $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ نجد أن دالة الكثافة للتوزيع بيتا تكتب أيضا:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad ailleurs \end{cases}$$

للتوزيعين قاما وبيتا علاقة بعدد من التوزيعات المهمة كالتوزيع الأسي وتوزيع كاي تربيع، من ذلك **مثلا** أن التوزيع الأسي هو حالة خاصة من توزيع قاما عندما **$\alpha = 1$, $\beta = 1/\lambda$**.

مثال3. أحسب النسبة المتوقعة للإنتاج التالف والتباين، إذا كانت نسبة الإنتاج التالف تتبع التوزيع التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 6(1-x)^5, & 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{sinon} \end{cases}$$

من المثال السابق لدينا: $B(1,n) = 1/n \Rightarrow 6 = 1/B(1,6).$

بوضع α و β يساويان 1 و 6 على التوالي، نجد أن $X \sim B(1, 6)$

ومنه: $\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = 1/2, \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{4}{16(5)} = 1/20.$

مثال4. نسبة الإنتاج المباع في مؤسسة تتبع التوزيع التالي. أحسب النسبة المتوقعة، واحتمال أن تبلغ النسبة أكثر من 35% .

$$f(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0<x<1\\ 0 & ,\ \text{sinon}\end{cases}$$

$$12=3*4 \Rightarrow 12=1/B(3,2) \Rightarrow X \sim B(3,2) \Rightarrow \mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{3}{3+2}=3/5=60\%$$

$$P(X>0.35)=\int_{0,35}^{1} 12x^2(1-x)dx.$$

$$soit: v=x^2dx \ et\, u=1-x \Rightarrow P(X>0.35)=12\left(\left[(1-x)\frac{x^3}{3}\right]_{0,35}^{1}+\int_{0,35}^{1}x^2dx\right)=0.3125$$

7 خلاصة

الجدول التالي يلخص خصائص التوزيعات الاحتمالية المستمرة الأكثر استخداما.

التوزيع	دالة الكثافة ، التوقع والتباين	خصائص التوزيع
التوزيع الطبيعي المعياري X~N(0, 1)	$\boxed{f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \qquad -\infty<z<\infty}$ E(Z) = 0, V(Z) = 1	$P(Z \le -z) = 1- P(Z \le z) = P(Z \ge z)$ $P(-\sigma \le X \le \sigma) =$ $P(-1 \le Z \le 1) = 0.6837,$ $P(-2\sigma \le X \le 2\sigma) =$ $P(-2 \le Z \le 2) = 0.9544,$ $P(-3\sigma \le X \le 3\sigma) =$ $P(-3 \le Z \le 3) = 0.9973.$
التوزيع الأسي	$f(\tau)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda\tau} & , \quad \tau>0\\ 0 & , \quad \tau\le 0\end{cases}$ $\mu = 1/\lambda,$ $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ $F(x) = 1-e^{-\lambda x}$	$P(X \le \mu) = 0.63$
توزيع قاما X~Γ(α,β)	$\begin{cases}\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & x>0\\ 0 \quad , & x\le 0\end{cases} \quad , \alpha>0, \beta>0$ $\mu = \alpha\beta,$ $\sigma^2 = \alpha\beta^2$	$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}dt \qquad \alpha>0$
توزيع بيتا X~ B(α, β)	$f(x)=\begin{cases}\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & 0<x<1\\ 0 & ailleurs\end{cases} \quad (\alpha,\beta>0)$ $\alpha=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \sigma^2=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du, \qquad \alpha,\beta>0$ $B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$