حل البرنامج الخطي بطريقة "السمبليكس"

تحت تحقق في حالة كان عدد المتغيرات اثنين أو أكثر.

قبل الخوض في إيجاد الحل بهذه الطريقة ينبغي التعرف على بعض أنواع الصيغ الخطية.

أولا: الصيغة القانونية

① حالة التعظيم

- دالة الهدف Max
- القيود بمتراجحات أصغر أو تساوي عدد موجب ثابت
- جميع المتغيرات موجبة.

ب) حالة التدنية.

- دالة الهدف Min
- القيود بمتراجحات أكبر أو تساوي عدد موجب ثابت
- جميع المتغيرات موجبة.

ثانيا: الصيغة المختلطة

- دالة الهدف Max أو Min
- القيود بمتراجحات أكبر من أو أصغر من
- جميع المتغيرات موجبة.

ثالثا: الصيغة النموذجية

- دالة الهدف Max أو Min
- القيود بالمعادلات

تجتمع هذه الصيغة ضرورية لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج بطريقة السمبليكس، إذ يجري تحويل أية صيغة مهما كان شكلها إلى الصيغة النموذجية.

Scanné avec CamScanner

رابعاً : إيجاد الصيغة النموذجية و معرفة الحل الأساسي الأول :

لإيجاد الصيغة النموذجية في حالة كون القيد عبارة عن متراجحة لابد من إدخال متغير إضافي صورية جديدة على اليسار ، إما إضافة أو طرحها لتتحول المتراجحة إلى معادلة حتى هذه المتغيرات بمتغيرات الفجوة (لأنها تسد الفجوة بين طرفي المتراجحة)

الحالة الأولى إذا كان القيد على الشكل

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n \leq b$$

يصبح لدينا $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n + x_{n+1} = b$

و تمثل متغيرات الفجوة الطاقات غير المستغلة (و هي متغيرات تكون دائما غير سالبة)

← نشير إلى أنه عند إدخال متغيرة الفجوة إلى القيد فإنه يدخل كذلك إلى دالة الهدف لكن بمعامل يساوي الصفر.

و تتم معرفة معاملات القيود المتحصل عليها بعد إضافة متغيرات الفجوة بمعرفة الحل الأساسي الأول

3

مثال

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$\text{S/c} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 \leq 25 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases}$$

فتحول المتراجحات الى معادلات

الشرط الأول
الشرط الثاني
الشرط الثالث

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 = 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 + x_6 = 25 \end{cases}$$

لاحظ انه ميزنا متغيرات الفجوة عن المتغيرات الحقيقية فأعطيناها تسميات مختلفة ومتزايدة وهي غير متساوية في الغالب لعدم تساوي الطاقات على المستقلة لكل قيد.

فيصبح البرنامج

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 9x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\text{S/c} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 = 7 \\ x_1 + 17x_2 + 15x_3 + x_6 = 25 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0 \quad x_6 \geq 0$$

نتيجة مصفوفة معاملات القيود كالتالي:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 17 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نسمي هذه المصفوفة بـ

مصفوفة الحل الأساسي الأول

Scanné avec CamScanner

4

إيجاد الحل لدينا مسألة (Max)

$$Max\, z = c_1x_1 + c_2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_5 = b_3 \\ x_j \geq 0 \quad j\ 0 \to 5 \end{cases}$$

ليكون جدول الحل الأساسي الأول

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
x_3	a_{11}	a_{12}	1	0	0	b_1
x_4	a_{21}	a_{22}	0	1	0	b_2
x_5	a_{31}	a_{32}	0	0	1	b_3
z	c_1	c_2	0	0	0	0

قيمة الدالة

لدينا هنا $x_3 = b_1$ / $x_4 = b_2$ / $x_5 = b_3$ أما $z = 0$

⟸ انطلاقا من الجدول السابق نقوم بإعداد الجدول التالي

وهذا باختيار المتغيرة التي تدخل الأساس و التي تخرج من الأساس وكذا عنصر الارتكاز

- المتغيرة التي تدخل الأساس يكون لها أكبر معامل في دالة الهدف أي في z (التي تحقق أكبر ناتج) و يسمى العمود الذي تنتمي له بعمود عنصر الارتكاز
- المتغيرة التي تخرج من الأساس، هي المقابلة لأصغر نسبة موجبة ناتجة من تقسيم عمود الثوابت (B) على عمود عنصر الارتكاز يسمى السطر سطر عنصر الارتكاز
- عنصر الارتكاز هو تقاطع عمود و سطر عنصر الارتكاز

Scanné avec CamScanner

بيتم اعداد الجدول

- ← هستبدل المتغيرة اللي هيتخرج من الاساس بالمتغيرة اللي هتدخل الاساس
- ← يجري تحويل لعمود متغير الارتكاز الى عمود أحادي
- ← بيتم تحويل صف متغير الارتكاز بتقسيم جميع عناصره على قيمة متغير الارتكاز
- ← يجري تحويل بقية عناصر الجدول على النحو

a	b
c	d

⇐

1	$\frac{b}{a}$
0	$d-\frac{b\times c}{a}$

أو

d	c
b	a

⇐

$d-\frac{b\times c}{a}$	0
$\frac{b}{a}$	1

- ← هستمر في الحلة حتى تصبح لدينا كل معاملات دالة الهدف سالبة أو معدومة (في السطر الاخير) . وتكون أمام جدول الحل الأمثل
و تكون قيم المتغيرات الداخلة في الاساس هي القيم الجديدة في عمود الثوابت
أما قيمة دالة الهدف فهي القيمة المطلقة لآخر قيمة في عمود الثوابت

Scanné avec CamScanner

مثال

الاستاذ الكلي

$$\text{Max } Z = 100x_1 + 60x_2$$

$$s/c \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 108 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 96 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

الصيغة المعيارية

$$\text{Max } Z = 100x_1 + 60x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s/c \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 = 40 \\ 6x_1 + 9x_2 + x_4 = 108 \\ 8x_1 + 6x_2 + x_5 = 96 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0$$

و نكمل الجدول الأول

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	النسبة
x_3	(8)	2	1	0	0	40	(5) ← اقل نسبة
x_4	6	9	0	1	0	108	18
x_5	8	6	0	0	1	96	12
Z	100	60	0	0	0	0	

① المتغير الذي يدخل الاساس (اكبر)

② اقل نسبة

③ المتغيرة التي تخرج من الاساس

④ عناصر ارتكاز

الجدول الثاني

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	B
X_1	1	1/4	1/8	0	0	5
X_4	0	.	.	.	.	.
X_5	0	.	.	.	.	.
Z	0	.	.	.	.	.

نذهب بالي الخاصية $a - \frac{b \times c}{a}$

تتوم بحسابات السطر الثاني

$$9 - \frac{2 \times 6}{8} = \frac{18-3}{2} = \boxed{\frac{15}{2}}$$

$$0 - \frac{1 \times 6}{8} = \boxed{\frac{-3}{4}}$$

$$1 - \frac{0 \times 6}{8} = \boxed{1}$$

$$0 - \frac{0 \times 4}{4} = \boxed{0}$$

$$108 - \frac{5 \times 6 \times 6}{8} = 108 - 30 = \boxed{78}$$

ثم تتوم بعملة الجدول وننتقل الى السطر الثالث ثم الرابع

$$6 - \frac{2 \times 8}{8} = \boxed{4}$$

$$0 - 1 = \boxed{-1}$$

$$0 - 0 = \boxed{0}$$

$$1 - 0 = \boxed{1}$$

$$96 - 40 = \boxed{56}$$

Scanné avec CamScanner

8

$60 - \frac{2 \times 100}{8} = 60 - 25 = \boxed{35}$

$0 - \frac{1 \times 100}{8} = \boxed{-\frac{25}{2}}$

$0 - \frac{0 \times 100}{8} = \boxed{0}$

$0 - \frac{0 \times 100}{8} = \boxed{0}$

$0 - \frac{40 \times 100}{8} = \boxed{-500}$

العمود الرابع

فيصبح لدينا الجدول 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
x_1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	0	5
x_4	0	$\frac{15}{2}$	$-\frac{3}{4}$	1	0	28
x_5	0	4	-1	0	1	56
Z	0	+35	$-\frac{35}{2}$	0	0	-500

نلاحظ ان $Z = |-500| = 500$

$x_1 = 5$
$x_4 = 28$
$x_5 = 56$

اما البقية تساوي 0

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$ لانها غير موجودة

بالتعويض نلاحظ

$Z = 100(5) + 60(0) = 500$

Scanné avec CamScanner

السؤال : هل توصلنا الى الحل الامثل ؟؟

والجواب هو انه مدام هناك قيم اكبر من الصفر في السطر الاخير (سطر معاملات الدالة) فالحل الامثل لم نتحقق بعد .

نكمل الحلية :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	النسب
x_1	1	1/4	1/4	0	0	5	20
x_4	0	(15/2)	-3/4	1	0	28	(56/15)
x_5	0	4	-1	0	1	36	14
Z	0	35	-25/2	0	0	-500	

① المتغيرة التي تدخل الاساس

② أقل نسبة

③ المتغيرة التي تخرج من الاساس

④ عنصر الارتكاز

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
x_1		0				
x_2	0	1	-1/10	2/15	0	52/5
x_5		0				
Z		0				

$\frac{3}{2} \times \frac{2}{15} = \boxed{\frac{-1}{10}}$

$1 \times \frac{2}{15} = \boxed{\frac{2}{15}}$

$0 \times \frac{2}{15} = 0$

$28 \times \frac{2}{15} = \frac{152}{15} = \boxed{\frac{52}{5}}$

Scanné avec CamScanner

10)

دخيب السطر الاول

$1 - \left[\frac{0 \times \frac{1}{4}}{15/2}\right] = 1$

$\frac{1}{8} - \left[\frac{-\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}}{15/2}\right] = \frac{1}{8} - \left[-\frac{3}{16} \times \frac{2}{15}\right] = \frac{5+1}{8 \times 5} = \frac{6}{40} = \boxed{\frac{3}{20}}$

$0 - \left[\frac{1 \times \frac{1}{4}}{15/2}\right] = \cancel{0} - \left[\frac{1}{4} \times \frac{2}{15}\right] = -\frac{1}{30}$

$0 - \left[\frac{0 \times \frac{1}{4}}{15/2}\right] = \boxed{0}$

$5 - \left[\frac{28 \times \frac{1}{4}}{15/2}\right] = 5 - \left[28 \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{15}\right] = 5 - \left[\frac{28}{30}\right] = \frac{25-13}{5} = \boxed{\frac{12}{5}}$

دخيب السطر الثاني

$0 - [0 \times 4 \times \frac{2}{15}] \neq 0$

$-1 - \left[\frac{-1}{-1} \times 4 \times \frac{2}{15}\right] = -1 - \left[\frac{-2}{5}\right] = \frac{-5+2}{5} = \boxed{\frac{-3}{5}}$

$0 - \left[1 \times 4 \times \frac{2}{15}\right] = \boxed{-\frac{8}{15}}$

$1 - \left[0 \times 4 \times \frac{2}{15}\right] = \boxed{1}$

$56 - \left[\frac{28}{1} \times 4 \times \frac{2}{15}\right] = \frac{280 - 208}{5} = \boxed{\frac{72}{5}}$

دخيب السطر الاخير :

$0 - \left[0 \times 35 \times \frac{2}{15}\right] = 0$

$-\frac{25}{2} - \left[-\frac{1}{2} \times 35 \times \frac{2}{15}\right] = -\frac{25+7}{2} = -\frac{18}{2} = \boxed{-9}$

$0 - \left[1 \times 35 \times \frac{2}{15}\right] = \boxed{-\frac{14}{3}}$

$0 - \left[0 \times 35 \times \frac{2}{15}\right] = \boxed{0}$

$-500 - \left[\frac{26}{1} \times 35 \times \frac{2}{15}\right] = -500 - [26 \times 7 \times 2] = -500 - 364 = \boxed{-864}$

Scanné avec CamScanner

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
x_1	1	0	$3/10$	$-1/30$	0	$12/5$
x_2	0	1	$-1/10$	$2/15$	0	$52/5$
x_5	0	0	$-3/5$	$-4/15$	1	$72/5$
Z	0	0	-9	$-11/3$	0	-864

كل معاملات المتغيرات سالبة، وبالتالي هذا الجدول هو الحل الأمثل

$$x_1 = 12/5 = 2,4$$

$$x_2 = 52/5 = 10,4$$

$$x_5 = 72/5 = 14,4$$

$$Z = 30x_1 + 60x_2 = 30\left(\frac{12}{5}\right) + 60\left(\frac{52}{5}\right)$$

$$= 240 + 624 = \boxed{864}$$

نستنتج أن هذه النتائج تحقق القيدين الأول والثاني تماما

أما القيد الثالث فيحوي طاقة معاطلة قيمتها $x_5 = \boxed{\frac{72}{5} = 14,4}$

ويمكن إثبات ذلك:

$$8\left(\frac{12}{5}\right) + 2\left(\frac{52}{5}\right) = \frac{96 + 104}{5} = \frac{200}{5} = \boxed{40}$$

$$6\left(\frac{12}{5}\right) + 9\left(\frac{52}{5}\right) = \frac{72 + 468}{5} = \frac{540}{5} = \boxed{108}$$

$$8\left(\frac{12}{5}\right) + 6\left(\frac{52}{5}\right) = \frac{96 + 312}{5} = \frac{408}{5} = \boxed{81,6}$$

$$96 - 81,6 = \boxed{14,4}$$

P طاقة غير مستغلة

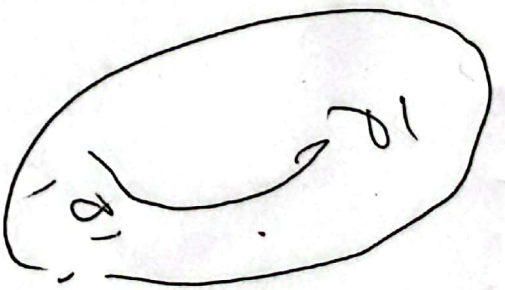
Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} x_1 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_2 + x_5 = 4 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	
x_3	1	0	1	0	0	5	5
x_4	1	2	0	1	0	10	5
x_5	0	1	0	0	1	4	4
	-1	-3	0	0	0	0	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	
x_3	1	0	1	0	0	5	5
x_4	1	0	0	1	-2	2	2
x_2	0	1	0	0	1	4	
	2	0	0	0	3	-12	

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
x_2	0	0	1	-1	2	3
x_1	1	0	0	1	-2	2
x_2	0	1	0	0	1	4
	0	0	0	-1	-1	-14



$x_1 = 2$

$x_2 = 4$

$z = 14$

Scanné avec CamScanner