e : écart
a : artificielle

II الحالة الثانية : إذا كان القيد :

(الغالب حالة الشدة) $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n \geq b$

لتحويل القيد الى الشكل المعتاد نطرح متغيرة الفجوة أو متغير الفجوة

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n - x^e_{n+1} = b$$

نلاحظ أن متغير معامل الفجوة يأخذ إشارة سالبة ، ومنه لا يتيح لنا الحصول على معفوة أمامية ، لذا لا يمكن الاستعانة بمتغيرات إصطناعية x^a.

يتوجب أن تكون قيمتها معدومة .

← كما ينبغي إجراء تغيير على دالة الهدف.

← فتضاف إليها متغيرات الفجوة بمعاملات صفرية

← أما المتغيرات الاصطناعية بمعاملات يفترض أن تكون كبيرة جدا - (Min حالة + ↔ BigM حتى Max ~ -) .

مثال

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 15x_2$$

$$\text{S/c} \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 8x_1 + 16x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

لإيجاد الصيغة القانونية و معفوة الحل الأساسي الأول نجري التحويلات التالية على البيانات :

Scanné avec CamScanner

القيد الأول : $7x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a = 14$

القيد الثاني : $8x_1 + 16x_2 + x_5^e = 16$

القيد الثالث : $2x_1 + 5x_2 - x_6^e + x_7^a = 10$

دالة الهدف : Max Z (تكون بالثابت M)

$$Max\, z = 20x_1 + 15x_2 + 0x_3^e - Mx_4^a + 0x_5^e + 0x_6^e - Mx_7^a$$

أو نكتب

$$Max\, z = 20x_1 + 15x_2 - Mx_4^a - Mx_7^a$$

نكتب قيم x_4^a ، x_7^a من القيود (القيد الأول ، الثالث) .

$$x_4^a = 14 - 7x_1 - 2x_2 + x_3^e$$

$$x_7^a = 10 - 2x_1 - 5x_2 + x_6^e$$

بالتعويض في دالة الهدف :

$$Max\, z = 20x_1 + 15x_2 - M(14 - 7x_1 - 2x_2 + x_3^e) - M(10 - 2x_1 - 5x_2 + x_6^e)$$

$$= 20x_1 + 15x_2 - 14M + 7Mx_1 + 2Mx_2 - Mx_3^e - 10M + 2Mx_1 + 5Mx_2 - Mx_6^e$$

$$= (20 + 9M)x_1 + (15 + 7M)x_2 - Mx_3^e - Mx_6^e - 24M$$

نعلم مصفوفة الحل الأساسي الأول للبرنامج

x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^e	x_7^a
7	2	-1	1	0	0	0
8	16	0	0	1	0	0
2	5	0	0	0	-1	1

نلاحظ من هذه المصفوفة عدد من الأعمدة يشكل لنا مصفوفة أحادية (الأعمدة 4 ، 5 ، 7) ، وهو ما يكون التحويلات التي قمنا بإجرائها.

Scanné avec CamScanner

إيجاد الحل حالة (Min) والقيد ≥

1 ← نبحث عن الصيغة النموذجية (نستعمل x^a، x^e)

2 ← نعد جدول الحل الأساسي الأول.

- تكون متغيرات الفجوة كمتغيرات أساس في حالة إذا كان معاملها +1 أو المتغير الاصطناعي هي متغيرات الأساس، وفي الحالة الأولى معادمة.

أما المتغيرات الحقيقية هي متغيرات خارج الأساس

- وتكون دالة الهدف معدومة

- وينبغي إجراء تحويلات لإخراج المتغيرات الاصطناعية.

$$\text{Min } z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\text{S/c} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ومنه الصيغة النموذجية

على القيود

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - x_3^e + x_4^a = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - x_5^e + x_6^a = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - x_7^e + x_8^a = b_3 \qquad x_j \geq 0 \quad ; \quad 0 \to 8$$

على دالة الهدف

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + 0x_3^e + M x_4^a + 0x_5^e + M x_6^a + 0x_7^e + M x_8^a$$

M معامل المتغير الاصطناعي يأخذ قيمة كبيرة جدا بإشارة + ، وحتى تكون أول المتغيرات التي تخرج من الأساس، كون تصغير الدالة يتطلب اخراج المتغير ذا المعامل الأكبر

Scanné avec CamScanner

نستخرج قيم x^a بداية القيود 2

$$x_4^a = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + x_3^e$$
$$x_6^a = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + x_5^e$$
$$x_8^a = b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + x_7^e$$

نعوض في Z

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + M x_4^a + M x_6^a + M x_8^a$$
$$= c_1x_1 + c_2x_2 + M(b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + x_3^e)$$
$$+ M(b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + x_5^e)$$
$$+ M(b_3 - a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_7^e)$$
$$= c_1x_1 + c_2x_2 + b_1M - a_{11}Mx_1 - a_{12}Mx_2 + Mx_3^e$$
$$+ b_2M - a_{21}Mx_1 - a_{22}Mx_2 + Mx_5^e$$
$$+ b_3M - a_{31}Mx_1 - a_{32}Mx_2 + Mx_7^e$$
$$= [c_1 - (a_{11}+a_{21}+a_{31})M]x_1 + [c_2 - (a_{12}+a_{22}+a_{32})M]x_2$$
$$+ Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e + (b_1+b_2+b_3)M$$

نجعل Z تساوي الصفر

$$[c_1 - (a_{11}+a_{21}+a_{31})M]x_1 + [c_2 - (a_{12}+a_{22}+a_{32})M]x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e$$
$$= -(b_1+b_2+b_3)M$$

Scanné avec CamScanner

نقوم بإعداد الجدول

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_4^a	a_{11}	a_{12}	-1	1	0	0	0	0	b_1
x_6^a	a_{21}	a_{22}	0	0	-1	1	0	0	b_2
x_8^a	a_{31}	a_{32}	0	0	0	0	-1	1	b_3.
	$c_1-(a_{11}+a_{21}+a_{31})M$	$c_2-(a_{12}+a_{22}+a_{32})M$	M	0	M	0	M	0	$-(b_1+b_2+b_3)$

نلاحظ أن المتغيرات الاصطناعية إجبارياً داخل الأساس لأنها تشكل المصفوفة الأحادية الواجب توفرها في الجدول.

3 ← نحضر الجدول الموالي:

نقوم باختيار المتغيرة التي تدخل الأساس والتي تخرج من الأساس وكذا عنصر الارتكاز

← المتغيرة التي تدخل الأساس هي التي لها أضخم معامل سالب في الدالة

← المتغيرة التي تخرج من الأساس هي المقابلة لأضخم نسبة موجبة (عمود الثوابت / عمود الارتكاز)

← عنصر الارتكاز هو تقاطع العمود مع السطر.

4 ← إعداد الجدول:

- كما أعددنا الجدول في حالة Max

العمود ← أحادي.

السطر: ~~الأحادي~~ تقسيم على عنصر الارتكاز.

الباقي: $a - \frac{b \times c}{a}$ | $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$

5 ← نستمر في الحلول حتى تصير كل معاملات الدالة موجبة أو معدومة

Scanné avec CamScanner

مثال

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 30x_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \geqslant 0 \quad x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

1- إيجاد الصيغة النموذجية.

فتصبح القيود كالتالي

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3^e + x_4^a = 6 \\ 6x_1 + x_2 - x_5^e + x_6^a = 6 \\ x_2 - x_7^e + x_8^a = 2. \end{cases}$$

كما تصبح دالة الهدف

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 30x_2 + M x_4^a + M x_6^a + M x_8^a$$

نستخرج قيم x^a من القيود:

$$x_4^a = 6 - 3x_1 - 2x_2 + x_3^e$$

$$x_6^a = 6 - 6x_1 - x_2 + x_5^e$$

$$x_8^a = 2 - x_2 + x_7^e$$

نعوض في Z

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 30x_2 + M(6 - 3x_1 - 2x_2 + x_3^e) + M(6 - 6x_1 - x_2 + x_5^e) + M(2 - x_2 + x_7^e)$$

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 30x_2 + 6M - 3Mx_1 - 2Mx_2 + Mx_3^e + 6M - 6Mx_1 - Mx_2 + Mx_5^e + 2M - Mx_2 + Mx_7^e$$

$$\text{Min } Z = (10 - 9M)x_1 + (30 - 4M)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e + 14M$$

نضع $Z = 0$

$$(10 - 9M)x_1 + (30 - 4M)x_2 + Mx_3^e + Mx_5^e + Mx_7^e = -14M$$

Scanné avec CamScanner

وعليه يصبح الجدول الأول

		x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B	
	x_4^a	3	2	-1	1	0	0	0	0	6	2
② →	x_6^a	(6)	1	0	0	-1	1	0	0	6	1
	x_8^a	0	1	0	0	0	0	-1	1	2	2
	Z	10-9M	30-4M	M	0	M	0	M	0	-14M	
		↑ ①									

Min عمود الارتكاز يتبادل أقل قيمة (حاسب Max).

ومنه نجد الجدول الثاني

		x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B	
② →	x_4^a	0	(3/2)	-1	1	1/2	/	0	0	3	2
	x_1	1	1/6	0	0	-1/6	/	0	0	1	6
	x_8^a	0	1	0	0	0	/	-1	1	2	2
	Z	0	$\frac{170-15M}{6}$	M	0	$\frac{10-3M}{6}$	/	M	0	-10-5M	
			↑ ①			↑ عمود الارتكاز (لكي تكون ثانية)					

بما أن معاملات Z ليست كلها موجبة نجد جدول آخر الثالث

		x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B	
	x_2	0	1	-2/3	/	1/3	/	0	0	2	
	x_1	1	0	1/9	/	-2/9	/	0	0	2/3	
② →	x_8^a	0	0	(2/3)	/	-1/3	/	-1	1	0	
	Z	0	0	$\frac{+170-6M}{9}$	/	$\frac{-70+3M}{9}$	/	M	0	-200/3	
				↑ ①	عمود الارتكاز						

Scanné avec CamScanner

أيضاً لدينا كل معاملات Z موجبة نجد الجدول الرابع

	x_1	x_2	x_3^e	x_4^a	x_5^e	x_6^a	x_7^e	x_8^a	B
x_2	0	1	0	/	0	/	-1	/	2
x_1	1	0	0	/	$-1/6$	/	$1/6$	/	$2/3$
x_3^e	0	0	1	/	$-1/2$	/	$-3/2$	/	0
Z	0	0	0	/	$5/3$	/	$85/3$	/	$-200/3$

العنصر المحوري

بما أن كل عناصر السطر الأخير موجبة ، فقد وصلنا على الحل الأمثل.

$$x_1 = 2/3$$

$$x_2 = 2$$

$$Z = 200/3$$

نعوض في Z

$$Z = 10(2/3) + 20(2) = \frac{20 + 180}{3} = \boxed{\frac{200}{3}}$$

نعوض في القيد :

$3(2/3) + 2(2) = 6$ محقق تماماً

$2(6(2/3)) + 2 = 6$ محقق تماماً

$(2) = 2$ محقق تماماً

Scanné avec CamScanner

الحالات الخاصة في Simplex

الحالة	بيانيا	Simplex
تعدد الحلول	Z يلمس على الأقل نقطتين في نفس الوقت	X^2 غير أساسي. معامله 0 في سطر Z للجدول الأخير
لا حدود لنمو في الحل	مجال مفتوح	لا يمكن اختيار سطر ارتكاز (∞ أو -)
لا يوجد حل	منطقة جميع المناطق	X^9 ضمن المتغيرات الأساسية
الحلال	اقتراب أكثر من هدفين في نقطة الحل	تساوي الاختيار عند اختيار عمود أو سطر الارتكاز

Scanné avec CamScanner