II.7 Passage de la table de vérité à la forme algébrique

Pour représenter une fonction sous forme algébrique à partir de sa table de vérité, on suit les étapes suivantes :

- On considère dans la table de vérité que les combinaisons de variables pour lesquelles la fonction vaut 1.
- Dans la combinaison, on remplace les 1 par les variables et les 0 par leurs compléments. Ainsi, chaque combinaison va correspondre au produit logique de ses variables ou de leurs compléments.
- La fonction sera la somme logique de tous les produits logiques déjà trouvés en 2.

Exemple 1

Soi la fonction f représentée par la table de vérité suivante :

a	*b*	*f(a,b)*		*Terme algébrique*
0	0	1	On remplace le 1er 0 par $\overline{a}$ et le 2^{éme} 0 par $\overline{b}$	$\overline{a}.\overline{b}$
0	1	1	On remplace le 0 par $\overline{a}$ et le 1 par b	$\overline{a}.b$
1	0	0		
1	1	1	On remplace le 1er 1 par a et le 2^{éme} 1 par b	a.b

Ainsi, on obtient la fonction $f(a,b) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}b + ab$

Exemple 2

Soi la fonction f représentée par la table de vérité suivante :

a	*b*	*c*	*f*(*a*,*b*,*c*)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

En suivant les mêmes directives, on peut représenter la fonction correspondante par :

$$f(a,b,c) = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c} + \overline{a}.b.c + a.\overline{b}.c$$

Simplification des fonctions logiques

II.8 Introduction

Simplifier une fonction logique revient à réduire le nombre de ses termes ou le nombre de variable dans un même terme. L'intérêt de simplifier une fonction logique apparaît dans la réalisation du circuit correspondant puisque cela réduit le nombre de portes logiques utilisées pour sa réalisation. Il existe plusieurs méthodes de simplification. Dans ce chapitre, on va étudier deux :

- Méthode algébrique ;
- Méthode de Karnaugh.

II.9 Méthode algébrique

Elle consiste à utiliser les propriétés de l'algèbre de Boole.

Exemple

Soit la fonction $f(a,b,c,d) = a.b + \overline{a}.c + b.c$

$$a.b + \overline{a}.c + b.c = a.b + \overline{a}.c + b.c.1$$

$$= a.b + \overline{a}.c + b.c.(a + \overline{a}) \text{ Parce que on } 1 = a + \overline{a}$$

$$= a.b + \overline{a}.c + b.c.a + b.c.\overline{a}$$

$$= a.b(1 + c) + \overline{a}.c(1 + b)$$

$$= a.b + \overline{a}.c \text{ Parce que on } 1 + c = 1 \text{ et } 1 + b = 1$$

Ou encore :

$$a.b + \overline{a}.c + b.c = a.b + (\overline{a} + b).c$$
$$= a.b + (\overline{a} + a.b).c$$
$$= a.b + \overline{a}.c + a.b.c$$
$$= a.b(1 + c) + \overline{a}.c$$
$$= a.b + \overline{a}.c$$

Donc $f(a,b,c,d) = a.b + \overline{a}.c$

II.10 Méthode de simplification par la table de Karnaugh

Une table de Karnaugh est une grille comportant un nombre de cases vide égale au nombre de combinaisons des variable de la fonction logique qu'on veut simplifier.
Pour une fonction à une variable, la table comprendra une seul case qui peut prendre la valeur 0 ou 1.

- **Table de Karnaugh pour une fonction à deux variables**

Dans ce cas, la table de Karnaugh sera constituée de 2^2=4 cases.

Dans la première colonne on met les valeurs possibles pour la variable « a », et dans la première ligne, les valeurs possibles pour la variable « b ».

a\b	**0**	**1**
0	$\overline{a}.\overline{b}$	$\overline{a}.b$
1	$a.\overline{b}$	$a.b$

Pour simplifier une fonction logique par la méthode de Karnaugh, on doit suivre les étapes suivantes:

- Remplir les cases de la table avec des 1 : pour chaque terme de la fonction, on met un 1 dans la case lui correspondant dans la table. Dans cette table, les cases d'une même ligne sont adjacentes ainsi que les cases d'une même colonne.

- Encercler tout ensemble de cases occupées par des 1 adjacentes sur la même ligne ou sur la même colonne. Une case peut être encerclée deux fois. Si un 1 est isolé, on l'encercle tout seul.
- Dans un groupe de 1, si une variable change de valeur, on l'élimine, sinon, on la garde.
- La fonction simplifiée est la somme logique de tous les termes ainsi réduits.

Exemple

Soit la fonction $f(a,b) = \overline{a}.b + a.\overline{b} + a.b$

Par la méthode algébrique on peut procéder comme suit :

$$\begin{aligned} f(a,b) &= \overline{a}.b + a.\overline{b} + a.b \\ &= \overline{a}.b + a.\overline{b} + a.b + a.b \\ &= b(\overline{a} + a) + a(\overline{b} + b) \\ &= a + b \end{aligned}$$

On va appliquer maintenant les règles de la méthode de Karnaugh sur cette fonction. On remarque qu'on a deux groupes adjacents de 1 :

a\b	**0**	**1**
0	0	1
1	1	1

Pour simplifier, on va considérer ces deux groupes séparément :

- Dans le premier groupe, la variable « *b* » est fixe, alors que la variable « *a* » change de valeur. Donc, on élimine « *a* » et le terme réduit est « *b* ».

- Dans le deuxième groupe, la variable « *a* » est fixe, alors que la variable « *b* » change de valeur. Donc, on élimine « *b* » et le terme réduit est « *a* ».

Enfin, on obtient la fonction simplifiée qui est la somme logique des termes réduits $f(a,b) = a + b$

- **Table de Karnaugh pour une fonction à trois variables**

Pour une fonction a trois variables, il y a 2^3 combinaisons donc 8 cases.

a\bc	**00**	**01**	**11**	**10**
0	$\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$	$\overline{a}.\overline{b}.c$	$\overline{a}.b.c$	$\overline{a}.b.\overline{c}$
1	$a.\overline{b}.\overline{c}$	$a.\overline{b}.c$	$a.b.c$	$a.b.\overline{c}$

Remarques

- On constate que pour passer d'une combinaison à une autre, un seul bit change de valeur (code de Gray).
- Il faut considérer cette table enroulée à autour d'un cylindre. Ainsi, la case $\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$ et la case $\overline{a}.b.\overline{c}$ sont adjacentes et les cases $a.\overline{b}.\overline{c}$ et $a.b.\overline{c}$ sont aussi.

Pour simplifier une fonction à trois variables, on procède comme suit :

- Encercler les 1 adjacents. Le nombre de 1 dans un même groupe doit être une puissance de 2 (1,2,4 ou 8…).
- Si le nombre des cases encerclées dans un groupe est égale à 2, alors une seule variable sera éliminée et le terme réduit sera forme de deux variables restantes.
- Si le nombre des cases encerclées dans un groupe est égale à 4, alors 2 variables sera éliminées et le terme réduit sera formé d'une seule variable.

Exemple

On va simplifier la fonction suivante :

$$f(a,b,c) = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c} + a.\overline{b}.c + \overline{a}.b.\overline{c} + a.b.\overline{c} + a.b.c$$

Le regroupement des 1 adjacents dans la table de Karnaugh correspondante donne 3 groupes comme suivants :

Gr 1

GR 3

$a\backslash bc$	**00**	**01**	**11**	**10**
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1

- Pour le premier groupe, le terme réduit et $\overline{a}.\overline{c}$
- Pour le deuxième groupe, le terme réduit et $a.c$
- Pour le troisième groupe, le terme réduit et $b.\overline{c}$

Donc la fonction simplifiée est $f(a,b,c) = \overline{a}.\overline{c} + a.c + b.\overline{c}$

- **Table de Karnaugh pour une fonction à quatre variables**

Pour une fonction à quatre variables, la table de Karnaugh sera constituée de 2^4=16 cases comme suite :

$ab\backslash cd$	**00**	**01**	**11**	**10**
00	$\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d}$	$\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.d$	$\overline{a}.\overline{b}.c.d$	$\overline{a}.\overline{b}.c.\overline{d}$
01	$\overline{a}.b.\overline{c}.\overline{d}$	$\overline{a}.b.\overline{c}.d$	$\overline{a}.b.c.d$	$\overline{a}.b.c.\overline{d}$
11	$a.b.\overline{c}.\overline{d}$	$a.b.\overline{c}.d$	$a.b.c.d$	$a.b.c.\overline{d}$
10	$a.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d}$	$a.\overline{b}.\overline{c}.d$	$a.\overline{b}.c.d$	$a.\overline{b}.c.\overline{d}$

Remarque

Cette table est enroulée, horizontalement autour d'un cylindre. Ainsi, les cases de la première colonne sont adjacentes aux celles de la quatrième.

De même, elle peut être enroulée verticalement. Ainsi les cases de la première ligne sont adjacentes aux celles de la quatrième.

Exemple : Soit la fonction

$$f(a,b,c,d) = \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.d + \overline{a}.\overline{b}.c.d + \overline{a}.b.\overline{c}.d + \overline{a}.b.c.\overline{d} + \overline{a}.b.c.d$$
$$+ a.b.\overline{c}.d + a.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d} + a.\overline{b}.c.d + a.\overline{b}.\overline{c}.d + a.b.c.d$$

A partir de la table **de Karnaugh** correspondant à cette fonction, le regroupement des 1 adjacents donne 3 groupes comme suivants :

$ab\backslash cd$	**00**	**01**	**11**	**10**
00	1	1	1	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	1	1	1	0

Pour le premier groupe, le terme réduit et $\overline{a}.b.c$

Pour le deuxième groupe, le terme réduit et $\overline{b}.\overline{c}$

Pour le troisième groupe, le terme réduit et d

Donc la fonction simplifiée est $f(a,b,c,d) = \overline{a}.b.c + \overline{b}.\overline{c} + d$

Remarques

a- Le nombre de 1 formant un groupe détermine le nombre de variable que contenir le terme réduit :

- Un groupe forme de huit 1 permet correspond à un terme réduit à une seule variable ;
- Un groupe forme de quatre 1 permet correspond à un terme réduit à deux variables ;
- Un groupe forme de deux 1 permet correspond à un terme réduit à trois variables.

b- Dans une table à quatre variables, les quatre coins sont des cases adjacentes :
Soit la fonction

$$f(a,b,c,d)=\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d}+a.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d}+\overline{a}.\overline{b}.c.\overline{d}+a.\overline{b}.c.\overline{d}$$

La table de Karnaugh correspondant à cette fonction est la suivante :

ab\cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

La fonction simplifiée est $f(a,b,c,d)=\overline{b}.\overline{d}$

- **Cas particulier : les fonctions incomplètement définies**

Une fonction logique est incomplètement définie quand sa valeur est indifférente ou non spécifiée pour certaines combinaisons de ses variables.

Exemple
Soit la fonction $f(a,b,c,d)$ dont la table de vérité est la suivante :
Les cases où la valeur de la fonction n'est pas précisées sont appelées cas indéterminées.
Dans la table de Karnaugh, elles peuvent être considérées comme des 0 ou des 1, selon qui arrange la simplification.
La table de Karnaugh correspondant à cette fonction est la suivante:

ab\cd	00	01	11	10
00	1	1	1	x
01	1	x		
11	x	x		
10	1	1		

La fonction simplifiée est donc $f(a,b,c,d)=\overline{a}.\overline{b}+\overline{c}$

a	b	c	d	f(a,b,c,d)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	x
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	x
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

II.11 Les formes canoniques : les formes qui permettant de localiser chaque case d'une table de Karnaugh comportant un 1 ou un 0 ou chaque ligne d'une table de vérité comportant un 1 ou un 0 sont appelées formes canoniques.
Les formes canoniques sont en générale simplifiables et chaque terme de ces formes canonique doit contenir toutes les variables.
On distingue quatre formes canoniques.

- La première formes canonique est une somme de produits à implantation par des portes ET reliées à une portes OU.
  1. A chaque 1 de la variable de sortie, faire correspondre un produit des n variables d'entrée (dans TV ou TK).
  2. Chaque terme de produit doit contenir toutes les variables d'entrée.
  3. L'expression obtenue est généralement simplifiable.

Exemple

Soit la fonction suivante : $f_1(x,y,z) = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + xyz$

$$f_2(x,y) = xy + \bar{y} = xy + \bar{x}\bar{y} + x\bar{y}$$

- La deuxième forme canonique est un produit de sommes à implantation par des portes OU reliées à des portes ET.
  1. A chaque 0 de la variable de sortie, faire correspondre une somme des n variables d'entrée (dans TV ou TK).
  2. Sous la forme normale (variable lui-même) lorsque la variable d'entrée est égale à 0, sous la forme complément si la variable d'entrée est égale à 1.
  3. Chaque terme de somme doit contenir toutes les variables d'entrée.
  4. L'expression obtenue est généralement simplifiable.

Exemple

Donner la première forme canonique des fonctions suivantes :

a \ b	0	1
0	0	1
1	1	1

F1

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

F2

$F1 = a + b$

$F2 = (a+b+c)(\bar{a}+b+c)(a+\bar{b}+c)(\bar{a}+\bar{b}+c) = c$

- La troisième est la forme NON-ET (NAND) : on la déduit de la première forme canonique, elle conduit à des diagrammes logiques n'utilisant que des portes NAND.

$$f_1(x,y,z) = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + xyz$$

$$\overline{\overline{f}} = \overline{\overline{x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + xyz}}$$

$$= \overline{\overline{x\bar{y}\bar{z}} * \overline{\bar{x}y\bar{z}} * \overline{\bar{x}\bar{y}z} * \overline{xyz}}$$

C'est la troisième forme canonique.

- Et la quatrième est la forme NON-OU (NOR) : à partir de la deuxième forme canonique, on obtient la quatrième forme canonique.

Exemple

$$F2 = (a+b+c)(\bar{a}+b+c)(a+\bar{b}+c)(\bar{a}+\bar{b}+c)$$

$$\overline{\overline{F2}} = \overline{\overline{(a+b+c)(\bar{a}+b+c)(a+\bar{b}+c)(\bar{a}+\bar{b}+c)}}$$

$$= \overline{\overline{(a+b+c)} + \overline{(\bar{a}+b+c)} + \overline{(a+\bar{b}+c)} + \overline{(\bar{a}+\bar{b}+c)}}$$

Ces deux dernières formes sont implantées par un seul type de porte.

Mintermes et maxtermes.

Une variable binaire peut apparaître soit sous sa forme normale (a), soit sous sa forme complémentaire ($\bar{a}$). Considérons maintenant deux variables a et b combinées avec une opération *ET*. Comme chaque variable peut apparaître dans l'une ou l'autre forme, il existe quatre combinaisons possibles: $\bar{a}\bar{b}$, $\bar{a}b$, $a\bar{b}$, $et\ ab$.

Chacun de ces quatre termes *ET* est appelé un **minterme**, ou un produit standard. De manière similaire, n variables peuvent être combinées pour former 2^n mintermes. Le 2^n minterme différent peut être déterminé par une méthode similaire à celle montrée dans le tableau ci-dessous pour trois variables. Chaque minterme est obtenue à partir d'un terme *ET* des n variables, chaque variable étant complémentée si le bit correspondant du nombre binaire est un 0 et non complémentée si un 1. Un symbole pour chaque minterme est également montré dans le tableau ci-dessous et est de la forme m_j, où j désigne l'équivalent décimal du nombre binaire du minterme désigné.

De la même manière, n variables formant un terme *OR*, avec chaque variable étant complémentée ou non, fournissent 2^n combinaisons possibles, appelées **maxtermes**, ou sommes standard. Chaque maxterme est obtenu à partir d'un terme OR des n variables, chaque variable étant non complémentée si le bit correspondant est un 0 et complémentée si un 1. Notez que chaque maxterme est le complément de son minterme correspondant, et vice versa.

Variables			Mintermes		Maxtermes	
a	b	c	Terme	Désignation	Terme	Désignation
0	0	0	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	m_0	$a+b+c$	M_0
0	0	1	$\bar{a}\bar{b}c$	m_1	$a+b+\bar{c}$	M_1
0	1	0	$\bar{a}b\bar{c}$	m_2	$a+\bar{b}+c$	M_2
0	1	1	$\bar{a}bc$	m_3	$a+\bar{b}+\bar{c}$	M_3
1	0	0	$a\bar{b}\bar{c}$	m_4	$\bar{a}+b+c$	M_4
1	0	1	$a\bar{b}c$	m_5	$\bar{a}+B+\bar{c}$	M_5
1	1	0	$ab\bar{c}$	m_6	$\bar{a}+\bar{b}+c$	M_6
1	1	1	abc	m_7	$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$	M_7

La simplification par tableau de Karnaugh se fait de la manière suivante (pour la forme disjonctive) (par 1) :

- Remplir les cases du tableau par les 0 ou 1 selon l'état de sortie de la fonction.
- Faire des regroupements des cas contenants "1" adjacent par puissance de 2 (2, 4,8, 16, 32 ...)
- Chaque "1" doit appartenir à un ou à plusieurs regroupements.
- Simplification d'une variable se fait lorsqu'on change d'état au passage d'une colonne à une autre ou d'une ligne à une autre.
- La valeur d'un regroupement correspond enfin à la ou les variables qui restent inchangées.

Il faut avoir le plus grand nombre de "1" possible pour que la simplification soit optimale.

Chaque terme (groupe) représente une multiplication de variables inchangées, et la fonction égale la somme de ces termes.

La simplification par tableau de Karnaugh se fait de la manière suivante (pour la forme conjonctive) (par 0) :

- Remplir les cases du tableau par les 0 ou 1 selon l'état de sortie de la fonction.
- Faire des regroupements des cas contenants "0" adjacent par puissance de 2 (2, 4,8, 16, 32 ...)
- Chaque "0" doit appartenir à un ou à plusieurs regroupements.

- Simplification d'une variable se fait lorsqu'on change d'état au passage d'une colonne à une autre ou d'une ligne à une autre.
- La valeur d'un regroupement correspond enfin à la ou les variables qui restent inchangées.

Il faut avoir le plus grand nombre de "0" possible pour que la simplification soit optimale.

Chaque terme (groupe) représente une addition de variables inchangées, et la fonction égale la multiplication de ces termes.

Exemple 1: soit la fonction f_1 donné par $f_1(x,y,z) = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + xyz$ la fonction f_1 peut écrire comme suit (forme minterme) : $f_1(x,y,z) = m_4 + m_2 + m_1 + m_7 = \sum(4,2,1,7)$.

Exemple 2: soit la fonction f_2 donné par $f2 = (a+b+c)(\bar{a}+b+c)(a+\bar{b}+c)(\bar{a}+\bar{b}+c)$ la fonction f_2 peut écrire comme suit (forme maxterme) : $f_2(a,b,c) = M_0 + M_4 + M_2 + M_6 = \prod(0,4,2,6)$.

RQ : $f_1(x,y,z) = m_4 + m_2 + m_1 + m_7 = \sum(4,2,1,7) = \prod(0,3,5,6)$

$f_2(a,b,c) = M_0 + M_4 + M_2 + M_6 = \prod(0,4,2,6) = \sum(1,3,5,7)$

Exemple 3 : soit $f3(a,b,c) = a + \bar{b}c$ donner la forme minterme et maxterme.

$$f3(a,b,c) = a(b+\bar{b})(c+\bar{c}) + (a+\bar{a})\bar{b}c = abc + ab\bar{c} + a\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c = \sum(7,6,5,4,1) = \prod(0,2,3)$$