**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université Ziane Achour de Djelfa**

**Faculté de Sciences Exactes et Informatique**

**Département des Mathématiques et Informatique**

**Cours**

# Probabilités

**Par : Mohammed BENATALLAH**



**(Octobre 2019)**

**CHAPITRE 1**

# Analyse Combinatoire

L'analyse combinatoire regroupe les méthodes qui servent en mathématiques à effectuer un dénombrement c'est à dire à compter, parmi un ensemble $n_i$ donné, ceux de ses éléments qui vérifient une propriété donnée. Il s'agit donc de déterminer le cardinal d'un sous ensemble bien dé $n_i$.

Le but de l'analyse combinatoire est d'apprendre à compter le nombre d'éléments d'un ensemble de cardinal $n_i$. Il permet aussi de compter le nombre de résultats possibles d'une experience.

**Définition 1.1.** *Si un ensemble $E$ est fini et contient $n$ éléments, alors le nombre $n$ est appelé le cardinal de $E$. On note $Card(E) = n$ et $Card(\emptyset) = 0$.*

## 1.1 Permutation:

Une permutation est un rangement ordonné de $n$ éléments distinguables. C'est également une bijection d'un ensemble de $n$ éléments vers lui même.

### 1.1.1 Permutations sans répétitions:

Le nombre de permutations de $n$ éléments distincts est égal à $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$. C'est aussi le nombre de bijections d'un ensemble de $n$ éléments vers lui même.

**Exemple 1.2.**

1. *Les permutations possibles des lettres $A, B$ et $C$ sont : $ABC$, $ACB$, $BAC$, $BCA$, $CAB$, $CBA$. soit $1 \times 2 \times 3 = 6$ permutations.*

### 1.1.2 Permutations avec répétitions

Le nombre de permutations de $n$ éléments comprenant $n_1, n_2, ..., n_r$ éléments identiques ou indiscernables est égal à

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_r!} \text{ avec } \sum_{i=1}^{r} n_i = n$$

**Exemple 1.3.**

1. Combien de mots peut-on former avec les lettres du mots

    1. papa

    2. arranger

    le nombre de mots former avec la lettre "papa" est

    $$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

    le nombre de mots former avec la lettre "arranger" est

    $$\frac{8!}{2! \times 3! \times 1! \times 1! \times 1!} = 3360$$

## 1.2 Arrangement

### 1.2.1 Arrangements avec répétition

Un échantillon ordonné avec répétitions de longueur $p$ d'éléments de $\Omega$ est une suite ordonnée de $p$ éléments de non nécessairement distincts $(p \leq n)$. Le nombre d'échantillons ordonné avec répétitions de longueur $p$ sur $\Omega$ est :

$$n^p = Card(\Omega)^p$$

**Exemple 1.4.**

1. *Combien de sigles de trois lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet ?*

    *La taille de $\Omega$ est égale à $Card\,(\Omega) = 26$ et $p = 3$. Donc il y a $26^3 = 17576$.*

### 1.2.2 Arrangements sans répétition

Un échantillon ordonné sans répétitions de longueur $p$ d'éléments de $\Omega$ est une suite ordonnée de $p$ éléments, dont tous les éléments sont différents. $(p \leq n)$. Le nombre d'échantillons ordonné sans répétitions ou le nombre d'arrangements de $p$ éléments parmi $n$ de $\Omega$ est :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leq n$$

**Remarque 1.5.** *Quand $p = n$. On retrouve le nombre de permutations (sans répétition) de $n$ objets distincts $n!$.*

**Exemple 1.6.**

1. *Les arrangements de 2 éléments pris dans $\{a, b, c, d\}$ sont $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, a\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, a\}$, $\{c, b\}$, $\{c, d\}$, $\{d, a\}$, $\{d, b\}$, $\{d, c\}$*

   *IL en a*

   $$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 4 \times 3 = 12$$

## 1.3 Combinaison

### 1.3.1 Combinaison sans répétition

Un échantillon non ordonné sans répétitions de taille $p$ sur $\Omega$ est tout simplement un sous ensemble de $p$ éléments de $(p \leq n)$. Le nombre de sous-ensembles de taille $p$ de $\Omega$ ou le nombre de combinaisons de $p$ éléments parmi $n$ de $\Omega$ est :

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} \text{ si } p \leq n$$

**Remarque 1.7.** *On a nécessairement $1 \leq p \leq n$ et $n, p \in \mathbb{N}^*$. Si $n < p$, alors*

$$C_n^p = 0$$

**Exemple 1.8.** *Un sac contient 10 boules ( 6 blanche, 4 noire ) on en tire 3 boules*

1. *Nombre de tirage possibles.*

   *Il y a $C_{10}^3$ nombre de tirages possibles donc il ya $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \times (10-3)!} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$ façons.*

### 1.3.2 Combinaison avec répétition

Une combinaison avec répétition de $p$ éléments parmi n éléments discernables est une dispositions non ordonné de ces $p$ éléments avec répétition éventuelle d'un ou plusieurs éléments. Le nombre de combinaisons avec répétition est

$$C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

**Exemple 1.9.**

1. Soit la constitution de mots de 3 lettres à partir d'un alphabet à 5 lettres avec remise,

   Il y a $C_{n+p-1}^{p} = C_{5+3-1}^{3} = C_{7}^{3} = 35$ avec $n = 5$ et $p = 3$ mots possibles de 3 lettres à partir d'un alphabet à 5 lettres.

## 1.4 Propriétés des combinaisons

### 1.4.1 La symétrie

Le nombre de combinaisons de $p$ objets pris parmi $n$ étant

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-1)!} = C_n^{n-p}$$

Il revient au même de donner la combinaison des $p$ objets choisis ou bien celle des $(n-p)$ qui ne le sont pas.

### 1.4.2 Formule de Pascal

Si $0 \leq p \leq n-1$,

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$$

### 1.4.3 Formule du binôme de Newton

La formule du binôme de Newton correspond à la décomposition des différents termes de la puissance $n^{ième}$ du binôme $(a+b)$.

$\nabla(a, b) \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p b^p a^{n-p}$$

**CHAPITRE 2**

# Probabilités

## 2.1 Concepts de base des probabilités

### 2.1.1 Épreuve

**Définition 2.1.** *On dit qu'une expérience ou une épreuve est une experience aléatoire s'elle est répété dans les mêmes conditions conduit à des résultats différents, donc dans une expérience aléatoire, on ne sait pas d'avance le résultat.*

**Exemple 2.2.**

1. *Soit l'épreuve "lancer une pièce de monnaie trois fois dans l'air". On peut obtenir soit pile, soit face pour le premier cas, puis, soit pile, soit face pour le deuxième lancer, etc...*

2. *"Tirage d'une carte d'un jeu de 52 cartes"*

### 2.1.2 Ensemble $\Omega$ des éventualités. Événements

**Définition 2.3.** *Considérons une expérience aléatoire. L'ensemble des éventualités associé à cette épreuve est l'ensemble des résultats possibles. On note cette ensemble* $\Omega$

**Exemple 2.4.**

1. *Considérons le jeu de la pièce lancée trois fois. Dans ce cas:*

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

**Définition 2.5.** *Soit* $\Omega$ *l'espace des éventualités associé à une épreuve et l'ensemblede ses parties* $\mathcal{P}(\Omega)$. *Chaque élément de* $\mathcal{P}(\Omega)$, *c'est-à-dire chaque partie de* $\Omega$ *est appelé événement.*

**Exemple 2.6.**

1. *Dans le jeu de la pièce de monnaie lancée trois fois,l'événement "pile sort en premier" est* $\{PPP, PPF, PFP, PFF\}$.

2. *Au jeu de dé l'événement "résultat pair" est* $\{2, 4, 6\}$.

### 2.1.3 Événements particuliers

1. $\emptyset$ est dit événement impossible.

2. $\Omega$ est dit événement certain.

3. Deux événements $A$ et $B$ sont dits disjoints ou incompatibles si l'événement "$A$ et $B$" est impossible, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$.

4. Chaque partie de $\Omega$ possédant un seul élément (un singleton) est appelé événement élémentaire, les événements élémentaires sont disjoints deux à deux.

**Exemple 2.7.** *Dans le jeu de la pièce de monnaie lancée trois fois:*

1. *L'événement caractérisé par "sortir cinq fois pile" est impossible.*

   *De même l'événement "obtenir une fois pile et deux fois pile" est impossible.*

2. *Les événements "obtenir une fois pile" et obtenir deux fois pile" sont incompatibles.*



## 2.2 Probabilité

Pour comparer les évènements entre eux on se base sur leur possibilité de réalisation. On associe à chaque évènement un certain nombre proportionnel à sa possibilité de réalisation, ce nombre est appelé probabilité de cet évènement.

Si $\Omega$ est l'univers d'une expérience aléatoire telle que $|\Omega| = n$ et $A$ est un évènement de $\Omega$ telle que $|A| = m$, la probabilité de l'évènement est donné par:

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possible}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n} = \alpha$$

telle que $0 \leq \alpha \leq 1$.

**Exemple 2.8.** *On jette une pièce de monnaie bien équilibrée. Calculer la probabilité de chaque évènement:*

1. *D'avoir au moins une pile.*

   *Soit* $\Omega = \{FFF, FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF, PPP\}$ *donc* $|\Omega| = 8$.

   *Soit* $A$ *l'évènement d'avoir au moins une pile*

   $$A = \{FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF, PPP\}$$

   *donc* $|A| = 7$ *et*

   $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7}{8} = 0,875.$$

2. *D'avoir trois faces identiques.*

   *Soit* $B$ *l'évènement d'avoir trois faces identiques*

   $$B = \{FFF, PPP\},$$

   *donc*

   $$|B| = 2 \text{ et } P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

3. *D'avoir au plus deux faces.*

   *Soit* $C$ *l'évènement d'avoir au plus deux faces*

   $$C = \{FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF, PPP\}$$

   *donc* $|C| = 7$ *et*

   $$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{7}{8} = 0,875$$

### 2.2.1 Evènement certain

C'est un évènement qui se produit obligatoirement au cours d'une expérience, on lui attribués la probabilité qu'est égal à 1.

### 2.2.2 Evènement impossible

C'est un évènement qui ne peut produire au cours d'une expérience, on lui attribués la probabilité qu'est égal à 0.

**Exemple 2.9.** *On lance un dé. Si $A$ est l'événement "le nombre de points est supérieur à 7", alors $A = \emptyset$, c'est un évènement impossible. Si $B$ est l'événement "le nombre de points est inférieur à 7", alors*

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

*c'est un évènement certain.*

On appelle évènement simple un évènement qui ne contient qu'un seul élément.

**Remarque 2.10.**

1. *On dit que plusieurs évènement forment un système complet d'évènement si exactement un et un seul évènement du système est réaliser à la fois.*

2. *Deux événements sont dits incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.*

3. *Deux évènements sont dit équiprobables si aucun de ces évènements à plus de chance d'apparaître qu'un autre.*

**Définition 2.11.** *Une probabilité $p$ est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ qui vérifie:*

$$P(\emptyset) = 0, \; P(\Omega) = 1$$

et pour tout couple d'événements tels que $A \cap B = \emptyset$ on a:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

On appelle espace probabilisé le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, si $\Omega$ est fini, alors on dit que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé fini.

**Exemple 2.12.** *On lance une pièce de monnaie une fois.*

Ici $\Omega = \{P, F\}$

L'application :

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$
$$P \to \frac{1}{2}$$
$$F \to \frac{1}{2}$$

est une probabilité et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé fini.

**Proposition 2.13.** *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé.*

*1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.*

*2. $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$.*

*3. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, avec $\overline{A} = C_{\Omega}^{A}$*

Preuve.

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ on a:

$$(A \cup B) = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$$

et les trois parties $A - B$, $B - A$, $A \cap B$ sont deux à deux disjointes.

On a donc:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B)$$

D'autre part:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \text{ et } (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$
$$B = (B - A) \cup (A \cap B) \text{ et } (B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

On a alors:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$$

En portant les valeurs $P(A - B)$ et de $P(B - A)$ dans (1), on a:

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)$$

d'où:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2. Soit $A, B \in P(\Omega)$ tels que $A \subset B$.

   On a : $B = A \cup \overline{A} = A \cup (B - A)$ et $A$ et $B - A$ sont disjoints, donc:

$$P(B) = P(A) + P(B - A) \geq P(A)(\text{car } P(B - A) \geq 0)$$

3. $\Omega = A \cup \overline{A}$, donc

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$$

□

**Définition 2.14.** *Une probabilité $P$ sur l'ensemble $\Omega$ est une application:*

$$P : A \longrightarrow [0; 1]$$

*qui satisfait les propriétés suivantes:*

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$

2. $\forall A, B \subset \Omega : P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ *si* $A \cap B = \emptyset$.

3. *Pout toute suite* $\{A_n\}_{n \geq 1}$ *d'événements de deux à deux disjoints ou incompatibles c'est à dire*$A_i \cap A_j = \emptyset$, *pour* $i \neq j$, *on a:*

$$P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$$

4. $P(\Omega) = 1$

*On dit alors que $\Omega$ est muni d'une probabilité $P$.*

**Proposition 2.15.** *Soient $\Omega$ un ensemble et $P$ une probabilité sur $\Omega$, alors la probabilité $P$ vérifie les propriétés suivantes:*

1. $P(\emptyset) = 0$

2. $\forall A \in \Omega : P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3. $\forall A, B \in \Omega : A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$

4. $\forall A, B \in \Omega : A \diagdown B = A \diagdown A \cap B$ *et* $P(A \diagdown B) = P(A) - P(A \cap B)$

5. *Pout toute suite* $\{A_n\}_{n \geq 1}$ *d'événements de deux à deux disjoints ou incompatibles c'est à dire*$A_i \cap A_j = \emptyset$, *pour* $i \neq j$, *on a:* $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$

6. $\forall A, B \in \Omega : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

7. *Pout toute suite* $\{A_n\}_{n \geq 1}$ *d'événements de* $\Omega$ *on a:* $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$

## 2.3 Probabilités Conditionnelles-Indépendance

### 2.3.1 Probabilité Conditionnelle

**Définition 2.16.** *On appelle "probabilité conditionnelle de* $B$ *sachant* $A$*" ou bien "probabilité pour que* $B$ *se réalise sachant que* $A$ *est réalisé", le réel:*

$$P(B \diagup A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

**Remarque 2.17. -** *Il est parfois aisé de déterminer* $p(A \diagup B)$*. On peut alors déduire* $P(A \cap B)$ *en écrivant* $P(A \diagup B) = P(A \cap B) \times P(B)$*.*

**-** *De même, si* $P(A) \neq \emptyset$, $P(A \cap B) = P(B \diagup A) \times P(A)$*.*

**Exemple 2.18.** *On jette un dé deux fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir un total inférieur à* 5 *sachant que l'on a obtenu* 2 *au premier jet?*

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), ..., (6,5), (6,6)\}, \ |\Omega| = 6^2 = 36$$

*A: l'événement "obtenir* 2 *au premier jet"*

$$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}, \ |A| = 6$$

*et*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = 16$$

*B:l'événement "la somme des deux nombres obtenus est inférieure à* 5*"*

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}, \ B \cap A = \{(2,1), (2,2)\}, \ |A \cap B| = 2$$

*et*

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

*La probabilité cherchée est:*

$$P(B \diagup A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}$$

### 2.3.2 Probabilités Totales

**Définition 2.19.** *Soit $A_1, A_2, ..., A_n$ des événements d'un espace. On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ forment une partition de $\Omega$ si:*

1. $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, A_i \neq \emptyset$.
2. $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, *si* $i \neq j$ *alors* $A_i \cap A_j = \emptyset$.
3. $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$.

**Proposition 2.20.** *Soit $A$ un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et $A_1, A_2, ...,$ $A_n$ des événements formant une partition de $\Omega$. Alors :*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \diagup A_i) \times P(A_i).$$

Preuve. $P(A) = P(A \cap \Omega)$ car $A \subset \Omega$ alors
$= P(A \cap (A_1 \cup ... \cup A_n))$
$= P((A \cap A_1) \cup ... \cup (A \cap A_n))$
$= P(A \cap A_1) + ... + P(A \cap A_n)$ car $A_1, ..., A_n$ sont deux à deux disjoints
$= P(A \diagup A_1) \times P(A_1) + ... + P(A \diagup A_n) \times P(A_n)$ car $P(A \cap A_i) = P(A) \times P(A_i)$
$= \sum_{i=1}^{n} P(A \diagup A_i) \times P(A_i)$. □

**Exemple 2.21.** *Dans une population le nombre de châtains est de 50% et les nombres de blonds, de noirs ou d'autres couleurs sont égaux. La génétique nous apprend que les probabilités conditionnelles pour qu'un enfant soit châtain (événement $A$) sachant que son pére est blond (événement $B$) est $P(A \diagup B) = 0,2$, et que de même avec des notations évidentes $P(A \diagup C) = 0,7$, $P(A \diagup N) = 0,6$ et $P(A \diagup R) = 0,1$. Calculons $P(A)$.*

*Les événements $B, C, N, R$ forment un système complet d'événements. Puisque*

$P(B) + P(N) + P(R) + P(C) = 1$ *alors* $P(B) = P(N) = P(R) = \dfrac{1}{6}$ *et* $P(C) = \dfrac{1}{2}$

*Le théorème des probabilités totales nous donne*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A\diagup B)P(B) + P(A\diagup C)P(C) + P(A\diagup N)P(N) + P(A\diagup R)P(R) \\ &= 0,2 \times \frac{1}{6} + 0,7 \times \frac{1}{2} + 0,6 \times \frac{1}{6} + 0,1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### 2.3.3 Formule de Bayes

**Proposition 2.22.** *Sous les mêmes conditions de la proposition précédente, si de plus $P(B) > 0$, on a, pour tout entier $k \in \{0, 1, ..., n\}$, l'identité:*

$$P(A_k/B) = \frac{P(B\diagup A_k) \times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B\diagup A_i) \times P(A_i)}$$

Preuve. $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$, on peut écrire:

$$P(A_k\diagup B) = \frac{P(B \cap A_k)}{P(B)} = \frac{P(B\diagup A_k) \times P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B\diagup A_i) \times P(A_i)}$$

$\square$

**Exemple 2.23.** *Un maître et son élève tirent à l'arc sur une cible. La probabilité pour que l'arc aille à l'élève est $0,8$; dans ce cas, la probabilité que la flèche aille au but est $0,5$. Par contre, si la flèche est tirée par le maître, la probabilité de succès est $0,7$. Une èche part au but; quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée par le maître?*

*Notons: $A$ "l'arc va au maître" et $B$ "la flèche va au but"*

*Donc la probabilité demandée est la propbabilité conditionnelle $P(A\diagup B)$.*

$$\begin{aligned} P(A\diagup B) &= \frac{p(B/A)p(A)}{p(B\diagup A)p(A) + p(B\diagup \overline{A})p(\overline{A})} \\ \text{d'où } P(A\diagup B) &= \frac{0.7 \times 0.2}{0.7 \times 0.2 + 0.5 \times 0.8} = 0.2592 \end{aligned}$$

### 2.3.4 Indépendance

Deux événements $A$ et $B$ sont dits indépendants si $P(A\diagup B) = P(A)$ et $P(B\diagup A) = P(B)$ c'est-à-dire:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

**Remarque 2.24.** *Si $A$ et $B$ sont indépendants alors $A$ et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $B$ et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.*

**Exemple 2.25.**

*On lance deux fois un dé cubique.*

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ *et* $|\Omega| = 36$.

- $A_1$*: "Le premier nombre obtenu est pair"* $\Omega = \{\{2,4,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}\}$
- $A_2$*: "Le deuxième nombre obtenu est impair"* $\Omega = \{\{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,3,5\}\}$
- $A_3$*: "La somme des deux nombres est paire"*

$$\Omega = \{\{1,3,5\} \times \{1,3,5\} \cup \{2,4,6\} \times \{2,4,6\}\}.$$

$|A_1| = 18$, $|A_2| = 18$, $|A_3| = 18$.

$A_1 \cap A_2 = \{2,4,6\} \times \{1,3,5\}$ *et* $|A_1 \cap A_2| = 9$

$A_1 \cap A_3 = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\}$ *et* $|A_1 \cap A_3| = 9$

$A_2 \cap A_3 = \{1,3,5\} \times \{2,4,6\}$ *et* $|A_2 \cap A_3| = 9$

$P(A_1) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$, $P(A_2) = \frac{|A_2|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$ *et* $P(A_3) = \frac{|A_3|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$

$P(A_1 \cap A_2) = \frac{|A_1 \cap A_2|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$, $P(A_1 \cap A_3) = \frac{|A_1 \cap A_3|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$ *et* $P(A_2 \cap A_3) = \frac{|A_2 \cap A_3|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{4} \Longrightarrow A_1$ *et* $A_2$ *sont indépendants*

$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \times P(A_3) = \frac{1}{4} \Longrightarrow A_1$ *et* $A_3$ *sont indépendants*

$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \times P(A_3) = \frac{1}{4} \Longrightarrow A_2$ *et* $A_3$ *sont indépendants*

**CHAPITRE 3**

# Variables aléatoires à une dimension

Dans la plupart des phénomènes aléatoires, le résultat d'une épreuve peut se traduire par une « grandeur » mathématique, très souvent représentée par un nombre entier ou un nombre réel. La notion mathématique qui représente efficacement ce genre de situation concrète est celle de variable aléatoire (notée également v.a.). Ainsi le pourcentage de réponses « oui » à une question posée dans un sondage ou le nombre d'enfants d'un couple sont des exemples de variables aléatoires.

## 3.1 Variables aléatoires discrètes

Soient $\Omega$ un ensemble et $X$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

**Définition 3.1.** *Une variable aléatoire (v.a) $X$ est une grandeur numérique représentant le résultat d'une expérience aléatoire. On peut donc considérer $X$ comme une application:*

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longrightarrow X(w)$$

*$X(w)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire $X$ définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$.*

**Notation 3.2.** *A chaque évènement élémentaire $w$ de $\Omega$ correspond un nombre réel $x$ associé à la variable aléatoire $X$. La valeur $x$ correspond à la réalisation de la variable $X$ pour l'évènement élémentaire $w$.*

- $X^{-1}(\{x\}) = \{w \in X(w) = x\}$ *se note* $\{X = x\}$.
- $X^{-1}(]-\infty, a]) = \{w \in X(w) = a\}$ *se note* $X = a$.
- $X^{-1}(]a, b]) = \{w \in a < X(w) \leq b\}$ *se note* $a < X \leq b$.

**Exemple 3.3.**

1. *L'expérience consiste à jeter trois pièces de monnaie simultanément.*

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

*Soit* $X =$ *"nombre de faces obtenues" Dans ce cas:* $X(w) = \{0, 1, 2, 3\}$ *.*

### 3.1.1 Loi de Probabilité

**Définition 3.4.** *Soit $X$ une v.a.r définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, alorsl'application:*

$$P_X : X(w) \longrightarrow [0, 1]$$
$$a \longrightarrow P(X = a)$$

*est une probabilité sur $X(w)$, s'appelle la loi de probabilité de $X$. On dit aussi que la v.a $X$ suit la loi de probabilité $P_X$.*

**Exemple 3.5.** *Un sac contient six jetons: deux jetons portent le numéro 1, trois portent le numéro 2, un jeton porte le numéro 3. On suppose que les jetons ont même probabilité d'apparition.*

*On tire simultanément trois jetons du sac. Soit $X$ la v.a associée à la somme des nombres portés par les jetons tirés.*

*Déterminer la loi de $X$.*

*L'univers $\Omega$ associé à cette épreuve est l'ensemble des parties à trois éléments (jetons) parmi les six que contient le sac.*

*D'où:*

$$C_6^3 = 20$$

*On peut avoir des types d'éventualités suivants:*

$$\{1, 1, 1\}, \{1, 2, 2\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 2, 2\}, \{2, 2, 3\}$$

*Donc $X$ prend les valeurs: 4, 5, 6, 7, c'est-à-dire $X(w) = \{4, 5, 6, 7\}$.*

$$P(X = 4) = \frac{C_2^2 \times C_3^1}{20} = \frac{3}{20}$$
$$P(X = 5) = \frac{C_2^1 \times C_3^2 + C_2^2 \times C_1^1}{20} = \frac{7}{20}$$
$$P(X = 6) = \frac{C_2^1 \times C_3^1 \times C_1^1 + C_3^3}{20} = \frac{7}{20}$$
$$P(X = 7) = \frac{C_3^2 \times C_1^1}{20} = \frac{3}{20}$$

*La loi de probabilté de $X$ se résume dans le tableau suivant:*

| $x_i \in X(\Omega)$ | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{7}{20}$ | $\frac{7}{20}$ | $\frac{3}{20}$ |

### 3.1.2 Fonction de répartition

**Définition 3.6.** *Soit $X$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, on appelle fonction de répartition de $X$ la fonction numérique $F_X$ définie sur $\mathbb{R}$ par:*

$$\forall x \in R, F_X(x) = P(X \leq x)$$

**Théorème 3.7.** *Soit $X$ une variable aléatoire et soit $F_X$ sa fonction de répartition. Alors $F_X$ possède les propriétés suivantes:*

1. *$F$ est une fonction croissante (au sens large)*
2. *$F$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.*
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

**Proposition 3.8.** *Soit $X$ une variable aléatoire et soit $F_X$ sa fonction de répartition. On a:*

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
2. $\forall a \in \mathbb{R}, P(X > a) = 1 - F_X(a)$.

### 3.1.3 Espérance

**Définition 3.9.** *Soit $X$ une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ le nombre noté $E(X)$, défini par:*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \times p(X = x_i)$$

**Proposition 3.10.** *Soit $X$ une variable aléatoire et $U$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur $D_X$. On a:*

$$E(U(X)) = \sum_{i=1}^{i=n} U(x_i) \times p(X = x_i) \text{ avec } X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

En particulier si $Y = aX + b$, alors $E(Y) = aE(X) + b$.

**Définition 3.11.** *Soit $X$ une variable aléatoire, on pose $Y = X - E(X)$. $Y$ s'appelle la variable aléatoire centrée associée à $X$, on a $E(X) = 0$. De manière générale si $E(X) = 0$, $X$ est dite centrée.*

### 3.1.4 Variance et Écart-type

**Définition 3.12.** *Soit $X$ une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. On appelle variance de la variable aléatoire $X$ le réel noté $Var(X)$, défini par:*

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{i=n} [x_i - E(X)]^2 \times p(X = x_i).$$

*On appelle écart-type de $X$ le nombre $\delta(X)$ défini par:*

$$\delta(X) = p\sqrt{Var(X)}$$

**Remarque 3.13.**

1. *La variance est un nombre positif car $Var(X) = \sum_{i=1}^{i=n}[x_i - E(X)]^2 \times p(X = x_i)$: C'est la somme de produits positifs $[x_i - E(X)]^2$ et $p(X = x_i)$.*

2. *La variance peut être calculer autrement: En effet:*

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 p(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [x_i^2 - 2x_i E(X) + E^2(X)] p(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p(X = x_i) - 2E(X) \sum_{i=1}^{n} x_i p(X = x_i) + E^2(X) \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) \\
&= E(X^2) - 2E^2(X) + E^2(X)(\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) = 1) \\
&= E(X^2) - E^2(X)
\end{aligned}$$

d'où :

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

**Proposition 3.14.** *Soit $X$ une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ et $a, b$ des réels, alors:*

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X) \text{ et } \delta(aX + b) = |a| \times \delta(X)$$

Preuve. On a d'une part:

$$\begin{aligned} Var(aX + b) &= E[(aX + b)^2] - E^2(aX + b) \\ &= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2 E^2(X) - 2abE(X) - b^2 \\ &= a^2[E(X^2) - E^2(X)] \\ &= a^2 Var(X) \end{aligned}$$

□

et d'autre part:

$$(aX + b) = \sqrt{Var(aX + b)} = \sqrt{a^2 Var(X)} = |a|\sqrt{Var(X)} = |a|\delta(X).$$

**Définition 3.15.** *La variable aléatoire $Y = \frac{X - E(X)}{\delta(X)}$ est appelé la variable centrée-réduite associée à $X$.*

**Proposition 3.16.** *La moyenne d'une variable aléatoire centrée-réduite $Y$ est nulle et sa variance est égale à un, de même $E(Y^2) = 1$*

Preuve.

- $E(Y) = E(\frac{X - E(X)}{\delta(X)}) = \frac{1}{\delta(X)}[E(X) - E(E(X))] = \frac{1}{\delta(X)}[E(X) - E(X)] = 0$
- $Var(Y) = (\frac{1}{\delta(X)})^2 Var(Y) = 1$ ( car $Var(Y) = \delta^2(Y)$)
- $Var(Y) = 1 \Longrightarrow E(Y^2) - E^2(Y) = 1 \Longrightarrow E(Y^2) = 1$

□

### 3.1.5 Covariance

**Définition 3.17.** *Soient $X, Y$ deux variables aléatoires, on appelle covariance de $X$ et $Y$*

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

**Proposition 3.18.** *Soient $X, Y$ deux variables aléatoires, alors on a les propriétés suivantes:*

1. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X+Y)$
2. $X \perp Y \Longrightarrow Cov(X,Y) = 0$
3. $Cov(X,Y) = 0, X \perp Y.$

### 3.1.6 Inégalité de Markov

**Proposition 3.19.** *Soit $X$ une variable aléatoire positif alors*

$$P(X \geq c) \leq \frac{E(X)}{c}, \forall c > 0.$$

Preuve. Soit $X$ une variable aléatoire positif on a

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x xP(X=x) \\ &= \sum_{\{x/x \geq c\}} xP(X=x) + \sum_{\{x/x<c\}} xP(X=x) \\ &\geq \sum_{\{x/x \geq c\}} xP(X=x) \\ &= \sum_{x \geq c} cP(X=x) + \sum_{x \geq c} cP(X=x) \\ &= cP(X \geq c) \end{aligned}$$

d'ou

$$E(X) \geq cP(X \geq c) \Longrightarrow P(X \geq c) \leq \frac{E(X)}{c}.$$

$\square$

### 3.1.7 Inégalité de Tchebychev

**Proposition 3.20.** *Soit $X$ une variable aléatoire alors*

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > 0$$

Preuve. On considère la variable aléatoire $Y = |X - E(X)|$ puis on applique l'inégalité de Markov, on obtient

$$\begin{aligned} P(Y \geq \varepsilon) &= P(Y^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(Y^2)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{E(|X - E(X)|^2)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{E(X - E(X))^2}{\varepsilon^2} = \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

□

## 3.2 Lois de probabilités discrètes usuelles

### 3.2.1 Loi uniforme discrète

Une variable aléatoire réelle $X$ est dite variable aléatoire de loi uniforme discrète sur un ensemble $D = \{1, 2, ..., n\}$ fini si on a, pour tout $x$ dans $D$:

$$P_X(\{x\}) = P(X = x) = \frac{1}{card(D)}$$

**Notation 3.21.** $X \rightsquigarrow U(D)$

### 3.2.2 Loi de Bernoulli

Une variable aléatoire réelle $X$ est de Bernoulli si elle ne prend que les valeurs 0 et 1 avec des probabilités non nulles.

$$f_X(x) = \begin{cases} p \text{ si } x = 1 \\ q \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

**Notation 3.22.** $X \rightsquigarrow B(p)$.

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire $X$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$ sont égales respectivement à:

$$E(X) = p$$

et

$$Var(X) = p(1-p) = pq.$$

**Exemple 3.23.**

1. *Lancer d'une pièce de monnaie*

$$X = \begin{cases} 0 \text{ si on obtient pile} \\ 1 \text{ si on obtient face} \end{cases}$$

$P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$

### 3.2.3 Loi Binomiale

Une variable aléatoire réelle $X$ suit une loi de Binomiale de paramètre $n$ et $p$ si

$$f_X(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, ..., n.0 < p < 1.$$

**Notation 3.24.** $X \rightsquigarrow B(n, p)$.

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire $X$ suivant une loi Binomiale de paramètres $n$ et $p$ sont égales respectivement à:

$$E(X) = np$$

et

$$Var(X) = np(1-p) = npq.$$

**Exemple 3.25.**

1. *Une urne contient des boules blanches et noires, soit $p$ la probabilité de tires une boule blanche et $q = 1 - p$ la probabilité de tirer une boule noires, on tire $n$ boule avec remise, quelle est la probabilité d'obtenir $k$ boules blanches?*

   *La probabilité d'obtenir $k$ boules blanches est*

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, ..., n.$$

### 3.2.4 Loi de Poisson

Une variable aléatoire réelle $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$, $(\lambda > 0)$ si

$$P(X = k) = \frac{kexp(-\lambda)}{k!}, k = 0, 1, ..., \infty.$$

**Notation 3.26.** $X \rightsquigarrow P(\lambda)$

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire $X$ suivant une loi de Poisson de paramètres sont égales respectivement à

$$E[X] = \lambda$$

et

$$Var[X] = \lambda.$$

**Remarque 3.27.**

1. *La loi de Poisson est utilisée pour décrire plusieurs types de phénomènes comme le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant une période donnée, etc.*

2. *La loi de Poisson est encore utilisée lorsque nous étudions le nombre d'apparitions de certains phénomènes rares.*

### 3.2.5 Loi Géométrique

Une variable aléatoire réelle $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ $(0 < p < 1)$ si

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, k = 1, 2, ..., \infty.$$

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire $X$ suivant une loi géométrique de paramètres $p$ sont égales respectivement à

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

et

$$Var[X] = \frac{1 - p}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

**Remarque 3.28.**

1. *Cette loi sert généralement lorsque nous nous intéressons au temps d'attente du premier succès, c'est-à-dire au nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès, lors d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes n'ayant que deux issues possibles: le succès avec une probabilité $p$ et l'échec avec une probabilité $1-p$.*

2. *La loi géométrique est parfois utilisée pour modéliser des durées de vie. Par exemple, la loi géométrique est le modèle discret de la mort d'une particule radioactive. La loi géométrique est la version discrète d'une loi absolument continue: la loi exponentielle.*

**Exemple 3.29.** *Une urne contient une proportion $p$ de boule blanches et une proportion $q = 1-p$ de boule noire $(0 < p < 1)$, on tire successivement des boules une a une avec remise, soit $X$ le rang de la premier boule blanche tirée.*

$$\begin{aligned} P(X &= k) = P(1^{er} \text{ bn et } 2^{eme} \text{ bn et........}(k-1)^{eme} \text{ bn et } k^{eme} \text{ bb}) \\ &= (P(\text{bn}))^{k-1} P(\text{bb}) \\ &= pq^{k-1}. \end{aligned}$$

### 3.2.6 Loi Hypergéométrique

Une variable aléatoire réelle $X$ suit une loi Hypergéométrique de paramètre $N, n, p$ si

$$P(X = k) = \frac{C_{N_p}^k C_{N_q}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, 1, ..., n, Np + Nq = N.$$

**Notation 3.30.** $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N, n, p), k = 0, 1, ..., n.$

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire $X$ suivant une loi hypergéométrique de paramètres $N, n, p$ sont égales respectivement à

$$E[X] = np$$

et

$$Var[X] = np(1-p)\frac{N-n}{N-1} = npq\frac{N-n}{N-1}.$$

1. L'espérance d'une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ est égale à l'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

2. La variance d'une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$ est égale à la variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ au facteur multiplicatif $\frac{N-n}{N-1}$ près. Dans un contexte statistique, ce facteur s'appelle le facteur d'exhaustivité. Il est toujours inférieur ou égal à 1.

**Exemple 3.31.** *$n$ personnes soit choisies au hasard d'une population de $M_1$ personnes de type 1 et $M_2$ personnes de type 2, soit $X$ le nombre de personnes sélectionnées de type 1.*

$$P(X = k) = \frac{C_{M_1}^k C_{M_2}^{n-k}}{C_{M_1+M_2}^n}, k = 0, 1, ..., n.$$

avec la notation précédente on a

$$N = M_1 + M_2, p = \frac{M_1}{N}, q = \frac{M_2}{N}.$$

## 3.3 Variables aléatoires continues

Il existe des variables aléatoires dont les valeurs appartiennent à un intervalle de $\mathbb{R}$. Par exemple "la durée de vie d'un transistor $[0, +\infty[$" et "le temps d'arrivée d'un train $[0, 24h]$".

### 3.3.1 Fonction de répartition

Par définition, la fonction de répartition de la variable aléatoire $X$, est définie par:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \text{ pourtout } x \in \mathbb{R}$$

La fonction de répartition définit la loi de la variable aléatoire $X$.

**Proposition 3.32.**

1. *$F_X(x)$ est continue.*

2. *$F_X(x)$ est croissante.*

3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1, \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0.$

### 3.3.2 Densité de probabilité

**Définition 3.33.** *Soit $f$ est une fonction à valeurs réelles positives ayant au plus un nombre fini de points de discontinuité. On dit que $f$ est la densité d'une variable aléatoire $X$, si sa fonction de répartition $F$ s'écrit sous la forme:*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

**Proposition 3.34.** *Une fonction réelle $f$ définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si et seulement si*

1. $f_X(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2. $f_X(t)$ est continue sauf en un nombre fini de points.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = 1$.

**Remarque 3.35.** *Comme $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$, alors $f_X(x) = F_X'(x)$.*

### 3.3.3 Espérance Mathématique

**Définition 3.36.** *Soit $X$ une variable aléatoire admettant une densité $f$, l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ est le réel,*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

**Remarque 3.37.**

1. *L'espérance mathématique de $X$ représente sa valeur moyenne.*

2. *Une variable aléatoire $X$ est dite centrée si et seulement si son espérance est nulle: $E(X) = 0$. Si $X$ admet une*

espérance alors la variable aléatoire $X - E(X)$ est centrée.

### 3.3.4 Variance

**Définition 3.38.** *Soit $X$ une variable aléatoire continue, la variance de $X$ est définie par:*

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X - E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx\right)^2. \end{aligned}$$

### 3.3.5 L'écart type

**Définition 3.39.** *L'écart type $\delta$ est la racine carré de la variance*

$$\delta = \sqrt{Var(X)}.$$

## 3.4 Lois de probabilités absolument continues usuelles

### 3.4.1 Loi uniforme continue $U[a, b]$

Une variable aléatoire X à valeurs dans $[a, b]$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$ suit une loi uniforme continue sur $[a, b]$, notée $U[a, b]$, si $X$ est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction $f_X$ suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ si } a \leq x \leq b \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. La fonction de répartition d'une loi uniforme $U[a, b]$ est égale à

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{si } a \leq x < b \\ 1 \text{ si } x \geq b \end{cases}$$

2. Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi uniforme $U[a; b]$. Nous avons:

$$E(X) = \frac{a+b}{2},$$

et

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

### 3.4.2 Loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$

Une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ suit une loi exponentielle de paramètre $(\lambda > 0)$, notée $\varepsilon(\lambda)$, si $X$ est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction $f_X$ suivante

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) \text{ pour } x \geq 0 \\ 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

1. La fonction de répartition d'une loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$ est égale à

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - exp(-\lambda x) \text{ pour } x \geq 0 \\ 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

2. Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$. Nous avons:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

et

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3. La loi exponentielle sert de modèle dans les problèmes de les d'attentes et de durée de vie.

### 3.4.3 Loi gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$

La loi exponentielle est un cas particulier d'une famille de lois appelées lois gamma.

Une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $[0, +\infty[$ suit une loi gamma de paramètres et $(\alpha > 0, \lambda > 0)$, notée $\Gamma(\alpha, \lambda)$, si $X$ est une variable continue et admet pour densité de probabilité la fonction $f_X$ suivante

$$f_X(x) = \Gamma(x, \alpha, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} exp(-\lambda x) \text{ pour } x \geq 0 \\ 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

ou

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} exp(-x) dx$$

est la fonction gamma d'Euler.

**Remarque 3.40.**

*Pour $\alpha = 1$, $\Gamma(1, \lambda)$ coïncide avec $\varepsilon(\lambda)$.*

1. La fonction de répartition d'une loi gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$ n'a pas de forme explicite.

2. Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi gamma $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Nous avons:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

   et

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

3. Si $(X_1, X_2)$ est un couple de variables aléatoires indépendantes de lois respectivement gamma $\Gamma(\alpha_1, \lambda)$ et gamma $\Gamma(\alpha_2, \lambda)$ alors la somme $X_1 + X_2$ suit une loi gamma $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.

4. La loi gamma $\Gamma(n, \lambda)$ ($n$ entier $> 0, \lambda > 0$) coïncide avec la loi de la somme de $n$ variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$.

### 3.4.4 Loi Normale ou Gaussienne

La variable aléatoire $X$ suit la loi normale (ou loi de Gauss) d'espérance mathématique $m$ et de variance $\delta^2$, si $X$ peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{R}$ et si elle admet pour densité la fonction:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left[\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}\right]$$

et on écrit $X \rightsquigarrow N(m, \delta^2)$.

On remarque que la courbe est symetrique et admet pour axe de symetrie la droite $x = m$.

Lorsque $m = 0$ et $\delta^2 = 1$ on l'appelle la loi normale standard ou loi normale centré réduite $X \rightsquigarrow N(0, 1)$ (centré $m = E(X) = 0$, réduite $Var(X) = 1$).

**Proposition 3.41.** *Soient $X \rightsquigarrow N(m, \delta^2)$ et $a, b \in \mathbb{R}$ alors on a:*

1. $Y = aX + b \rightsquigarrow N(am + b, a^2\delta^2)$.

*2. Si $X \rightsquigarrow N(m,\delta^2)$ alors $Z = \frac{X-m}{\delta} \rightsquigarrow N(0,1)$*

*3. Si $Z \rightsquigarrow N(0,1)$ alors $X = \delta Z + m \rightsquigarrow N(m,2)$.*

La loi Normale standard $N(0,1)$ est tabulée. la table donne les valeurs des probabilités $P(X \leq x)$ pour différentes valeurs de $x$.

Nous savons que si $X \rightsquigarrow N(m;2)$, alors $Z = \frac{X-m}{\delta} \rightsquigarrow N(0;1)$. La densité de $X$ est donnée par:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{t^2}{2}), \forall t \in \mathbb{R}$$

et sa fonction de répartition $\Phi$ est donnée par la formule:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} exp(-\frac{t^2}{2})dt, \forall x \in \mathbb{R}$$

On a l'identité:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

La table suivante donne pour tout $x$ de 0 jusqu'à 2.99 par pas de 0.01, la valeur de $\Phi(x)$. L'entrée en ligne donne les deux premiers chiffres de $x$, c'est-à-dire le chiffre des unités et celui des dixièmes, et l'entrée en colonne le chiffre des centièmes.

Par exemple: $\Phi(1;73) = P(X \leq 1,73) = 0,95818$, $\Phi(1,96) = P(X \leq 1,96) = 0,975$, $\Phi(-1,54) = 1 - (1,54) = 1 - 0,93822 = 0,06178$.

**Exemple 3.42.** *Soit $X$ une variable aléatoire qui suit la loi normale $N(3,9)$. Trouver*

*1. $P(2 < X < 5)$?*

*2. $P(X > 0)$?*

*3. $P(|X-3| > 6)$*

*On a*

$$\begin{aligned} P(2 &< X < 5) = P(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}) \\ &= P(-\frac{1}{3} < Y < \frac{2}{3}) \\ &= \Phi(\frac{2}{3}) - \Phi(-\frac{1}{3}) \\ &= \Phi(\frac{2}{3}) - (1 - \Phi(\frac{1}{3})) \\ &= \Phi(\frac{2}{3}) + \Phi(\frac{1}{3}) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X &> 0) = P(\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}) \\ &= P(Y > -1) \\ &= 1 - P(Y \leq -1) \\ &= 1 - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(|X-3| &> 6) = P(X-3 > 6) + P(X-3 < 6) \\ &= P(Y > 2) + P(Y < -2) \\ &= 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) \\ &= 2(1 - \Phi(2)) \end{aligned}$$

**Exemple 3.43.** *Deux variables aléatoires $X$ et $Y$ suivent respectivement les lois $N(150, \delta)$ et $N(100, \delta)$. Il existe un réel $a$ tel que $P(X \leq a) = 0,017$ et $P(Y > a) = 0,005$. Déterminez $\delta$.*

*Nous supposerons que $\delta$ est non nul. En utilisant la première égalité et en centrant et réduisant $X$, nous obtenons que*

$$P(\frac{X-150}{\delta} \leq \frac{a-150}{\delta}) = 0,017$$

*donc*

$$\Phi(\frac{a-150}{\delta}) = 0,017$$

*Ainsi, en utilisant la table de la fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite, nous en déduisons que*

$$\frac{a-150}{\delta} = 2,12.$$

*En utilisant la seconde égalité, en remarquant que*

$$P(Y > a) = 1 - P(Y \leq a)$$

*et en centrant et réduisant Y, nous obtenons que*

$$\Phi(\frac{a-100}{\delta}) = 0,996.$$

*Ainsi, en utilisant la Ainsi, en utilisant la table de la fonction de répartition de la loi normalecentrée-réduite, nous en déduisons que*

$$\frac{a-150}{\delta} = 2,65$$

*Par conséquent, nous sommes ramenés à résoudre un système de deux équations à deux-inconnues, où seul $\delta$ nous intéresse*

$$\begin{cases} \frac{a-150}{\delta} = 2,12 \\ \frac{a-150}{\delta} = 2,65 \end{cases} :$$

*En le résolvant, nous trouvons que* $\delta = 5000 \div 477 \approx 10,48$.

### 3.4.5 Loi du khi-deux

Soient $X_1, X_2, ..., Xn$ $n$ variable aléatoire normales standards ($X_i \rightsquigarrow N(0,1), \forall i \in \{1, ...n\}$) indépendantes.

La variable aléatoire $X$ définie par

$$X = X_1^2 + X_2^2 + +X_n^2 \text{ suit la loi de khi-deux à } n \text{ degrés de liberté}$$

sa densité de probabilité est définie par:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} exp[-\frac{x}{2}] \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

et on écrit $X \rightsquigarrow \chi_2(n)$. L'espérance et la variance de $X$ sont: $E(X) = 2$ et $Var(X) = 2n$

La loi de probabilité de khi-deux est une loi Gamma de paramètres $a = \frac{n}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

### 3.4.6 Loi de student $\mathcal{T}(n)$

Soient $X$ une v.a normale standard ($X \rightsquigarrow N(0,1)$) et Y une variable aléatoire indépendantes de $X$ ayant la loi de khi-deux à $n$ degrés de liberté ($Y \rightsquigarrow \chi_2(n)$). La variable aléatoire $T$ définie par

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \text{ suit la loi de student à } n \text{ degrés de liberté}$$

sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}, x \in \mathbb{R}.$$

et on écrit $T \rightsquigarrow \mathcal{T}(n)$). L'espérance et la variance de $T$ sont: $E(T) = 0$ et $V(T) = \frac{n}{n-2}$.

Elle est symétrique, plus $n$ est grand et plus sa distribution se confond avec celle de la loi normale standard.

### 3.4.7 Loi de Fisher-Snedecor $\mathcal{F}(n, m)$

Soient $X$ et $Y$ deux variable aléatoire indépendantes ayant la loi de khi-deux à respectivement $n$ et $m$ degrés de liberté (($X \rightsquigarrow \chi_2(n), Y \rightsquigarrow \chi_2(m)$). La variable aléatoire $F$ définie par

$$F = \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \text{ suit la loi de Fisher-Snedecor à } (n, m) \text{ degrés de liberté}$$

sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(nx+m)^{\frac{n+m}{2}}} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

et on écrit $F \rightsquigarrow \mathcal{F}(n, m)$). L'espérance et la variance de $F$ sont:

$$E(F) = \frac{m}{m-2} \text{ si } m > 2 \text{ et } V(F) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)} \text{ si } m > 4.$$