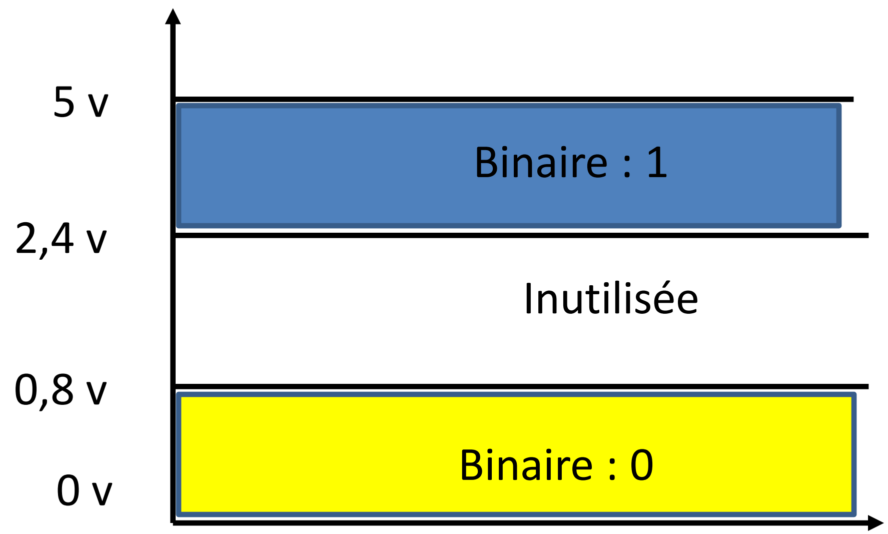
Chapitre 2

- Variables et fonctions logique (OR, AND, NOR, NAND, XOR,NON),
- Lois de l'algèbre de Boole.
- Théorème de De-Morgan.
- Fonction logique complète et incomplète.
- Représentation des fonctions logique(TV, TK).
- Simplification des fonctions logiques (méthode algébrique et méthode de Karnaugh

Quel est le système utilisé dans les dispositifs numériques ?

- Les machines numériques utilisent le système binaire.
- Dans le système binaire : uniquement 2 symboles sont utilisés : 0 et 1.
- C'est facile de représenter ces deux symboles dans les machines numériques.
- Le 0 et le 1 sont représentés par deux tensions .

Logique positive	Logique négative	Tension
0	1	0 V (L)
1	0	5 V (H)



Ces deux valeurs peuvent être nommées de différentes façons :

Niveau logique « 1 » : Vrai, Fermé, Marche, Haut, Allumé, Oui…

Niveau logique « 0 » : Faux, Ouvert, Arrêt, Bas, Éteint, Non…

La logique binaire basée sur l'algèbre de Boole permet de décrire - dans un modèle mathématique - les manipulations et traitement des informations binaires, et d'analyser les systèmes numériques.

Il existe 3 fonctions élémentaires (opérateurs logique) dans l'algèbre de Boole : addition logique : appelée OU (OR), symbolisée par un plus : « + » ; multiplication logique : appelée ET (AND), symbolisée par un point : « • » ; complémentation : appelée NON (NOT), symbolisée par un surlignement: « $\overline{\quad}$ » (bar)

Définitions

- **Variables logiques (variable booléenne):** prend la valeur 1 ou 0 uniquement et associe un événement.

Événement vrai → variable logique=1

Événement faux → variable logique=0

Le complément d’une variable logique a (inverse) est une variable logique $\bar{a}$ (a bar).

- **Fonction logique (Fonction booléenne):** Une fonction logique est une fonction qui peut avoir une ou plusieurs variables logiques (d’entrée) et retourne l'une de deux valeurs 0 ou 1 (variable de sortie).

Exemple:

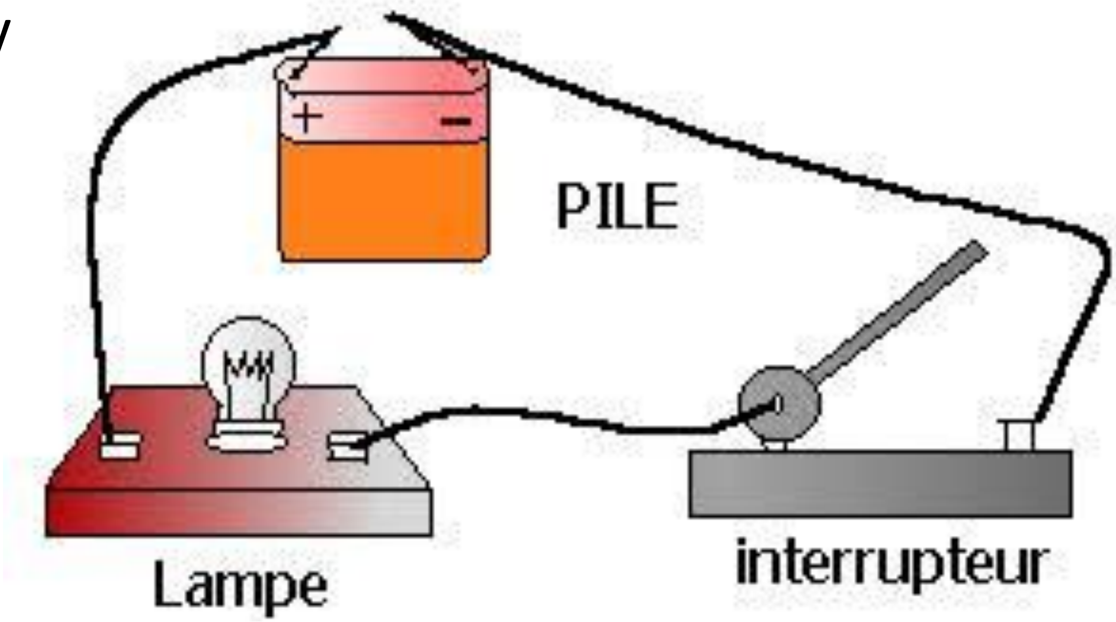
I=0 ➔ Interrupteur ouverte
I=1 ➔ Interrupteur fermée
L=0 ➔ Lampe éteinte
L=1 ➔ Lampe allumée

I et L sont des variables logiques, I est variable d'entrée, et L est variable de sortie

La table de vérité TV

I	L
0	0
1	1

L=I est fonction logique



L=0 OU L=1

I=0
OU
I=1

- **Table de vérité:** La table de vérité d'une fonction logique représente les différentes combinaisons des variables impliquées dans la fonction et la valeur de cette fonction pour chacune de ces combinaisons.

Exemple : Considérons la fonction logique F à deux variables *a, b*. F prend la valeur ***vrai*** si *a=b=0*, sinon prend la valeur ***faux***.

La table de vérité correspondant est la suivante:

Les combinaisons en ordre de binaire pur

a	b	F(a,b)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Les opérateurs logiques:

1. La somme logique: (OU logique (OR))

Considérons deux variables logiques a, b. la somme logique de a et b (a+b) est représentée par la table de vérité:

a	b	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Les propriétés de la somme logique

La fonction	Description
$a+0=a$	0 est l'élément neutre pour la somme logique
$a+1=1$	1 est l'élément absorbant pour la somme logique
$a+a=a$	Propriété d'idempotence
$a+\overline{a}=1$	Propriété de l'inverse par rapport à la somme logique
$a+b=b+a$	La somme logique est commutative
$a+(b+c)=(a+b)+c$	La somme logique est associative

2. La somme logique disjonctive: (OU eXclusif (XOR))

le somme logique disjonctive de a et b est donnée par : $a \oplus b$, la table de vérité est comme suite:

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3. Le produit logique: (ET logique (AND))

Considérons deux variables logiques a, b. le produit logique de a et b (a.b) est représentée par la table de vérité:

a	b	a.b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Les propriétés du produit logique

La fonction	Description
a.1=a	1 est l'élément neutre pour le produit logique
a.0=0	0 est l'élément absorbant pour le produit logique
a.a=a	Propriété d'idempotence
$a.\overline{a}=0$	Propriété de l'inverse par rapport au produit logique
a.b=b.a	Le produit logique est commutatif
a.(b.c)=(a.b).c	Le produit logique est associatif

4. Le complément logique: (NON logique (NOT))

Considérons une variables logiques a. le complément logique de a ($\overline{a}$) est représentée par la table de vérité:

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

Remarques:

$\overline{a}$ appelé a bar.

$\overline{\overline{a}} = a$

Propriétés générales

Ces propriétés concernent la somme et produit logique

- **<u>La dualité:</u>**

A toute propriété P correspond une propriété P* dite duale. On obtient la propriété duale P* d'une propriété P

- en inversant les opérateurs (+ et •) par (• et +)
- et en permutant les éléments neutres (0 pour la somme et 1 pour le produit) et les éléments absorbants

Exemple:

$a+a=a \longrightarrow a \bullet a=a$

$a+0=a \longrightarrow a \bullet 1=a$

$a \bullet 0=0 \longrightarrow a+1=1$

- **<u>La distributivité:</u>**

La somme logique est distributive par rapport au produit logique :

$$a+(b.c)=(a+b).(a+c)$$

Le produit logique est distributif par rapport à la somme logique :

$$a.(b+c)=a.b+a.c$$

- **<u>L'absorption:</u>**

$$a+a.b=a \qquad (1)$$

Démonstration: $a.1=a$ alors

$a+a.b=a.1+a.b=a(1+b)=a$ / $1+b=1$

La propriété dual de (1) est:

$$a.(a+b)=a$$

- **<u>L'inhibition:</u>**

$$a+\overline{a}.b=a+b \qquad (2)$$

Démonstration:

$a+\overline{a}.b=(a+\overline{a})(a+b)$ la distributivité

$a+\overline{a}=1$ alors $a+\overline{a}.b=a+b$

La propriété duale de (2) est $a.(\overline{a}+b)=a.b$

Ainsi, les propriétés générales les plus importantes sont :

- $a+b.c=(a+b).(a+c)$
- $a.(b+c)=a.b+a.c$
- $a + \overline{a}.b = a + b$
- $a+a.b=a$

Théorèmes de De-Morgan

Les lois de De-Morgan sont :

$\overline{a+b} = \overline{a} \, . \, \overline{b}$ (1)

$\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$ (2)

$\overline{\overline{a}} = a$ (3)

Pour démontrer ces théorèmes, on peut utilisé la table de vérité:

a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$a.b$	$\overline{a.b}$	$\overline{a}+\overline{b}$	$\overline{a+b}$	$\overline{a}.\overline{b}$	$\overline{\overline{a}}$
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1

Résumé d'importantes propriétés des opérateurs OU et ET

Propriété	OU	ET
Élément neutre	$a+0=a$	$a.1=a$
Élément absorbant	$a+1=1$	$a.0=0$
Idempotence	$a+a=a$	$a.a=a$
Complémentation	$a+\overline{a}=1$	$a.\overline{a}=0$
Commutativité	$a+b=b+a$	$a.b=b.a$
Associativité	$a+(b+c)$ $=(a+b)+c$	$a.(b.c)$ $=(a.b).c$
Distributivité	$a+(b.c)$ $=(a+b).(a+c)$	$a.(b+c)$ $=(a.b)+(a.c)$
Absorption	$a+a.b=a$	$a.(a+b)=a$
Inhibition	$a+\overline{a}.b=a+b$	$a.(\overline{a}+b)=a.b$
De Morgan	$\overline{a+b}=\overline{a}.\overline{b}$	$\overline{a.b}=\overline{a}+\overline{b}$

Représentation d'une fonction logique

Une fonction logique peut être représentée par trois manières différentes :

- Soit, par la table de vérité,
- Soit, par la forme algébrique.
- Soit, par la forme graphique (schéma logique)

Représentation par la table de vérité

- Soit la fonction logique F de trois variables (a,b,c) donnée par la table de vérité (TV) suivante:

a	b	c	f	équation
0	0	0	1	$\bar{a} . \bar{b} . \bar{c}$
0	0	1	0	$a+b+\bar{c}$
0	1	0	0	$a+\bar{b}+c$
0	1	1	1	$\bar{a} . b . c$
1	0	0	0	$\bar{a}+b+c$
1	0	1	0	$\bar{a}+b+\bar{c}$
1	1	0	1	$a . b . \bar{c}$
1	1	1	1	$a . b . c$

Les entrées la sortie

Représentation par la forme algébrique

On peut représenter une fonction logique en utilisant les opérations logiques:

Exemple:

$$f(a,b) = a.b + \overline{a}.\overline{b}$$

$$f(a,b,c) = a.b.c + a.b.\overline{c} + \overline{a}.b.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$$

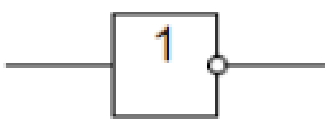
$a.b$ et $\overline{a}.\overline{b}$ Sont les **termes** de la fonction f

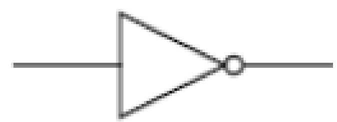
$$F2 = (a+b+c)(\overline{a}+b+c)(a+\overline{b}+c)(\overline{a}+\overline{b}+c)$$

Représentation par la forme graphique

Les ports logiques élémentaires et composés

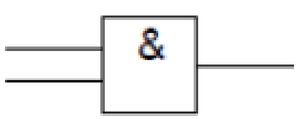
NON (NOT) : complément «¯»

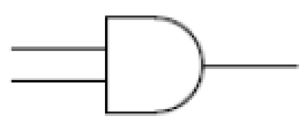




A	$S=\overline{A}$
0	1
1	0

ET (AND) : produit logique «.»





A	B	$S=A.B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OU (OR) : somme logique « + »

A	B	$S = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

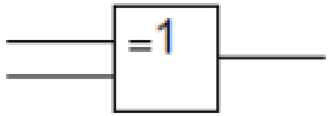
NON-OU (NOR)

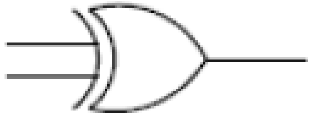
A	B	$S = \overline{A + B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NON-ET (NAND)

A	B	$S = \overline{A.B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

OU exclusif (XOR) « ⊕ »





A	B	$S = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Les propriétés des porte XOR

$$a \oplus b = a\overline{b} + \overline{a}b = (a+b).(\overline{a}+\overline{b})$$

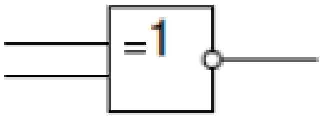
$$a \oplus a = 0 \quad et \quad a \oplus \overline{a} = 1$$

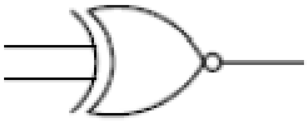
$$a \oplus 1 = \overline{a} \quad et \quad a \oplus 0 = a$$

$$a \oplus b = b \oplus a$$

$$a(b \oplus c) = ab \oplus ac$$

NON-OU exclusif (XNOR) (équivalence) $\odot$





A	B	$S = A \odot B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Universalité des portes NAND et NOR

conséquence : Toutes les portes logiques élémentaires (ET , OU , NON) peuvent être réalisées avec des portes NOR ou NAND .

1. Pour l'opérateur NOR, on a :

$\overline{a} = \overline{a + a}$ Représente NOT

$a.b = \overline{\overline{a} + \overline{b}}$ Représente AND

$a + b = \overline{\overline{a + b}}$ Représente OR

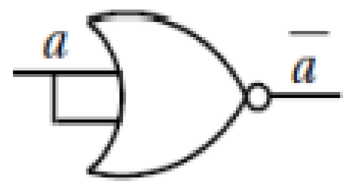
2. Pour l'opérateur NAND, on a :

$\overline{a} = \overline{a.a}$ Représente NOT

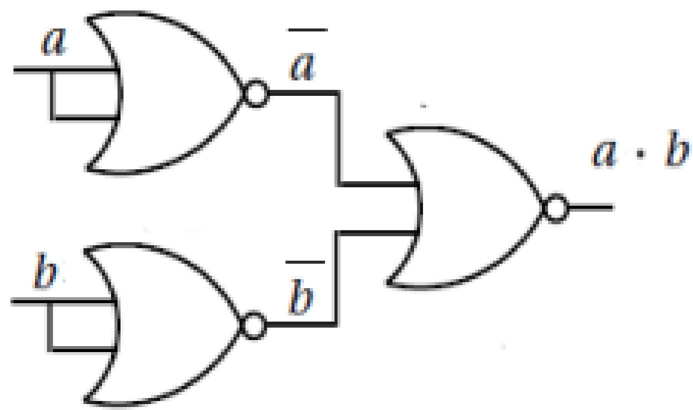
$a.b = \overline{\overline{a.b}}$ Représente AND

$a + b = \overline{\overline{a}\,\overline{b}}$ Représente OR

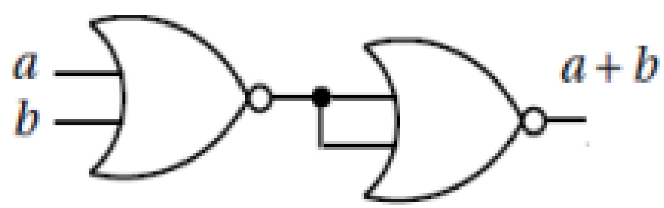
NOT

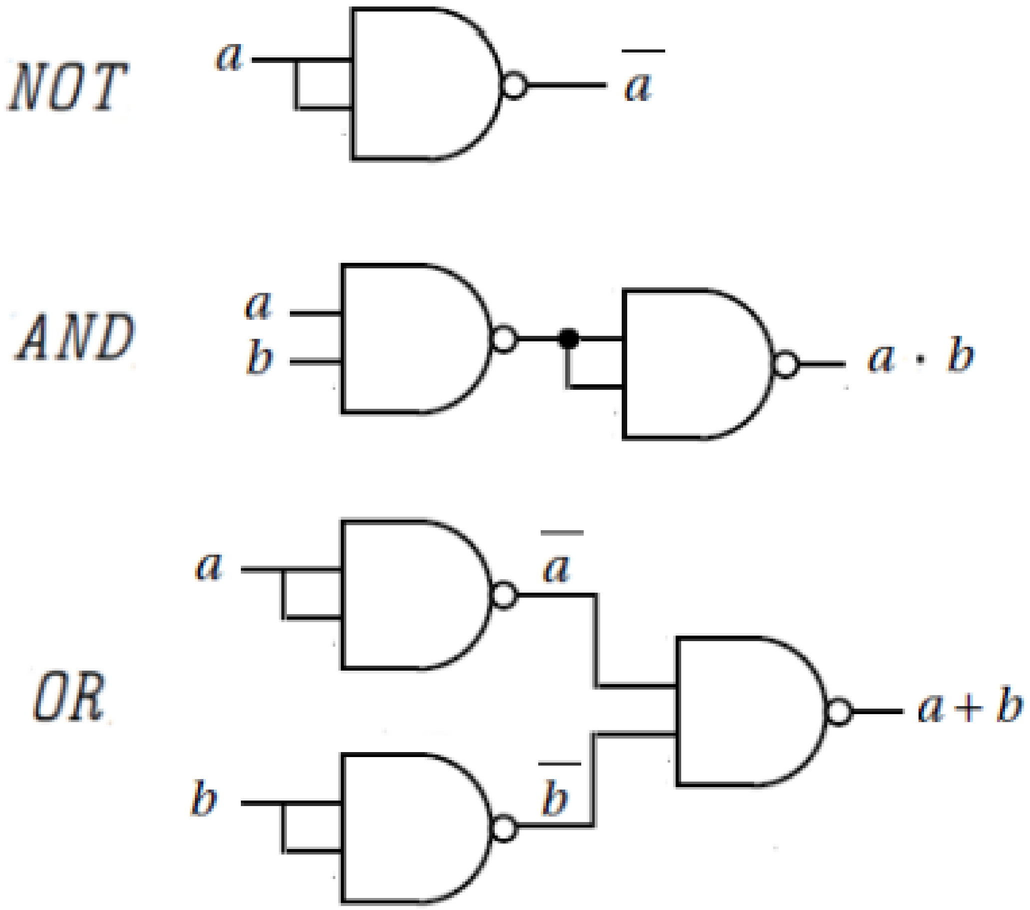


AND

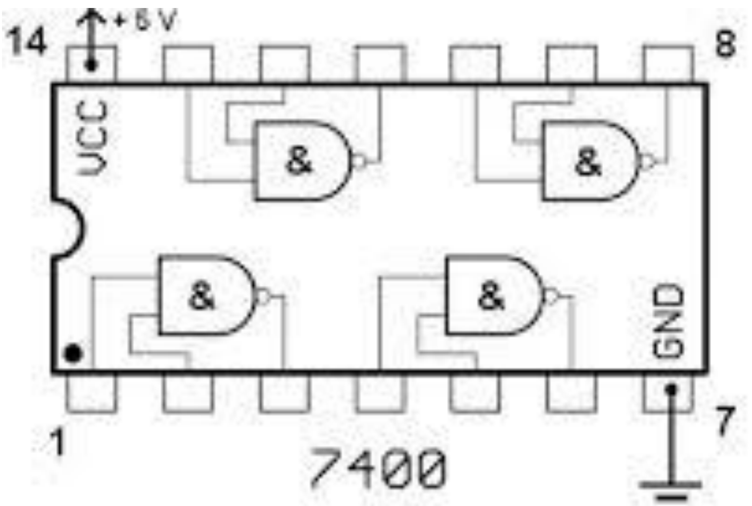


OR




NOT
a
$\overline{a}$
AND
a
b
$a \cdot b$
OR
a
$\overline{a}$
b
$\overline{b}$
$a + b$

Exemple:(la forme graphique)

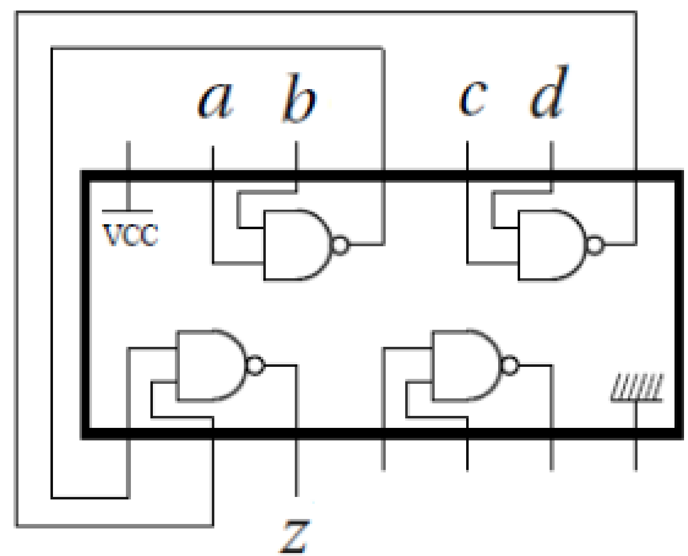


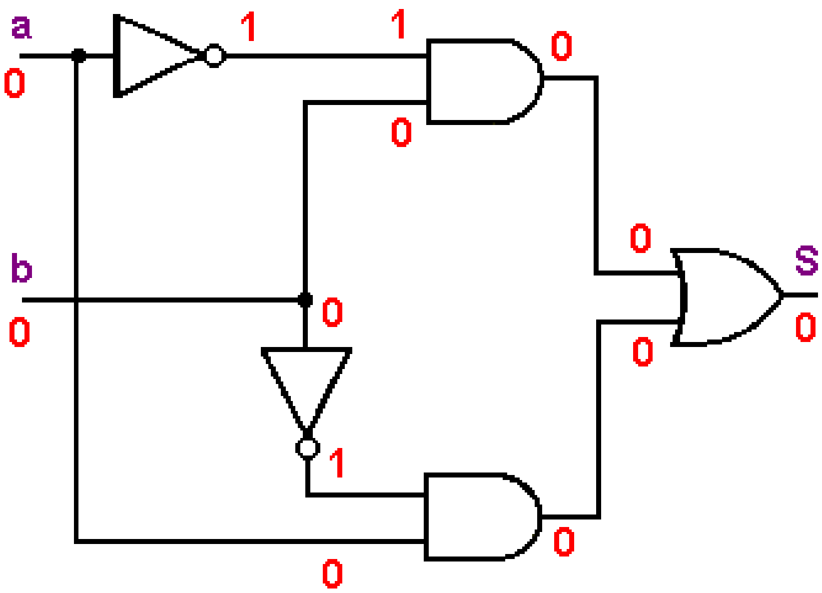
Pour réaliser la fonction

$$z = a.b + c.d$$

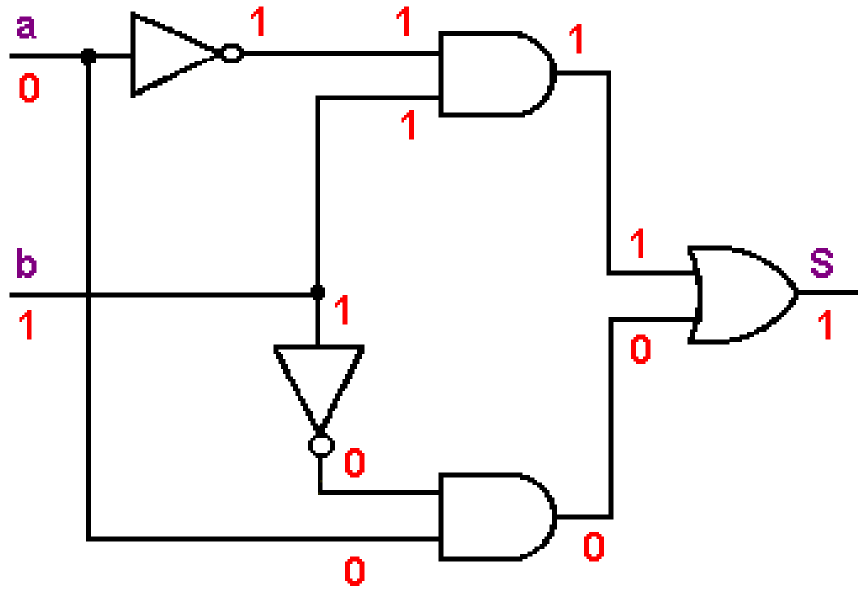
à l'aide de 4 portes NAND

$$z = a.b + c.d = \overline{\overline{a.b + c.d}} = \overline{\overline{a.b}.\overline{c.d}}$$





a) a = 0, b = 0 | S = 0



b) a = 0, b = 1 | S = 1

$$S = a\bar{b} + \bar{a}b$$

Passage de la table de vérité à la forme algébrique

- On peut représenter une fonction logique en utilisant les opérations logiques:

F(a,b,c)	équation	
1	$\overline{a} . \overline{b} . \overline{c}$	$\overline{0} . \overline{0} . \overline{0}$
0	$a+b+\overline{c}$	$0+0+\overline{1}$
0	$a+\overline{b}+c$	$0+\overline{1}+0$
1	$\overline{a} . b . c$	$\overline{0}.1.1$
0	$\overline{a}+b+c$	$\overline{1}+0+0$
0	$\overline{a}+b+\overline{c}$	$\overline{1}+0+\overline{1}$
1	$a . b . \overline{c}$	$1.1.\overline{0}$
1	$a . b . c$	$1.1.1$

$$F(a,b,c)= \overline{a}.\overline{b}.\overline{c} + \overline{a}.b.c + a.b.\overline{c} + a.b.c$$

1re méthode somme de produits:

- On considère dans la table de vérité que les combinaisons de variables pour lesquelles la fonction vaut 1.
- Dans la combinaison, on remplace les 1 par les variables et les 0 par leurs compléments. Ainsi, chaque combinaison va correspondre au produit logique de ses variables ou de leurs compléments.
- La fonction sera la somme logique de tous les produits logiques déjà trouvés en 2.

2^{me} méthode produit de sommes:

- On considère dans la table de vérité que les combinaisons de variables pour lesquelles la fonction vaut 0.
- Dans la combinaison, on remplace les 0 par les variables et les 1 par leurs compléments. Ainsi, chaque combinaison va correspondre de la somme logique de ses variables ou de leurs compléments.
- La fonction sera le produit logique de tous les sommes logiques déjà trouvés en 2.

Passage de la table de vérité à la forme algébrique

équation	
$\overline{a} . \overline{b} . \overline{c}$	$\overline{0} . \overline{0} . \overline{0}$
$a+b+\overline{c}$	$0+0+\overline{1}$
$a+\overline{b}+c$	$0+\overline{1}+0$
$\overline{a} . b . c$	$\overline{0}.1.1$
$\overline{a}+b+c$	$\overline{1}+0+0$
$\overline{a}+b+\overline{c}$	$\overline{1}+0+\overline{1}$
$a . b . \overline{c}$	$1.1.\overline{0}$
$a . b . c$	$1.1.1$

$$F(a,b,c)= (a+b+\overline{c}) \bullet (a+\overline{b}+c) \bullet (\overline{a}.b.c) \bullet (\overline{a}.b.\overline{c})$$

exemple

a	b	$f(a,b)$		*Terme algébrique*
0	0	1	On remplace le 1^er^ 0 par $\overline{a}$ et le 2^éme^ 0 par $\overline{b}$	$\overline{a}.\overline{b}$
0	1	1	On remplace le 0 par $\overline{a}$ et le 1 par b	$\overline{a}.b$
1	0	0		
1	1	1	On remplace le 1^er^ 1 par a et le 2^éme^ 1 par b	a.b

Ainsi, on obtient la fonction $f(a,b) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}b + ab$

$$f(a,b) = \overline{a} + b$$

Passage de la forme algébrique à la table de vérité :
Pour représenter une fonction par une table de vérité, procédons comme suit :

- On considère chaque terme algébrique (la fonction sous forme somme de produits) à part :

- On affecte à chaque variable la valeur 1(s’il y a une variable manquante, il faut la prendre en deux cas pour 0 et pour 1).
- On affecte à chaque variable complémentée la valeur 0

- Dans la table de vérité, on met des 1 dans les cases correspondantes aux différentes combinaisons de variables qu'on a ainsi obtenues.

Exemple 1:

Aucune variable manquante

Soit la fonction $f(a,b,c) = a.b.c + a.b.\overline{c} + \overline{a}.b.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$

Le terme	*La combinaison*
$a.b.c$	111
$a.b.\overline{c}$	110
$\overline{a}.b.\overline{c}$	010
$\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$	000

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Exemple 2:

$$f(a,b,c) = a.b + \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} + a \cdot \bar{b} \cdot c$$

La variable c est
manquante se traduit
par 0 et 1

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Donc les combinaisons sont:

110: $ab\bar{c}$

111: abc

000 : $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$

101 : $a\bar{b}c$

RQ: 1 variable manquante : 2 états 0, 1

2 variables manquantes: 4 états 00,… 11

3 variables manquantes: 8 états 000,… 111.

sous forme de 2 puissance de nombre des variables

Simplification des fonctions logiques

Simplifier une fonction logique revient à:

- Réduire le nombre de ses termes.
- Réduire le nombre de variable dans un même terme.

L'intérêt de simplifier une fonction logique apparaît dans la réalisation du circuit correspondant puisque cela réduit le nombre de portes logiques utilisées pour sa réalisation.

- Il existe plusieurs méthodes de simplification. on va étudier deux :

1. Méthode algébrique ;
2. Méthode de Karnaugh.

Méthode algébrique

Elle consiste à utiliser les propriétés de l'algèbre de Boole.

Exemple

Soit la fonction suivante:

$$f(a,b,c,d) = a.b + \overline{a}.c + b.c$$

$$a.b + \overline{a}.c + b.c = a.b + \overline{a}.c + b.c.1$$

$$= a.b + \overline{a}.c + b.c.(a + \overline{a}) \text{ Parce que on } 1 = a + \overline{a}$$

$$= a.b + \overline{a}.c + b.c.a + b.c.\overline{a}$$

$$= a.b(1 + c) + \overline{a}.c(1 + b)$$

$$= a.b + \overline{a}.c \text{ Parce que on } 1 + c = 1 \text{ et } 1 + b = 1$$

Ou encore :

$$a.b + \overline{a}.c + b.c = a.b + (\overline{a} + b).c$$

$$= a.b + (\overline{a} + a.b).c$$

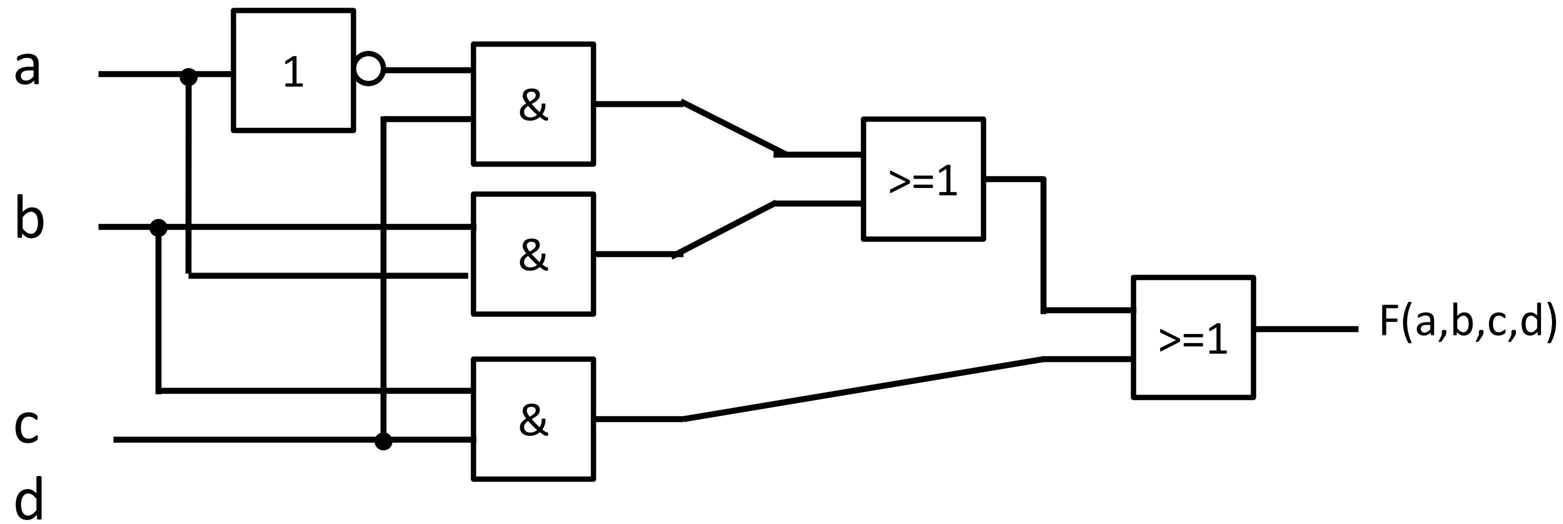
$$= a.b + \overline{a}.c + a.b.c$$

$$= a.b(1 + c) + \overline{a}.c$$

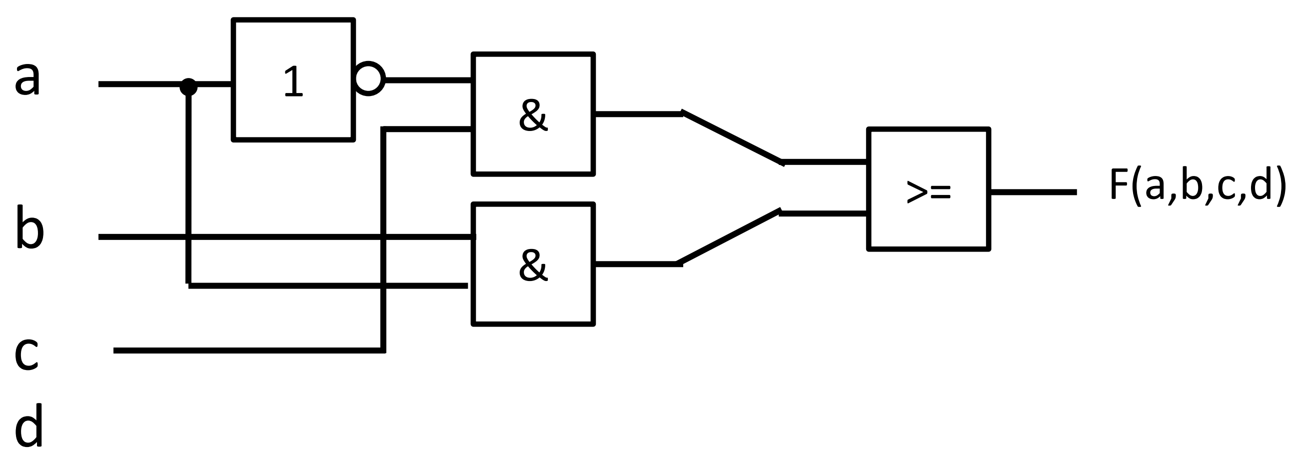
$$= a.b + \overline{a}.c$$

Donc $f(a,b,c,d) = a.b + \overline{a}.c$

Avant la simplification:



Après la simplification:



Méthode de simplification par la table de Karnaugh

Une table de Karnaugh est une grille comportant un nombre de cases vide égale au nombre de combinaisons des variable de la fonction logique qu'on veut simplifier.

- Pour une fonction à une variable, la table comprendra une seul case qui peut prendre la valeur 0 ou 1.
- Pour une fonction de deux variables, la table comprendra 4 cases (2^2).
- Le code utilisé pour écrire les combinaisons est le code Gray.

A \ B	0	1
0	$\overline{a}.\overline{b}$	$\overline{a}.b$
1	$a.\overline{b}$	$a.b$

Tableau à 2 variables

L'ordre : AB

Code Gray

C \ AB	00	01	11	10
0	$\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$	$\overline{a}.b.\overline{c}$	$a.b.\overline{c}$	$a.\overline{b}.\overline{c}$
1	$\overline{a}.\overline{b}.c$	$\overline{a}.b.c$	$a.b.c$	$a.\overline{b}.c$

Tableau à 3 variables

L'ordre : ABC

0	2	6	4
1	3	7	5

A \ BC	00	01	11	10
0	$\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}$	$\overline{a}.\overline{b}.c$	$\overline{a}.b.c$	$\overline{a}.b.\overline{c}$
1	$a.\overline{b}.\overline{c}$	$a.\overline{b}.c$	$a.b.c$	$a.b.\overline{c}$

0	1	3	2
4	5	7	6

Tableau à 3 variables

L'ordre : ABC

Code Gray

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Tableau à 4 variables

L’ordre : ABCD

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

Tableau à 4 variables

L’ordre : ABCD

Chaque deux lignes ont deux combinaisons successives sont adjacentes, et chaque deux colonnes ont deux combinaisons successives sont adjacentes.
Si les deux combinaisons de deux lignes ont le principe du changement d’un seul bit, donc les deux lignes sont adjacentes, même idée pour les colonnes

Le passage de table de vérité à la table de Karnaugh:

Exemple: soit la fonction S représenté par la table de vérité suivante:

A	B	C		S
0	0	0		**0**
0	0	1		**0**
0	1	0		**0**
0	1	1		**1**
1	0	0		**0**
1	0	1		**1**
1	1	0		**1**
1	1	1		**1**

C \ AB	00	01	11	10
0	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**0**	**1**	**1**	**1**

La simplification par la table de Karnaugh

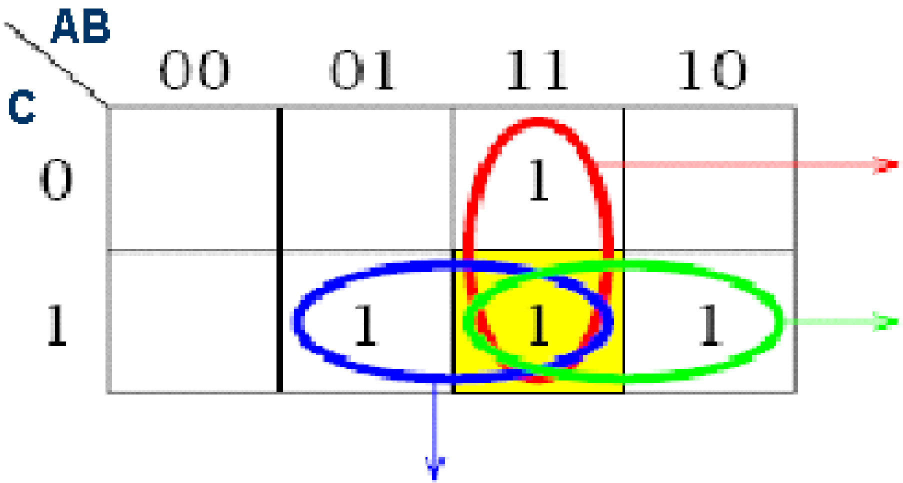
1. Si la fonction logique est donnée sous la forme de somme des produits (disjonctive), alors sa représentation est directe : pour chaque terme lui correspond une seule case qui doit être mise à 1.

- Encercler tout ensemble de cases occupées par des 1 adjacentes sur la même ligne ou sur la même colonne. Une case peut être encerclée deux fois. Si un 1 est isolé, on l'encercle tout seul.
- Dans un groupe de 1, si une variable change de valeur, on l'élimine, sinon, on la garde.
- La fonction simplifiée est la somme logique de tous les termes ainsi réduits.

2. Si la fonction logique est donnée sous la forme de produit des sommes (conjonctive), alors sa représentation est directe : pour chaque terme lui correspond une seule case qui doit être mise à 0 .

- Encercler tout ensemble de cases occupées par des 0 adjacentes sur la même ligne ou sur la même colonne. Une case peut être encerclée deux fois. Si un 0 est isolé, on l'encercle tout seul.
- Dans un groupe de 0, si une variable change de valeur, on l'élimine, sinon, on la garde.
- La fonction simplifiée est le produit logique de tous les termes ainsi réduits.

Exemple:



$$ABC + AB\overline{C} = AB$$

$$ABC + A\overline{B}C = AC$$

$$\overline{A}BC + ABC = BC$$

$$F(A,B,C) = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$$
$$= AB + AC + BC$$

Remarques:

1. Chaque groupe des 1 contient un nombre des 1 sous forme de 2^n (1, 2, 4, 8, 16, …).
2. Si on a une variable se change sa valeur dans un groupe, c’est à dire cette variable est éliminée.
3. Si on a 2 variables se changent son valeurs dans un groupe, c’est à dire ces variables sont éliminées, et ainsi de suit.
4. On forme le minimum des groupes et chaque groupe contient le maximum des 1.
5. Même principe (étapes 1,2,3,4) si on utilise les zéros (0)

Exemple:

$$f(a,b,c)=\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}+a.\bar{b}.c+\bar{a}.b.\bar{c}+a.b.\bar{c}+a.b.c$$

Gr 1

GR 3

a\bc	**00**	**01**	**11**	**10**
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1

Gr2

Simplifiée par 1

$$f(a,b,c)=\bar{a}\bar{c}+ac+b\bar{c}$$

$$f(a,b,c)=(\bar{a}+b+c)(a+\bar{c})$$

Simplifiée par 0

$$f(a,b,c,d)=\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d}+\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.d+\overline{a}.\overline{b}.c.d+\overline{a}.b.\overline{c}.d+\overline{a}.b.c.\overline{d}+\overline{a}.b.c.d$$
$$+a.b.\overline{c}.d+a.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d}+a.\overline{b}.c.d+a.\overline{b}.\overline{c}.d+a.b.c.d$$

ab\cd	**00**	**01**	**11**	**10**
00	1	1	1	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	0
10	1	1	1	0

$$f(a,b,c,d)=\overline{a}bc+\overline{b}\,\overline{c}+d$$

$$f(a,b,c,d)=\overline{a}.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d}+a.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d}+\overline{a}.\overline{b}.c.\overline{d}+a.\overline{b}.c.\overline{d}$$

ab\cd	**00**	**01**	**11**	**10**
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

a éliminer et $\overline{b}$ *reste*

c éliminer et $\overline{d}$ *reste*

$$f(a,b,c,d)=\overline{b}.\overline{d}$$

$$f(a,b,c)=(\overline{b})(\overline{d})=\overline{b}\,\overline{d}$$

Cas particulier : les fonctions incomplètement définies

Une fonction logique est incomplètement définie quand sa valeur est indifférente ou non spécifiée pour certaines combinaisons de ses variables.

Exemple:

Soit la fonction *f(a,b,c,d)* dont sa table de vérité est la suivante

Dans la table de Karnaugh, elles (x) peuvent être considérées comme des 0 ou des 1 selon qui arrange la simplification.
La table de Karnaugh correspondant a cette fonction est la suivant:

ab\cd	00	01	11	10
00	1	1	1	x
01	1	x	0	0
11	x	x	0	0
10	1	1	0	0

Donc: $f(a,b,c,d) = \overline{a}.\overline{b} + \overline{c}$

a	b	c	d	$f(a,b,c,d)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	x
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	x
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Les formes canoniques :

Les formes canoniques sont des représentations algébriques à conditions suivantes:

- Chaque terme contient **toutes les variables** de la fonction correspondante
- La forme canonique est **simplifiable**

On distinct 4 formes canoniques:

La première formes canonique: est une somme de produits à implantation par des portes ET reliées à une portes OU.

1. A chaque 1 de la variable de sortie, faire correspondre un produit des n variables d'entrée (dans TV ou TK).
2. Chaque terme de produit doit contenir toutes les variables d'entrée.
3. L'expression obtenue est généralement simplifiable.

Exemple:

$$f_1(x,y,z) = x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z + xyz$$

$$f_2(x,y) = xy + \overline{y} = xy + \overline{x}\,\overline{y} + x\overline{y}$$

La deuxième forme canonique est un produit de sommes à implantation par des portes OU reliées à des portes ET.

1. A chaque 0 de la variable de sortie, faire correspondre une somme des n variables d’entrée (dans TV ou TK).
2. Chaque terme de somme doit contenir toutes les variables d’entrée.
3. L’expression obtenue est généralement simplifiable.

Exemple:

a \ b	0	1
0	0	1
1	1	1

F1

a \ bc	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

F2

$$F1 = a + b \qquad F2 = (a+b+c)(\bar{a}+b+c)(a+\bar{b}+c)(\bar{a}+\bar{b}+c) = c$$

La troisième est la forme NON-ET (NAND) : on la déduit de la première forme canonique, elle conduit à des diagrammes logiques n’utilisant que des portes NAND.

$$f_1(x,y,z) = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + xyz$$

$$\overline{\overline{f}} = \overline{\overline{x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + xyz}}$$

$$= \overline{\overline{x\bar{y}\bar{z}} * \overline{\bar{x}y\bar{z}} * \overline{\bar{x}\bar{y}z} * \overline{xyz}}$$

Et la **quatrième** est la forme NON-OU (NOR) : à partir de la deuxième forme canonique, on obtient la quatrième forme canonique.

$$F2 = (a+b+c)(\overline{a}+b+c)(a+\overline{b}+c)(\overline{a}+\overline{b}+c)$$

$$\overline{\overline{F2}} = \overline{\overline{(a+b+c)(\overline{a}+b+c)(a+\overline{b}+c)(\overline{a}+\overline{b}+c)}}$$

$$= \overline{\overline{(a+b+c)} + \overline{(\overline{a}+b+c)} + \overline{(a+\overline{b}+c)} + \overline{(\overline{a}+\overline{b}+c)}}$$

Remarque:

Ces deux dernières formes sont implantées par un seul type de porte (NAND ou NOR).

La notion de Minitermes et Maxtermes

Variables			Mintermes		Maxtermes	
a	b	c	Terme	Désignation	Terme	Désignation
0	0	0	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	m_0	$a+b+c$	M_0
0	0	1	$\bar{a}\bar{b}c$	m_1	$a+b+\bar{c}$	M_1
0	1	0	$\bar{a}b\bar{c}$	m_2	$a+\bar{b}+c$	M_2
0	1	1	$\bar{a}bc$	m_3	$a+\bar{b}+\bar{c}$	M_3
1	0	0	$a\bar{b}\bar{c}$	m_4	$\bar{a}+b+c$	M_4
1	0	1	$a\bar{b}c$	m_5	$\bar{a}+B+\bar{c}$	M_5
1	1	0	$ab\bar{c}$	m_6	$\bar{a}+\bar{b}+c$	M_6
1	1	1	abc	m_7	$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$	M_7

La forme Minitermes est écrit à l'aide de première forme canonique.

Exemple:

$$f(a,b,c)=\bar{a}\bar{b}c+\bar{a}b\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}+abc$$

0 0 1	0 1 0	1 0 0	1 1 1
m_1	m_2	m_4	m_7
1	2	4	7

Donc f s'écrit comme suit:

$$f(a,b,c)=m_1+m_2+m_4+m_7$$
$$=\sum(1,2,4,7)$$

Il faut illustrer les variables de F

La forme minitermes

La forme Maxtermes est écrit à l'aide de deuxième forme canonique.

Exemple:

$$f(a,b,c) = \underbrace{\underset{0\quad 0\quad 0}{(a+b+c)}}_{\substack{M_0 \\ 0}}\underbrace{\underset{0\quad 1\quad 0}{(a+\overline{b}+c)}}_{\substack{M_2 \\ 2}}\underbrace{\underset{1\quad 0\quad 0}{(\overline{a}+b+c)}}_{\substack{M_4 \\ 4}}\underbrace{\underset{1\quad 1\quad 0}{(\overline{a}+\overline{b}+c)}}_{\substack{M_6 \\ 6}}$$

Donc f s'écrit comme suit:

$$f(a,b,c) = M_0 \bullet M_2 \bullet M_4 \bullet M_6$$

$$= \prod(0,2,4,6)$$

Il faut illustrer les variables de F

La forme maxtermes

Remarque:

$$f(a,b,c) = m_1 + m_2 + m_4 + m_7 = \sum(1,2,4,7) = \prod(0,3,5,6)$$

$$f(a,b,c) = M_0 \bullet M_2 \bullet M_4 \bullet M_6 = \prod(0,2,4,6) = \sum(1,3,5,7)$$

Exemple: Donner la forme minitermes et maxtermes de la fonction f suivante

$$f(a,b,c) = a + \overline{b}\,c = a\overline{b}\,\overline{c} + a\overline{b}\,c + ab\overline{c} + abc + \overline{a}\,\overline{b}\,c + a\overline{b}\,c$$

$$= m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_1 = \sum(1,4,5,6,7)$$

$$= M_0 \bullet M_2 \bullet M_3 = \prod(0,2,3)$$