Limites des fonctions numériques

Définition 1 : (limite en un point x_0).

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$, $\ell \in \mathbb{R}$ est la limite de f lorsque x tend vers x_0 ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 :\ 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Définition 2 : (limite à droite)

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle $]x_0, b[$, $\ell \in \mathbb{R}$ est la limite à droite en point x_0 de la fonction f ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 :\ 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \ell$.

Définition 3 : (limite à gauche).

Soit f une fonction définie au moins sur intervalle de la forme $]a, x_0[$, $\ell \in \mathbb{R}$ est la limite à gauche en point x_0 de la fonction f ssi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 :\ 0 < x_0 - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On écrit $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \ell$

Remarque: On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ au point x_0 ssi.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l.$$

Exemple: montrer que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0 : 0 < |x-2| < \alpha \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon$$

choix de l'intervalle d'étude $]1,3[$.

$$x \in]1,3[\Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x+2 < 5$$

$$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| < |x-2|\,5 < \varepsilon$$

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \qquad \left(\alpha = \frac{\varepsilon}{5}\right).$$

Théorème: (unicité de la limite).

Si f admet une limite au point x_0, cette limite est unique.

* **Limites infinies :**

Def 1 : Soit f une fonction définie ~~sur~~ au moins sur un intervalle de la forme $]x_0, x_0+a[$ ~~...~~ est la limite ~~...~~ à droite de f ssi

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall B > 0, \ \exists \alpha > 0 : 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) > B$$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall b < 0 \ \exists \alpha > 0 : 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow f(x) < b$

Déf 2 : Soit f une fonction définie ~~par~~ au moins sur un intervalle $]x_0 - \alpha, x_0[$.

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = +\infty$! $\forall b > 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x_0 - x < \alpha \Rightarrow f(x) > b$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = -\infty$: $\forall b < 0, \exists \alpha > 0 : 0 < x_0 - x < \alpha \Rightarrow f(x) < b$

* Limites, cas où x devient infini : $(-\infty)$ ou $(+\infty)$

Déf 1 : Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $(]x_0, +\infty[)$, $(]-\infty, x_0[)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a > 0 : x > a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a < 0 : x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Déf 2 : Soit f une fonction définie au moins sur intervalle $]x_0, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall b > 0, \exists a > 0 : x > a \Rightarrow f(x) > b$

On a aussi :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} [-f(x)] = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = \ell$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \lim\limits_{x \to +\infty} [-f(-x)] = +\infty$

Théorème: Soit f, g deux fonctions définis sur une même partie de $\mathbb{R}$ et admettant respectivement des limites ℓ, ℓ' au point x_0, Alors.

- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x \to x_0} [\lambda f(x)] = \lambda \ell$. $(\lambda \in \mathbb{R})$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell \cdot \ell'$
- $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell|$.
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$.

Théorème: Soient f, g et h trois fonctions définie au moins sur un intervalle de la forme

$D =]x_0 - a, x_0[\cup]x_0, x_0 + a[$

1) $\forall x \in D$; $\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

2) $\forall x \in D$; $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

3) $\forall x \in D$; $\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

. Ce théorème reste toujours valable dans le cas où $x \to \infty$, $x \xrightarrow{>} x_0$, $x \xrightarrow{<} x_0$.

forme indéterminée :

1) $\infty - \infty$; 2) $\frac{0}{0}$ 3) $\frac{\infty}{\infty}$ 4) $0.\infty$

5) 1^{∞} , 6) 0^0 , 7) ∞^0

- On remarque que les indéterminations de la forme ∞/∞, $0.\infty$ peuvent être ramenées à la forme $\frac{0}{0}$ en écrivant : $\frac{f}{g} = \frac{1/g}{1/f}$.

$f.g = \frac{f}{1/g}$; et parfois $\infty - \infty \to f+g = \frac{1+g/f}{1/f}$.

On résout parfois le problème par des transformations élémentaires.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+3)(x-3)}.$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x+3} = \frac{3+2}{3+3} = \frac{5}{6}$$

Et parfois on utilise le théorème de l'Hopital.

Théorème :

Si f et g sont deux fonctions dérivable au voisinage de a et si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ et ~~$\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$~~

$f(a) = g(a) = 0$, alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Exemple : $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} = \frac{0}{0}$ f. ind.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{2x - 1}{2x} = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$