g) $u_n = \frac{n^2}{(1+a)^n}$ $\left(-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}\right)$; h) $u_n = \frac{1+2+\dots+n}{1^2+2^2+\dots+n^2}$

i) $u_n = \frac{a^n+1}{a^{2n}+1}$ $(a>0)$; j) $u_n = 2^{-\sqrt{n}}$.

II/ Séries à termes quelconques :

– Séries absolument convergentes :

Définition : Soit $(\sum u_n)$ une série t.q. u_n est de signe quelconque. On dit que la série $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente si la série à termes positifs $(\sum |u_n|)_n$ est CV

$$\sum u_n \xrightarrow[\text{on construit}]{} \sum |u_n| \begin{cases} \nearrow \text{CV} \; ; \; (\sum u_n) \text{ absolument CV} \\ \searrow \text{DIV} \; \; (\sum u_n) \text{ absolument div} \end{cases}$$

Théorème : Soit $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série à termes quelconques. Si $(\sum u_n)$ absolument convergente alors $(\sum u_n)$ est convergente. La réciproque est fausse.

$$\left(\sum |u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV} \Rightarrow \left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV}.$$

$$\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV} \not\Rightarrow \left(\sum |u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ CV}.$$

Corollaire 1 : $\left(\sum |u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CV $\Rightarrow$ $(\sum u_n)$ CV. $\quad (P \Rightarrow Q)$

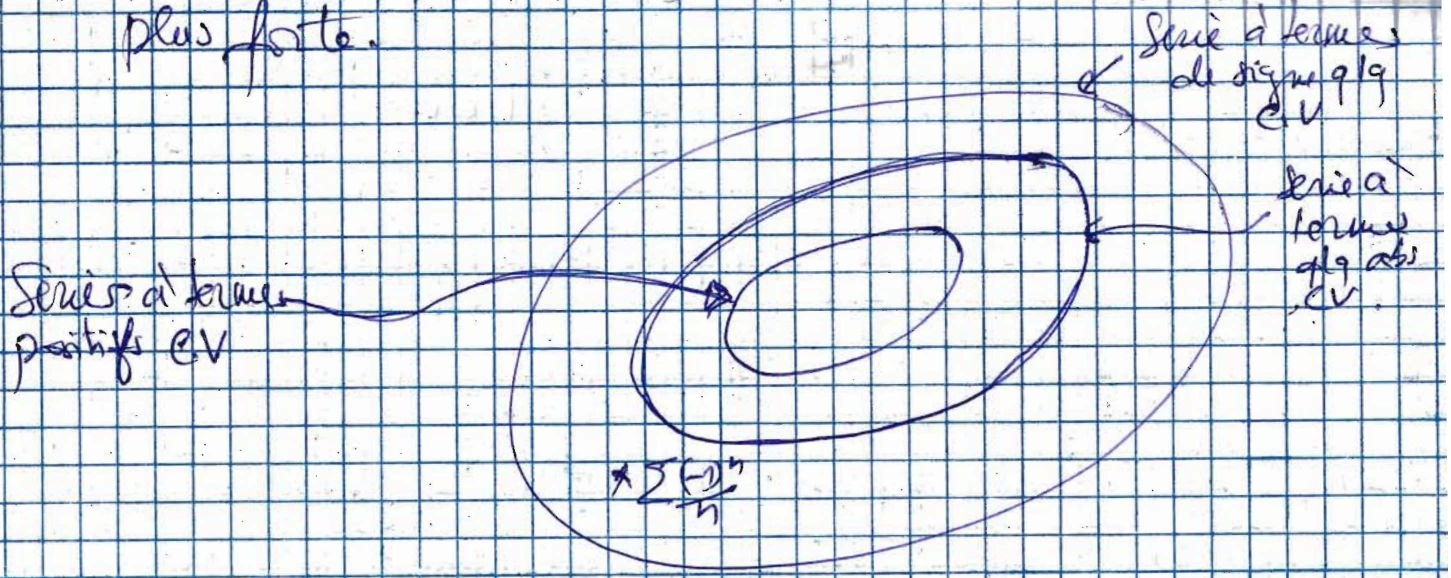
$$\Downarrow$$

Si $\left(\sum u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ div $\Rightarrow$ $\left(\sum |u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ div. $\quad (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

Exemple : $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n}$

On montre que cette série est CV et $\sum |u_n| = \sum \frac{1}{n}$ est une série divergente.

On dit la notion de $(\sum u_n)$ absolument convergente est plus forte.



$$\left(\sum u_n \,;\, u_n \geq 0\right) \text{ CV} \Leftrightarrow \left(\sum |u_n|\right) \text{ CV}.$$

Car $|u_n| = u_n$ (même suite)

1.13 : La règle d'Abel

On a vue que $(\sum u_n)$ CV et $(\sum v_n)$ CV

on a $\sum (u_n + v_n)$ CV et $\sum \lambda u_n$.

donc $(\mathcal{S}_c, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

→ $\sum u_n$ CV de signe q/q, $\sum v_n$ de signe q/q (CV).

$\sum u_n \cdot v_n$ converge ?? quelles sont les conditions sur u_n et v_n pour que $(\sum u_n \cdot v_n)$ CV. [règle d'Abel]

Définition : Soit (v_n) une suite. On dit que (v_n) est à variation bornée si la série $\left(\sum |v_n - v_{n+1}|\right)$ est convergente.

Proposition n°1 : Si la (v_n) est monotone et bornée, alors (v_n) est à variation bornée.

(La suite (v_n) est nécessairement convergente).

Théorème 1 (Règle d'Abel) : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ où u_n et v_n sont de signes qlq et vérifiant :

a) La suite des sommes partielles $\{S_n : S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n\}$ est bornée c'est à dire $\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} : |S_n| = |u_0 + u_1 + \dots + u_n| \leq M$

b) La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à variation bornée.

$$\left.\begin{array}{l} (v_n) \text{ est monotone} \\ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow (v_n) \text{ à variation bornée}$$

c) $\lim_{n \to \infty} v_n = 0$

Alors la série $\sum u_n v_n$ est convergente.

Théorème 2 : [Conséquence de la règle d'Abel].

Soient $\sum u_n$ $\sum v_n$ deux séries de signes qlq telles que

a') La série $(\sum u_n)$ est convergente

b') La suite (v_n) monotone et bornée

Alors la série : $(\sum u_n v_n)$ est convergente

Preuve : (théorème 2) :

a) Abel : a') $\Rightarrow \{S_n : S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n\}$ est convergente

ceci implique $\{S_n\}$ est bornée

a) Abel donc a') $\Rightarrow$ a) Abel.

b) $\left.\begin{array}{l} (v_n) \text{ monotone} \\ (v_n) \text{ bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à variation bornée

b') $\Rightarrow$ b) Abel.

c) on b') (v_n) monotone est bornée

(v_n) $\begin{cases} \text{croissante + majorée} & (v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{cv} \ell \\ \text{décroissante + minorée} & (v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{cv} \ell \end{cases}$

On applique la règle d'Abel :

$\boxed{\sum u_n (v_n - \ell)}$

a) $(a) \longrightarrow (a)$

b) $\{v_n - \ell\}$ monotone et bornée.

$(v_{n+1} - \ell) - (v_n - \ell) = v_{n+1} - \ell - v_n + \ell = v_{n+1} - v_n$

(v_n) monotone $\Rightarrow \{v_n - \ell\}$ monotone

(v_n) bornée $\rightarrow \{v_n - \ell\}$ bornée.

$\{v_n - \ell\}$ est à variation bornée.

c) $v_n - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

de (a), (b) et (c) $\xrightarrow[\text{d'Abel}]{\text{Règle}}$ $\sum u_n (v_n - \ell)$ est convergente.

On a : $\sum u_n$ conv $\rightarrow \sum \ell . u_n$ CV

$u_n . v_n = u_n (v_n - \ell) + u_n \ell$

$\left.\begin{array}{l} \sum u_n . \ell \quad CV \\ \sum u_n (v_n - \ell) \; CV \end{array}\right\} \Rightarrow \sum (u_n v_n) + (v_n - \ell) u_n \quad CV$

$\Rightarrow \sum u_n v_n$ CV.

$\left\{\begin{array}{l} (\sum u_n) \text{ conv} \\ (v_n) \text{ monotone et bornée} \end{array}\right\} \rightarrow \sum u_n v_n$ CV

$\left\{\begin{array}{l} (\sum v_n) \text{ cv} \\ (u_n) \text{ monotone et bornée} \end{array}\right\} \rightarrow \sum u_n v_n$ CV