I/. Introduction : une série entière est un cas particulier de séries de fonctions.

$$\sum a_n x^n \; ; \; \sum u_n \; : \; u_n(x) = a_n x^n, \; a_n \in \mathbb{R}, \; \forall n$$

$$a_n x^n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$\{S_n\} : \forall n : \; S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$
$$S_n = a_0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n$$

$$\left(\sum u_n\right)_{n \in \mathbb{N}} ; \; \{S_n\}, \; \forall n : S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$\left(\sum a_n x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}, \; \{S_n\} ; \; \forall n \; S_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$S_n(x)$ est un polynôme de degré n.

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) \overset{\text{notation}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow S(x) = \sum_{k=0} a_k x^k$$

$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : \sum a_n x^n \text{ convergente}\}$ = Domaine de convergence

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \lim (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) \text{ existe.}$$

$$\underset{-R}{]} \; \underset{0}{|} \; \underset{R}{[} \longrightarrow x$$

$\mathcal{D} =]-R, R[$, R rayon de convergence

R : R fini, infini, 0

$\sum a_n x^n$ convergente dans $]-R, R[$

$\sum a_n x^n$ divergente dans $]-\infty, R[\cup]R, +\infty[$.

comment calculer R ??

dans $]-R, R[$: $S(x) = \lim (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = \dots$
$n \to \infty$

dans $]-R, R[$: $S(x)$ a toute les proprietes de fonctions continuité, dérivabilité, ...

Exemple : $\sum x^n$, $a_n = 1$, $\forall n$. Calculer R.

$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = ?$

x^n : suite geométrique de raison x 1ere terme 1.

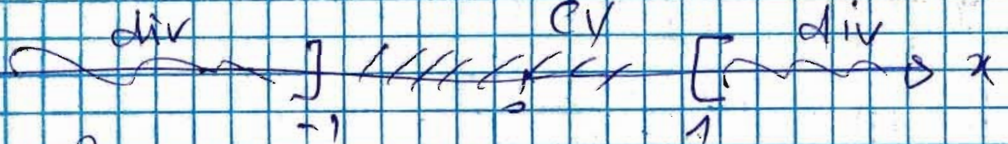
$S_n(x) = 1 \, \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$

si $|x| < 1$: $x^{n+1} \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}$.

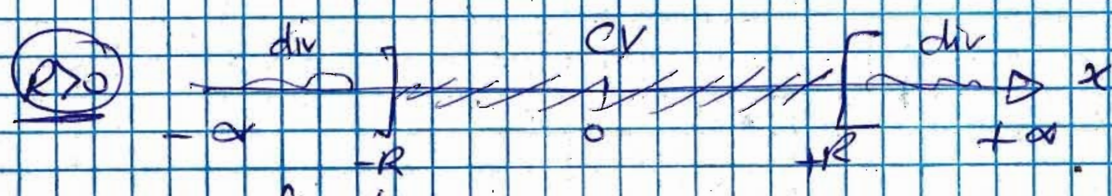
$(\sum x^n)$ CV sur $]-R, R[$

$(\sum x^n)$ div dans $]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$

le rayon de convergence $R = 1$.



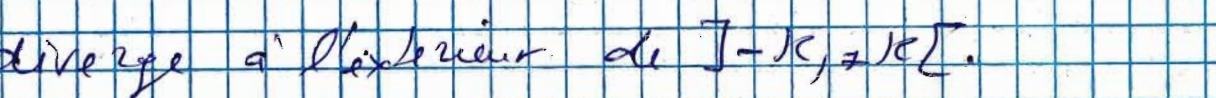
2/ Rayon de convergence :

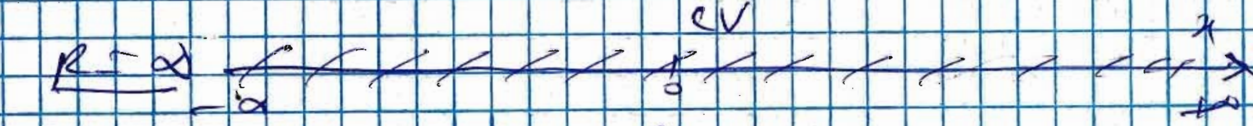


$(\sum a_n x^n)$; $\exists R$ $\quad R \to$ fini > 0, $\to 0$, $\to \infty$

$(\sum a_n x^n)$ converge sur $]-R, +R[$

$(\sum a_n x^n)$ diverge à l'extérieur de $]-R, +R[$.





Calcul du rayon de Cv d'une série entière, Cas n°2

Théorème: Soit $(\sum a_n x^n)$ une série entière, $a_n \in \mathbb{R}$

→ Supposons $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$, l fini.

~~a) si $l>0$~~ alors $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ et la série

$(\sum a_n x^n)$ converge absolument dans $]-R,+R[$

et diverge dans $]-\infty,-R[\cup]+R,+\infty[$.

$R = \frac{1}{l}$ si $l \neq 0$.

→ si $l=0$, alors la série $\sum a_n x^n$ converge

absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$

Conséquence: $R = \frac{1}{l}$ si $l>0$ avec $l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$R = +\infty$ si $l=0$ $= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Preuve:

1) si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ alors $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ a une limite

et $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = l$.

$$\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \Rightarrow \left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$$

la réciproque est fausse.

Hypothèse: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l > 0$ on veut démontrer $\sum a_n x^n$ est

$]-\infty, -\frac{1}{\ell}[\cup]\frac{1}{\ell}, +\infty[$.

Considérons la série : $\sum |a_n x^n|$: c'est une série à termes positifs.

$$\sum u_n = \sum |a_n x^n|$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x|.$$

*a) si $\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x|\right) < 1$ alors $\sum |a_n x^n|$ CV.

*b) si $\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x|\right) > 1$ alors $\sum |a_n x^n|$ Div.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x|\right) = |x| \cdot \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \cdot \ell$

Si $|x| \cdot \ell < 1 \rightarrow \sum |a_n x^n|$ Conv

c'à'd : si $|x| < \frac{1}{\ell} \rightarrow \sum |a_n x^n|$ Conv.

b) si $|x| \cdot \ell > 1$ alors $\sum |a_n x^n|$ div.

c'ad : si $|x| > \frac{1}{\ell} \rightarrow \sum |a_n x^n|$ div.

Donc $\exists\, R = \frac{1}{\ell}$ tq $(\sum a_n x^n)$ cov absolument

sur $]-R, +R[$ et diverge sur $]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$

$\Rightarrow R$: rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

c) Supposons que $\ell = 0$ $\lim_{n\to\infty} |x| \cdot \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \sum |a_n x^n|$ est CV.

d'où alors $\sum a_n x^n$ est abs CV dans $\mathbb{R}$.

$R = \frac{1}{\ell}$ $(\ell = 0)$ $\Rightarrow R = \frac{1}{0} = \infty$ $\Rightarrow R = \infty$.

Théorème 2 : Soit $\sum a_n x^n$ une série, Supposons que $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \ell$, ℓ fini alors $R = \frac{1}{\ell}$ si $\ell > 0$

$R = +\infty$ si $\ell = 0$

Preuve : on applique le critère de Cauchy à la série $\sum |a_n x^n|$.

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \ell.$$

$\Rightarrow$ si $\ell > 0$ et si $|x| \cdot \ell < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\ell} \Rightarrow \sum a_n x^n$ est abs CV.

$\Rightarrow |x| \cdot \ell > 1 \Rightarrow |x| > \frac{1}{\ell} \Rightarrow \sum a_n x^n$ est abs div.

$\Rightarrow R = 1/\ell$

Si $\ell = 0$ $\lim \sqrt[n]{|a_n| |x|^n} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \ell = 0 < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

donc la série $\left(\sum a_n x^n\right)$ CV abs sur $\mathbb{R} \Rightarrow R = \infty$
$= \frac{1}{0} = \infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Toute série entière admet un rayon de convergence}}$ $\triangle$

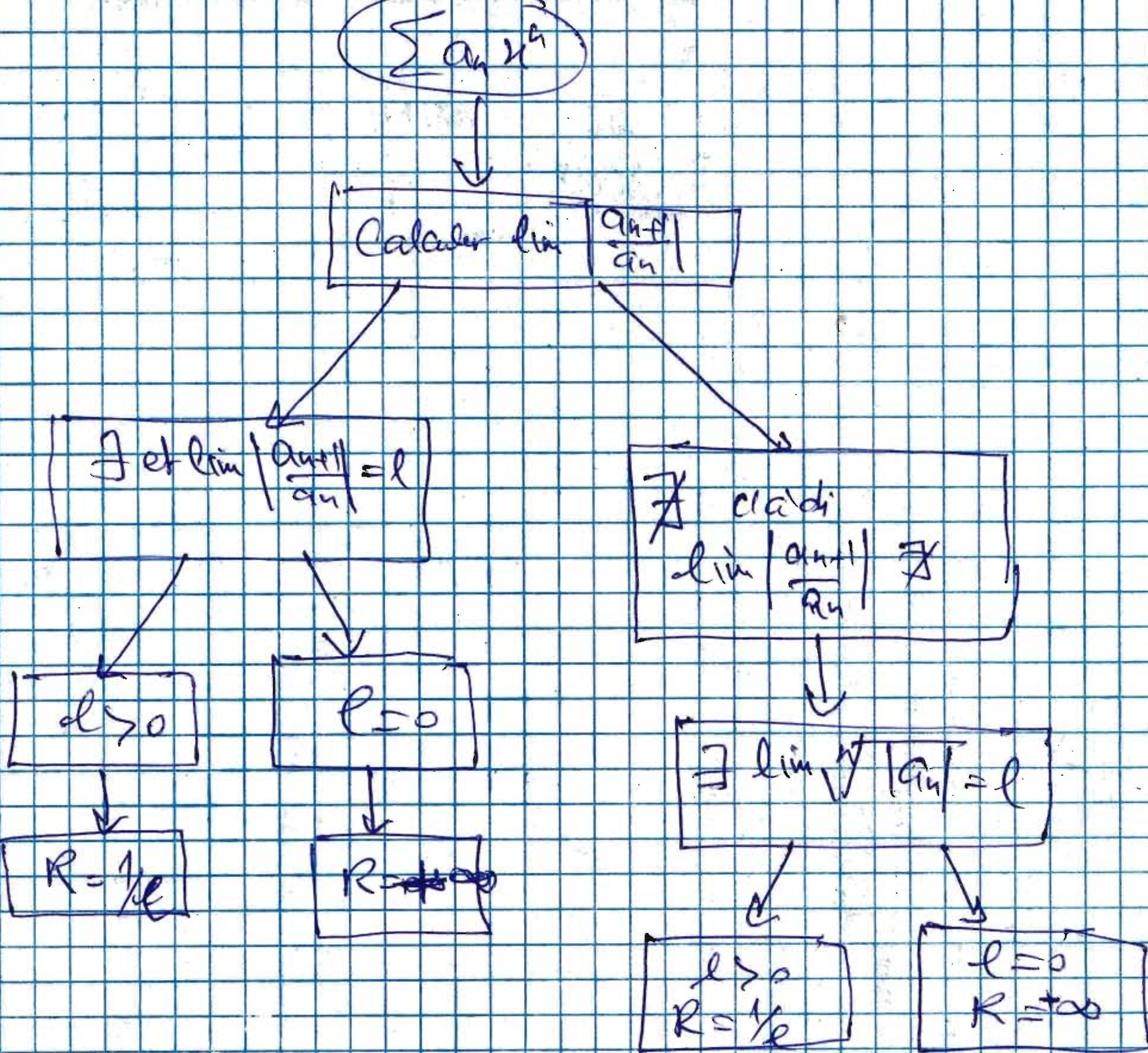
Problème : si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \nexists$ et $\lim \sqrt[n]{|a_n|} \nexists$

Comment calculer le rayon de convergence.

$\boxed{\text{Remarque : } \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ peut } \nexists \text{ et } \lim \sqrt[n]{|a_n|} \exists.}$

Voir Théorème 1 (Réciproquement fausse).

3/ Méthode de calcul du Rayon de CV



Calcul de rayon de convergence cas où $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \nexists$

Remarque :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

$$(P) \Rightarrow (Q)$$

$$(\overline{Q}) \Rightarrow (\overline{P}).$$

Si $\nexists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Rappel :

Suite $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}_{n\geq 0}$ → majorée → $\overline{\lim}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = l$

ou → non majorée → $\overline{\lim}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = +\infty$

Si $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \exists$ et égale à $l \Rightarrow \overline{\lim}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \underline{\lim}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = l$

Théorème 3 : Soit $\left(\sum a_n x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une série entière tq.

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \nexists$. Notons par

$l = \overline{\lim}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ → finie ou → $+\infty$

Alors : le rayon de convergence de la série de $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{l}$ si l est finie

$R = 0$ si $l = +\infty$.

Calcul de rayon de convergence de $\sum a_n x^n$

Cas où : $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \nexists$

$\overline{\lim}_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \ell$

ℓ fini : $R = \frac{1}{\ell}$

$\sum a_n x^n$ cv abs sur $]-R, +R[$ et div ailleurs

$\ell = +\infty$, $R = 0$

$\sum a_n x^n$ cv abs seulement au point $x = 0$

$\overline{\lim}$ tj $\exists$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = +\infty \Rightarrow R = 0$

Rappel sur la notion de limite sup :

Soit (α_n) une suite réelle, [$\lim\sup(\alpha_n) = \overline{\lim}\,\alpha_n$]

Si $\lim_{n\to\infty} (\alpha_n) = \ell$ alors $\overline{\lim}\,(\alpha_n) = \underline{\lim}\,(\alpha_n)$

$= \underline{\lim}\,(\alpha_n) = \ell$.

→ Pour demontrer que $\lim_{n\to\infty} (\alpha_n) \nexists$ il suffit de demontrer $\overline{\lim}_{n\to\infty} (\alpha_n) \neq \underline{\lim}_{n\to\infty} (\alpha_n)$.