**Université ZIANE Achour - Djelfa**
**Faculté des Sciences Exactes et Informatique**
**Département de Chimie**
**Niveau : L2 Chimie SC.** **Date : 17/01/2017, Durée 1H30**

## Matière : Mathématiques Appliquées

### Exercice N°1 (06 points) :

Calculer les primitives suivantes :

$I_1 = \int \left( x + \frac{1}{x} \right) dx$, 1 $\quad I_2 = \int \frac{\ln x}{x} dx$, 1 $\quad I_3 = \int \frac{1}{x \ln x} dx$, 1 $\quad I_4 = \int \frac{\cos x}{(\sin x)^n} dx \ (n \succ 1)$, 1

$I_5 = \int (3x^2 + 1)(x^3 + x + 2)^q \, dx$, $q \in Q$.

2

### Exercice N°2 (06 points) :

1,5 1,5 1,5 1,5

Etudier la nature des séries suivantes : $\sum \frac{1}{n}, n \geq 1$, $\quad \sum \frac{1}{\ln(n)}, n \geq 2$, $\quad \sum \left( \frac{1}{n^2} \right), n \geq 1$, $\quad \sum \left( \frac{2n+1}{7n+5} \right)^n$

### Exercice N°3 [au choix avec l'exercice N°4] (08 points) :

1) Soit un domaine $D$ de $\mathbb{R}^2$ défini par : $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq \alpha^2, \alpha \succ 0 \right\}$,
   - **a)** Dessiner le domaine $D$ dans un repère orthonormé. 1
   - **b)** Le domaine $D$ est-il une boule ouverte ou fermée. Définir la norme utilisée. 1 1
2) Calculer l'intégrale double ($I$) sur le domaine $D$ : $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ . 4
3) Déduire le moment d'inertie d'un disque plein homogène par rapport à son centre de masse « $O$ ». 1

### Exercice N°4 [au choix avec l'exercice N°3] (08 points) :

On se propose d'intégrer sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2 \qquad \textbf{(E0)}$$

1) Déterminer $a \in \ ]0, +\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière $y_0$ de **(E0)**. 2
2) Montrer que le changement de fonction : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation **(E)** en équation différentielle suivante :

$$z'(x) + \left( 6x + \frac{1}{x} \right) z(x) = 1 \qquad \textbf{(E1)}$$ 2

3) Intégrer **(E1)** sur $]0, +\infty[$. 2
4) Donner toutes les solutions de **(E0)** définies sur $]0, +\infty[$. 2

**Bon courage**

Corrigé type. Matière Mathématiques appliquées.

## $L_2$ électricité

**Exo N°=1** (6pts) ; Calcul des intégrales :

$$I_1 = \int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \int 1.(x)^1 dx + \int 1.(x)^{-1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C_1 ; \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

(1)

$$I_2 = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \left(\frac{1}{x}\right) \cdot (\ln(x))^1 dx = \frac{(\ln(x))^2}{2} + C_2.$$

(1)

$$I_3 = \int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int \left(\frac{1}{x}\right) (\ln(x))^{-1} dx = \ln|\ln(x)| + C_3.$$

(1)

$$I_4 = \int \frac{\cos(x)}{(\sin(x))^n} dx \ (n>1) ; \quad I_4 = \int (\cos(x)) (\sin(x))^n dx.$$

$$= \frac{(\cos(x))^{n+1}}{n+1} + C_4.$$

(1)

$$I_5 = \int (3x^2+1)(x^3+x+2)^q dx, \quad q \in \mathbb{Q}.$$

$$I_5 = \begin{cases} \dfrac{(x^3+x+2)^{q+1}}{q+1} + C_5' & \text{si } q \in \mathbb{Q} - \{-1\}. \ (1) \\ \ln|x^3+x+2| + C_5'' & \text{si } q = -1 \ (1) \end{cases}$$

(1).

EXO N°2 : Etude de la nature des séries suivantes :

a) $\sum \frac{1}{n}, n>1$. $= \int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx = Ln|x|\Big]_2^{+\infty} = Ln|+\infty| - Ln|2| = +\infty$

$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right)$ D.V. 1,5

b) on $n > Ln(n)$, $n \geq 2$ donc $\frac{1}{n} < \frac{1}{Ln(n)}$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{Ln(n)} > \frac{1}{n} \\ \left(\sum \frac{1}{n}\right) D.V \end{array} \right. \Longrightarrow \left(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{Ln(n)}\right) DV$ 1,5

c) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_1^{+\infty} (1.)(x)^{-2} dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^{+\infty}$

$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = -\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right) = -(0-1) = 1$

Donc la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$ C.V 1,5

d) $\sum \left(\frac{2n+1}{7n+5}\right)^n$ ; posons $U_n = \left(\frac{2n+1}{7n+5}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{7n+5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(7+\frac{5}{n})} = \frac{2}{7} < 1$

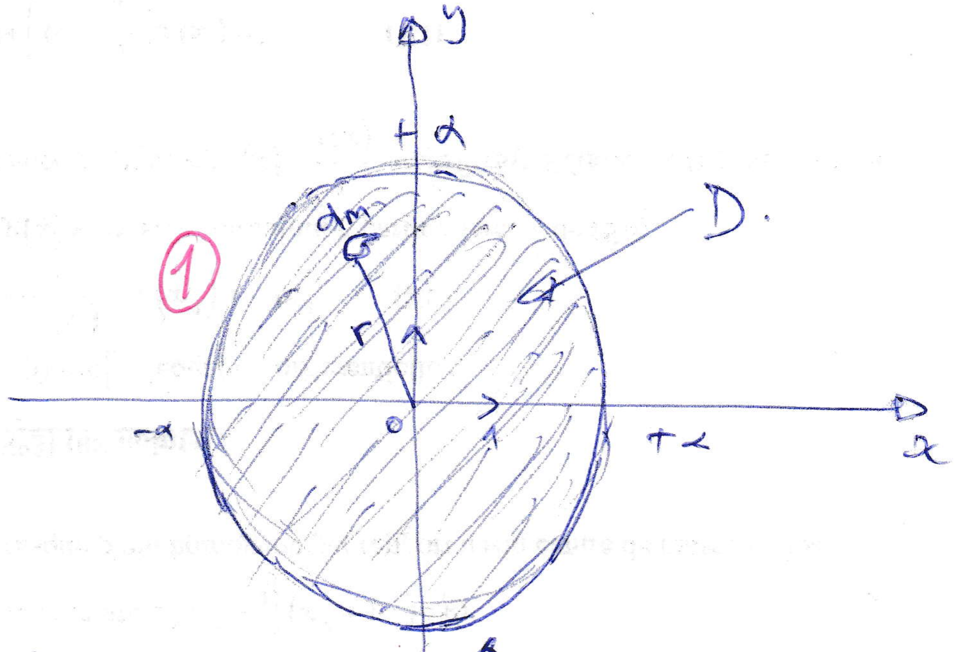
Donc la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2n+1}{7n+5}\right)^n$ C.V. 1,5

Exo N°3 (au choix avec Exo n°4)

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq \alpha^2,\ \alpha > 0\}$.

a)

1




b) D : est une boule fermée de rayon $(\alpha)$. 1

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(x,y) \longmapsto \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}.$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|(x,y)\|_2 < \alpha\}.$$

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} < \alpha \Rightarrow x^2+y^2 < \alpha^2.$$

→ Norme utilisée donc est la norme 2. 1

2) Calcul de l'intégrale : $I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$.

changement de variable $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 1 (coordonnées polaires)

$\begin{cases} r \in [0, \alpha[ \\ \theta \in [0, 2\pi[ \end{cases}$.

3

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) = r\,(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}) = r.$$

1

$$dx\,dy = |J|\,dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta$$ 0,5

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{D'} (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \iint_{D'} r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta = \iint_{D'} r^3\,dr\,d\theta.$$

$$D' = \left\{ (r,\theta) \,/\, \begin{array}{l} r \in [0,\alpha] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right\}$$

$$I = \int_0^{\alpha} r^3\,dr \int_0^{2\pi} d\theta = \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\alpha} \left.\theta\right|_0^{2\pi} = \frac{\alpha^4}{4} \cdot 2\pi$$

$$\boxed{I = \frac{\pi\alpha^4}{2}}.$$ 1,5

3) Déduction de moment d'inertie d'un disque plein homogène par rapport à son axe de rotation en O (centre de masse).

$I/_O = \int r^2\, dm$ avec $r^2 = x^2 + y^2$ et $dm = \sigma\, ds$

σ : masse surfacique.

$\sigma = \frac{dm}{ds} = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi \alpha^2}$ 0,5 (car matériaux homogène)

$I/_O = \int (x^2+y^2)\,\sigma\, ds = \sigma \iint_D (x^2+y^2)\, dx\, dy = \sigma \cdot \frac{\pi \alpha^4}{2}$.

$I/_O = \left(\frac{M}{\cancel{\pi \alpha^2}}\right) \cdot \frac{\cancel{\pi} \alpha^4}{2} = \frac{1}{2} M \alpha^2$ ; $\boxed{I/_O = \frac{1}{2} M \alpha^2}$.

0,5

---

## EXO N°4 (au choix avec Exo n°3)

On l'équation $(E_0)$ : $y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2$

1/ Détermination de $\alpha$ / $y = \alpha x$ solution de $(E_0)$.

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = \alpha - \frac{\alpha x}{x} - (\alpha x)^2 = -9x^2$$

$$= -\alpha^2 x^2 = -9x^2 \Rightarrow \alpha^2 = 9$$

2

$$\Rightarrow \alpha = 3 \text{ car } \alpha \in ]0, +\infty[.$$

donc $y_0(x) = 3x$ solution particulière de $(E_0)$.

2) Montrons que : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation $(E_0)$ en $(E_1)$ / $z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1$.

Calculons : $\cancel{y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)} - 3 + \frac{1}{x z(x)} +}$

$\cancel{-9x^2 + \frac{6x}{z(x)} - z^2(x) = -9x^2}$

5

$$y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}.$$

$$y'(x) = 3 + \frac{z'(x)}{z^2(x)}$$

$$\frac{y(x)}{x} = 3 - \frac{1}{x z(x)}$$

$$y^2(x) = \left(3x - \frac{1}{z(x)}\right)^2 = 9x^2 - \frac{6x}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}.$$

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = \left(3 + \frac{1}{z^2(x)}\right) - \left(3 - \frac{1}{x z(x)}\right) - \left(9x^2 - \frac{6x}{z(x)} + \frac{1}{z^2(x)}\right)$$

$$= \cancel{3} + \frac{z'(x)}{z^2(x)} - \cancel{3} + \frac{1}{x z(x)} - \cancel{9x^2} + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{z^2(x)} = \cancel{-9x^2}$$

$$\frac{z'(x)}{z^2(x)} + \frac{1}{x z(x)} + \frac{6x}{z(x)} - \frac{1}{z^2(x)} = 0.$$

$$\frac{z'(x)}{z^2(x)} + \frac{1}{x z(x)} + \frac{6x}{z(x)} = \frac{1}{z^2(x)}$$

$$z'(x) + \frac{1}{x} z(x) + 6x z(x) = 1 \quad 2$$

$$\boxed{z'(x) + \left(\frac{1}{x} + 6x\right) z(x) = 1} : (E1)$$

3 Intégration de l'équation (E1) sur $[0, +\infty[$.
(Méthode de la variation de la constante)

a) Solution de l'équation homogène : $z_H(x)$. 1

$$z'(x) + \left(\frac{1}{x} + 6x\right) z(x) = 0.$$

$$z'(x) = -\left(\frac{1}{x} + 6x\right) z(x)$$

$$\frac{dz}{dx} = -\left(\frac{1}{x} + 6x\right) z$$

$$\frac{dz}{z} = -\left(\frac{1}{x} + 6x\right) dx.$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \left(\frac{1}{x} + 6x\right) dx = -\ln(x) - 3x^2 + c$$

$$\ln|z| = -\ln(x) - 3x^2 + c$$

$$z = e^{(-\ln(x) - 3x^2) + c} = k e^{-\ln(x) - 3x^2}$$

$$\boxed{z_H(x) = k e^{-(\ln(x) + 3x^2)}}$$ solution de l'équation homogène (sans second membre).

b) Solution particulière : cherchons une solution particulière de la forme $z_0(x) = k(x) e^{-\ln(x) - 3x^2}$.

$$z_0'(x) = k'(x) e^{-\ln(x) - 3x^2} + \left(-\frac{1}{x} - 6x\right) k(x) e^{-\ln(x) - 3x^2}$$

$$z_0'(x) + \left(\frac{1}{x} + 6x\right) z(x) = k'(x) e^{-\ln(x) - 3x^2} + \underbrace{\left(-\frac{1}{x} - 6x\right) k(x) e^{-\ln(x) - 3x^2} + \left(\frac{1}{x} + 6x\right) z(x)}_{0} = 1$$

7

$$k'(x) \cdot e^{-\ln(x) - 3x^2} = 1 \Rightarrow k'(x) = e^{\ln(x) + 3x^2}$$

$$\Rightarrow k'(x) = e^{\ln(x)} \cdot e^{3x^2}$$

$$\Rightarrow k'(x) = x\, e^{3x^2}$$

$$k(x) = \int x \, e^{3x^2} dx \quad 0{,}5$$

$$z = z_H + z_0 \quad 0{,}5$$

4) Solution de $(E_0)$ :

$$\begin{cases} y(x) = y_0(x) - \dfrac{1}{z(x)} \\ \cancel{\text{avec } y(x) = y_H(x) + y_0}(x). \\ z(x) = z_H(x) + z_0(x). \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z_H(x) + z_0(x)}} \quad 2$$