Université ZIANE Achour - Djelfa
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Chimie
Niveau : L2 Chimie SC.

Date : 04/02/2018, Durée 01H30

Examen de la matière : Mathématiques Appliquées

Exercice N°1 (05 points) :

Calculer les primitives suivantes :

1 1 1

$$I_1 = \int \left(-\sin(2x) + \frac{4}{\cos^2(x)} \right) dx \ , \ I_2 = \int \frac{\sqrt{(\ln x)^3}}{x} dx \ , \ I_3 = \int \frac{1}{x\sqrt{(\ln x)^3}} dx \ ,$$

1 1

$$I_4 = \int \frac{2\cos x}{(\sin x)^n} dx \ \ (n \succ 1), \ I_5 = \int (6x^2+2)(x^3+x+2)^{q+3} dx \ , \ q \in Q \ .$$

Exercice N°2 (05 points) :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(E): y'' + 2y' + y = 2$$

y_H 2
y_p 2
y 1

Exercice N°3 (05 points) :

1) Soit un domaine D de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq R^2, R \succ 0 \right\},$$

a) Dessiner le domaine D dans un repère orthonormé. 1

b) Le domaine D est-il une boule ouverte ou fermée. Définir la norme utilisée. 1 1

2) Calculer l'intégrale double (I) sur le domaine D :

$$I = \iint_D dx dy \ .$$ 1,5

3) Déduire la surface du disque. 0,5

Exercice N°4 (05 points) :

Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2-1}, n \geq 2, \quad \sum \frac{1}{\ln(n^2)}, n \geq 2, \quad \sum \left(\frac{1}{n^4} \right), n \geq 1, \quad \sum \left(\frac{3n^2+2}{9n^2+7} \right)^n$$

1 1,5 1,5 1

Bon courage

Corrigé type : Mathématiques appliquées
L2-chimie 2017/2018.

Exo N°1 (05 points)

Calcul des intégrales :

$$I_1=\int\left(-\sin(2x)+\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx=\frac{1}{2}\cos(2x)+4\,tg(x)+C_1,\ C_1\in\mathbb{R}$$ 1

$$I_2=\int\frac{\sqrt{(\ln(x))^3}}{x}dx=\int\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{(\ln(x))^3}\,dx=\int\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C_2,\ C_2\in\mathbb{R}.$$ 1

$$=\frac{(\ln(x))^{5/2}}{5/2}+C_2=\frac{2}{5}\sqrt{(\ln(x))^5}+C_2=\frac{2}{5}\sqrt{(\ln(x))^5}+C_2,\ C_2\in\mathbb{R}.$$

$$I_3=\int\frac{dx}{x\sqrt{(\ln x)^3}}=\int\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{(\ln(x))^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}+C_3,\ C_3\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{(\ln(x))^{-1/2}}{-1/2}+C_3=-2\,\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}+C_3=\frac{-2}{\sqrt{\ln(x)}}+C_3.$$ 1

$$I_4=\int\frac{2\cos x}{(\sin x)^n}dx=\int 2\cos x\,(\sin x)^n dx=\frac{2(\sin x)^{n+1}}{n+1}+C_4,\ C_4\in\mathbb{R}.$$ 1

$n\neq-1$
$n>1$

$$I_5=\int(6x^2+2)(x^3+x+2)^{q+3}dx=\begin{cases}2\cdot\dfrac{(x^3+x+2)^{q+3+1}}{q+3+1}+C_5,\ q+3\neq-1\\ 2\ln|x^3+x+2|+C_5'\ \text{si}\ q+3=-1\end{cases}$$

$q\in\mathbb{Q}$

$$=\begin{cases}2\cdot\dfrac{(x^3+x+2)^{q+4}}{q+4}+C_5\ \text{si}\ q\neq-4 & 0{,}5\\ 2\ln|x^3+x+2|+C_5'\ \text{si}\ q=-4 & 0{,}5\end{cases}$$ 1

Exo N° 2 : Résolution de l'équation différentielle dans $\mathbb{R}$.

$$y'' + 2y' + y = 2 \quad \text{.....} \quad (E)$$

a) Solution de l'équation homogène (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$

l'équation caractéristique de (E_0) : $r^2 + 2r + 1 = 0$

$: (r+1)^2 = 0 \Rightarrow r = -1$

$r_1 = r_2 = -1$ (solution double), donc :

$y_H = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{y_H = (C_1 + C_2 x) e^{-x}}$ 2

b) La solution particulière de (E).

On constate que $y = 2$ est solution (E) :

vérification : $(2)'' + 2(2)' + 2 = 2 \Rightarrow 2 = 2$, donc

$\boxed{y_p = 2}$ 2 est solution particulière de (E).

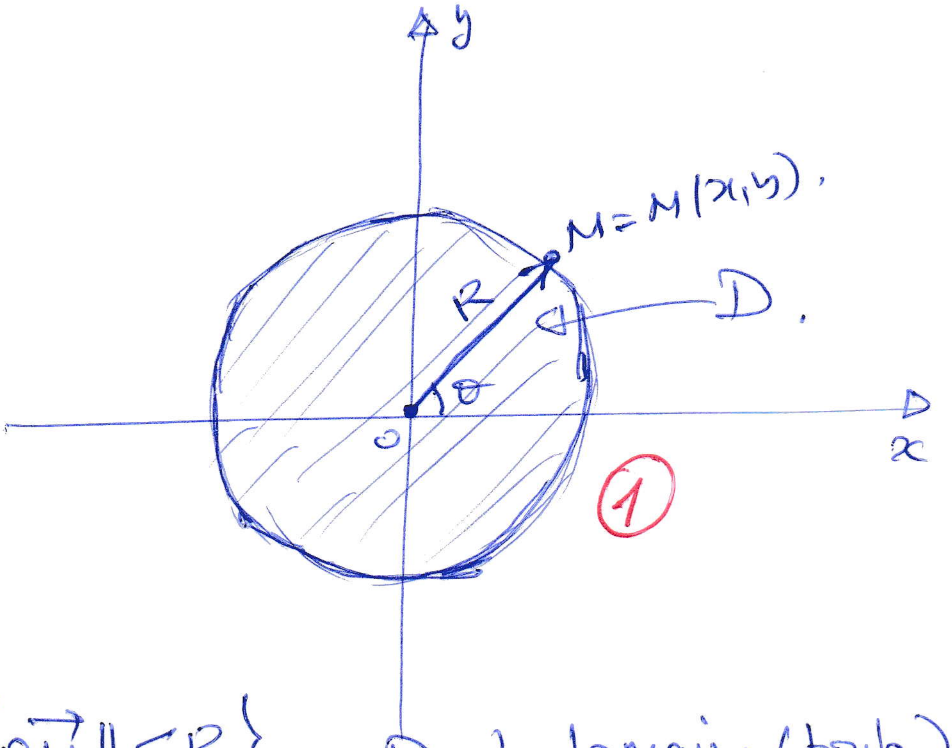
c) La solution générale de (E) est :

$$y = y_H + y_p \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + 2 \\ \text{avec } C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R} \end{array}}$$ 1

EXO N°3 :

① $D \subset \mathbb{R}^2$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq R^2, R>0\}$.

ⓐ Dessin du domaine D dans un repère orthonormé :



1

ⓑ

$D = \{M(x,y) / \|\vec{OM}\|_2 \leq R\}$, D est domaine (boule) fermée et la 1 norme utilisée est la norme "2"

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(x,y) \longmapsto \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$$ 1

② Calcul d'intégrale double I

$I = \iint_D dx\,dy = ?$

0,5

changement de variables $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ coordonnées polaires.

calcul du jacobien $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$

$$J = r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) = r\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1} = r$$ 0,25

donc $dxdy = |J|\,drd\theta = r\,drd\theta$. avec $\underbrace{\begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}}_{D'}$. 0,25

$$I = \iint_D dxdy = \iint_{D'} r\,drd\theta = \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta .$$

$$I = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi R^2$$ 0,5

③ Deduction de la surface de disque.

$$S(\text{Disque}) = I = \iint_D dxdy = \iint_{D'} r\,drd\theta = \pi R^2 .$$ 0,5

Exo N° 4 : Etude de la nature des série

① $\sum_{n\geq 2} U_n$ avec $U_n = \frac{(-1)^n}{n^2-1}$.

$$|U_n| = \frac{|(-1)^n|}{|n^2-1|} = \frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{C.V}$$ 1

donc la serie $\sum_{n\geq 2} U_n$ est absolument convergente

donc la serie est aussi convergente.

② $\sum_{n\geq 2} U_n$, $U_n = \frac{1}{Ln(n^2)} = \frac{1}{2Ln(n)} \sim \frac{1}{Ln(n)}$.

$$n \geq Ln(n) \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{Ln(n)}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{la serie } \sum \frac{1}{n} \text{ (D.V)} \\ \text{et } \frac{1}{n} \leq \frac{1}{Ln(n)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la serie } \sum \frac{1}{Ln(n)} \text{ D.V}$$

et aussi $\sum \frac{1}{2Ln(n)}$ diverge. 1,5

③ $\sum_{n\geq 1} U_n$, $U_n = n^4$.

on a $n^2 \leq n^4 \Rightarrow \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^4}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^4} \\ \sum \frac{1}{n^2} \text{ . CV} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la serie } \sum \frac{1}{n^4} \text{ C.V.}$$ 1,5

④ $\sum_{n\geq 0} u_n$; $u_n = \left(\frac{3n^2+2}{9n^2+7}\right)^n$.

Calculons $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+2}{9n^2+7} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2}\left(\frac{3+2/n^2}{9+7/n^2}\right)$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3+2/n^2}{9+7/n^2} = \frac{3+0}{9+0}$

$= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ($\neq 0$ et < 1).

Donc la serie $\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{3n^2+2}{9n^2+7}\right)^n$ C.V. 1