Université des sciences et de la Technologie H. Boumediene Alger

Les cours de la Faculté de physique

Physique 2

Electrostatique-électrocinétique

Domaine MI

Dr Nouri Sabrina Eps Laziri
Pr Ghezal Abderrahmane

Année universitaire 2016-2017

CHAPITRE 1

INTERACTION ELECTROSTATIQUE -ÉLECTRIQUE

1.1. PHÉNOMÈNES ÉLECTROSTATIQUES : NOTION DE CHARGE ÉLECTRIQUE

L'atome est la plus petite particule d'un corps qui puisse exister. Un corps est constitué d'un assemblage d'atomes. Une petite partie de la matière contient des milliards d'atomes. L'atome est constitué d'un noyau autour duquel gravitent les électrons. Le noyau est constitué de deux particules appelées nucléons. Ces particules sont les protons et les neutrons. Le nombre de protons dans un atome est égal au nombre d'électrons.
Les corps dont la couche périphérique ne comportant qu'un, deux, trois électrons libres auront tendance à perdre ces électrons et devenir des ions positifs. Les corps ayant ce type de propriété sont des bons conducteurs du courant électrique par exemple : le cuivre, l'aluminium et le fer.
Les corps dont la couche périphérique comportant 5, 6 ou 7 électrons auront tendance à gagner des électrons et devenir des ions négatifs. Les corps ayant ces propriétés sont des mauvais conducteurs du courant électrique. Ils s'appellent isolants.
L'électrisation est le phénomène d'apparition d'une charge électrique ou d'apparition des quantités d'électricité sur un corps. Il existe trois types d'électrisation :

- L'électrisation par frottement
- L'électrisation par contact
- L'électrisation par influence.

Exemple 1 :
Prenons une boule métallique et suspendons-la par un fil. Ensuite, on approche une tige de verre après l'avoir frottée préalablement. On remarque que la tige attire la boule.

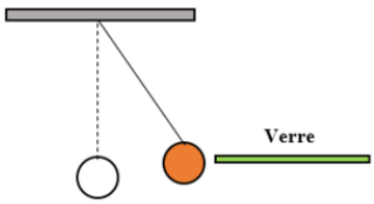


Figure 1.1

Exemple 2 :
On approche une tige en verre frottée avec un tissu en laine de petits morceaux de papier (figure 1.2). Ces derniers sont alors attirés par la tige.

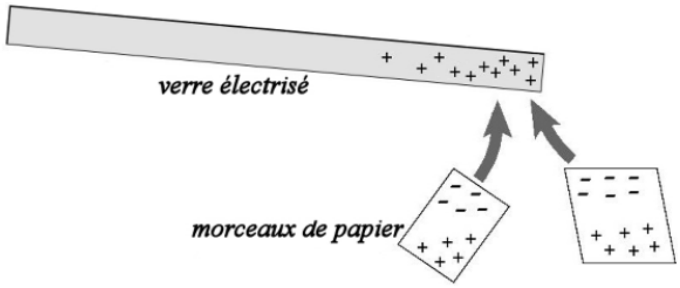


Figure 1.2

Les frottements de la tige lui ont fait perdre des électrons. Le verre se trouve alors chargé positivement. En approchant la tige des morceaux de papier de charge neutre, des charges négatives se déplacent dans le papier en face des charges positives de la tige de verre. Cette attraction entre les deux objets de charges opposées est due à la présence des forces électrostatiques.

1.2. LOI DE COULOMB

Les propriétés de la force électrostatique exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge ponctuelle q_2 ont été déterminés par Charles Auguste de Coulomb (1736-1806) comme suit :

1. La force électrostatique est dirigée selon la droite qui joint les deux charges q_1 et q_2.
2. Elle est proportionnelle au produit des charges : soit elle est attractive si les charges sont de signe opposé soit elle est répulsive si les charges sont de même signe.
3. Elle est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.

La loi de la force de Coulomb traduisant les propriétés ci-dessus est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12} \qquad (1.1)$$

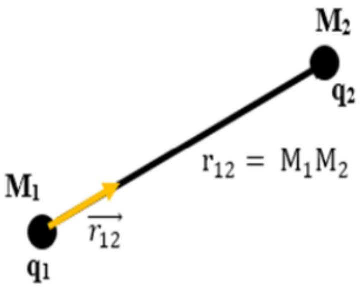


Figure 1.3

Avec :

$$\vec{r}_{1\to 2} = \overrightarrow{M_1M_2}, \quad r_{12} = \left\|\overrightarrow{r_{12}}\right\|, \quad \vec{u}_{12} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|} = \frac{\overrightarrow{r_{12}}}{\left\|\overrightarrow{r_{12}}\right\|}, \; K \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\;10^9 \text{ SI } \left(N.m^2.C^{-2}\right) \tag{1.2}$$

La constante ε_0 joue un rôle particulier. Elle est appelée la permittivité électrique du vide (unités : Farad/m et en unités de base : $kg^{-1}.m^{-3}.s^4.A^2$). L'expression (1.1) n'est valable que pour des charges immobiles se trouvant dans le vide. Elle est considérée comme étant la base même de toute l'électrostatique. La force électrostatique possède exactement les mêmes propriétés vectorielles que la force de la gravitation et obéit au principe d'action et de réaction de la mécanique classique.

1.3. PRINCIPE DE SUPERPOSITION

D'après la propriété de l'additivité des forces électrostatiques auxquelles est soumise une charge q en présence de deux charges q_1 et q_2. La résultante des forces est calculée comme suit :

$$\overrightarrow{F_{tot}} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = k\frac{q_1 q}{r_1^2}\overrightarrow{u_1} + k\frac{q_1 q}{r_2^2}\overrightarrow{u_2} \tag{1.3}$$

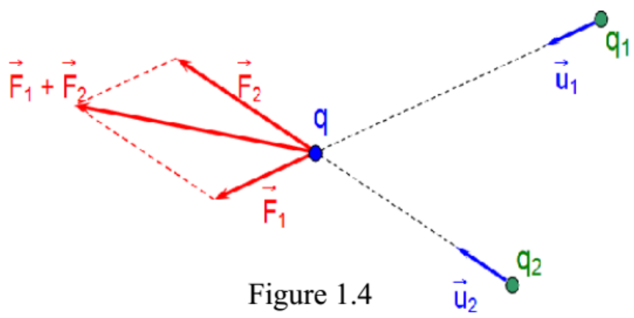


Figure 1.4

1.4. EXERCICE

Trois charges q_1, q_2 et q_3 sont disposées selon la figure1.5. Calculer la force résultante appliquée sur la charge q_3.

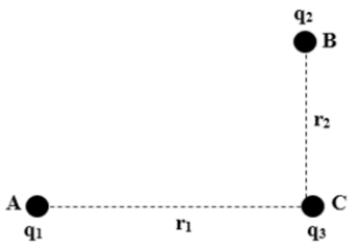


Figure 1.5

On donne :

$q_1 = +1{,}5.10^{-1}\,C$, $q_2 = -0{,}5.10^{-3}\,C$, $q_3 = +0{,}2.10^{-3}\,C$, $AC = 1{,}2\,m$, $BC = 0{,}5\,m$

1.5. CORRIGÉ

q_1 et q_3 ont le même signe, dans ce cas $\overrightarrow{F_1}$ est répulsive.

q_2 et q_3 ont un signe opposé, dans ce cas $\overrightarrow{F_2}$ est attractive.

$$\vec{F}_1 = \frac{kq_1q_3}{r_1^2}\,\vec{u}_{r1} \Rightarrow F_1 = 1{,}8.10^3\,N$$

$$\vec{F}_2 = \frac{kq_2q_3}{r_2^2}\,\vec{u}_{r2} \Rightarrow F_2 = 3{,}6.10^3\,N$$

Par conséquent, $\left|\overrightarrow{F}\right|$ vaut :

$$\left|\overrightarrow{F}\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 4{,}06.\,10^3\,N$$

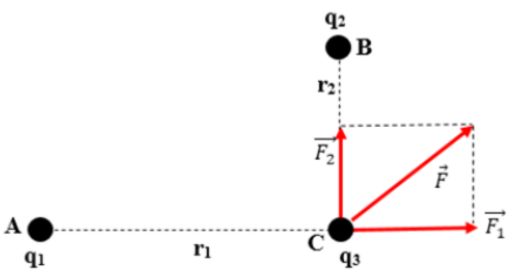


Figure 1.6

CHAPITRE 2

CHAMP ET POTENTIEL ÉLECTRIQUES

2.1. CHAMP ÉLECTRIQUE D'UNE CHARGE PONCTUELLE

A) DÉFINITION

La force qui s'exerce sur une charge q au point M de la part d'une charge Q située au point O est donnée par :

$$\vec{F}_{Q\to q} = q\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)\vec{u} \qquad (2.1)$$

Où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire porté par la droite (OM).

On remarque que l'expression $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ ne dépend que de la charge Q et des coordonnées du point M.

Cette expression définit une grandeur appelée champ électrique et qui est produit par la charge Q placée au point O en tout point M de l'espace, son expression vectorielle est :

$$\vec{E}_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u} \qquad (2.2)$$

B) LIGNES DE CHAMP

Le tracé des lignes de champ permet d'établir la topographie du champ électrique dans une région de l'espace. La ligne de champ donne l'orientation du champ électrique résultant en un point de l'espace. En tout point, le champ électrique résultant est tangent à la ligne de champ passant par ce point. Le tracé des lignes de champ obéit aux propriétés suivantes :

Propriétés :

-Les lignes de champ sont dans le plan des charges.

-Les lignes de champ sont produites par les charges positives et convergentes vers les charges négatives.

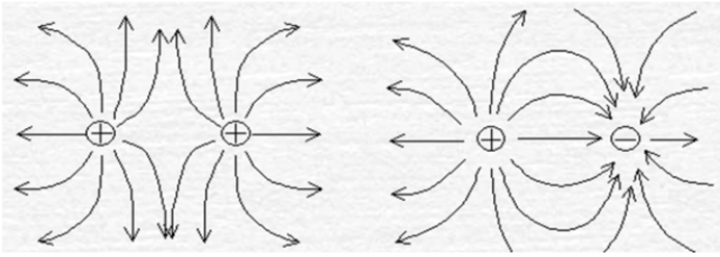


Figure 2.1: Exemples de lignes de champ : Deux charges de même signe (gauche) et deux charges de signes opposées (droite)

-Une ligne de champ électrostatique n'est pas fermée. Elle part à l'infini ou part d'une charge q termine sur la charge de signe opposé.
– Le nombre de lignes de champ partant ou arrivant sur une charge est proportionnel à la grandeur de la charge

C) TUBE DE CHAMP

Un tube de champ est la surface imaginaire engendrée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé .

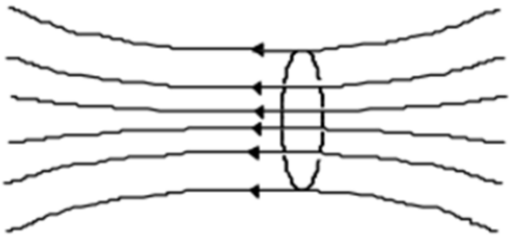


Figure 2.2: Exemples de tube de champ : ensemble de lignes de champ reposant sur un contour ferme

2.2. POTENTIEL ÉLECTRIQUE CRÉE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

2.2.1. DÉFINITION DU POTENTIEL ÉLECTRIQUE

La circulation élémentaire du champ $\vec{E}_M$ crée par une charge Q sur un élément de longueur $\vec{dl}$ au point M d'une courbe quelconque (AB) (figure 2.3) est donné par la relation suivante :

$$dc = \vec{E}(M).\ \vec{dl} \tag{2.3}$$

Avec $\vec{E}(M)$ est le champ électrique crée par la charge Q au point O. On note $\vec{ur}$ le vecteur unitaire le long de la droite OM et r = OM et $\vec{dl}$ est le déplacement élémentaire.

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r} \tag{2.4}$$

On décompose $\overrightarrow{dl}$ selon $\overrightarrow{ur}$ et selon une autre direction qui lui est perpendiculaire telle que :

$$\overrightarrow{dl} = dr\,\vec{u}_r + \overrightarrow{dl}_\perp \tag{2.5}$$

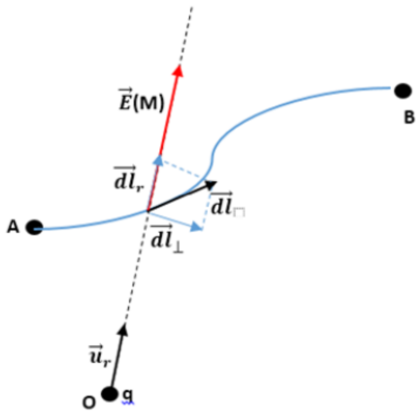


Figure 2.3: Décomposition du vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ selon $\vec{u}_r$ et selon une direction perpendiculaire

En tenant compte du fait que les vecteurs $\overrightarrow{dl}_\perp$ et $\overrightarrow{ur}$ sont perpendiculaires, ce qui donne $\vec{E}(M)$ $\vec{dl}\cdot\vec{u_r} = 0$, et $\overrightarrow{ur}$ est un vecteur unitaire, par conséquent $\overrightarrow{ur}\cdot\overrightarrow{ur} = 1$, la circulation élémentaire devient alors :

$$dc = \vec{E}(M).\overrightarrow{dl} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r}\cdot\left(dr\,\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{dl}_\perp\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} \tag{2.6}$$

L'intégrale de la relation (2.6) sur toute la courbe (AB) donne la circulation totale. En prenant en considération que :

$$\frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{1}{r}\right) \tag{2.7}$$

Ce qui donne :

$$dc = d\left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) \tag{2.8}$$

Dans ce cas, la circulation du champ électrostatique entre A et B sur la courbe (AB) est donnée par :

$$c = \int_A^B \vec{E}(M).\vec{dl} = \int_A^B d\left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = \left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_A^B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} \qquad (2.9)$$

Cette circulation ne dépend pas du chemin suivi puisqu'elle ne dépend que des points de départ A et d'arrivée B.
On définit alors le potentiel électrostatique comme étant la quantité V (M) dont la variation est l'opposé de la circulation du champ :

$$c = \int_A^B \vec{E}(M).\vec{dl} = V(A) - V(B) = -\Delta V \qquad (2.10)$$

avec:

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte \qquad (2.11)$$

En pratique, on utilise toujours des différences de potentiel au lieu du potentiel car la constante est choisie arbitrairement. Souvent elle est prise nulle à l'infini V (∞) =0.
Par conséquent, le potentiel électrique créé par une charge ponctuelle Q au point M est donné par :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad V(\infty) = 0 \qquad (2.12)$$

2.2.2. RELATION ENTRE LE CHAMP ET LE POTENTIEL ÉLECTRIQUES

En combinant les deux relations (2.5) et (2.12), on trouve la relation entre le champ et le potentiel électrostatique. Cette relation se présente sous plusieurs formes :

1. Relation différentielle :

$$dV(M) = -\vec{E}(M).\vec{dl} \qquad (2.13)$$

2. Relation locale :

$$dV(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M).\vec{dl} \qquad (2.14)$$

D'où on déduit :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M). \qquad (2.15)$$

D'après la relation (2.15), on conclut que le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dérive du potentiel V.
Si on se place à une seule dimension suivante (OX), l'équation (2.15) devient :

$$\vec{E}(M) = -\frac{dV(M)}{dx}\overrightarrow{u_x} \qquad (2.16)$$

3. Relation intégrale : la relation (2.16) est une relation importante dans les calculs champ-potentiel.

2.2.3. SURFACES ÉQUIPOTENTIELLES

Une surface équipotentielle est l'ensemble des points M se trouvant au même potentiel V :

$$V(M) = cte \Rightarrow dV = 0 \Rightarrow \vec{E}.\vec{dl} = 0 \Rightarrow \vec{E}. \perp \vec{dl} \qquad (2.17)$$

Les surfaces équipotentielles sont des sphères centrées sur la charge. Comme le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dérive du potentiel sous la forme d'un gradient, $\vec{E}(M)$ est toujours perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.

2.3. GÉNÉRALISATION ET PRINCIPE DE SUPERPOSITION

2.3.1. ENSEMBLE DE CHARGES PONCTUELLES : CHAMP ÉLECTRIQUE

Soit un nombre de N charges ponctuelles q_i, i = 1 ….N placées en des points A_i, i = 1..N. Soit une charge q placée en un point M. Chaque charge q_i crée au point M un champ électrique $\vec{E}(M)$, la force exercée sur q s´écrit :

$$\vec{F}(M) = \sum_{i=1}^{N}\left[Q\ \overrightarrow{E_i}(M)\right] = q\sum_{i=1}^{N}\left[\overrightarrow{E_i}(M)\right] \qquad (2.18)$$

D'autre part on a :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N}\left[\overrightarrow{E_i}(M)\right] \qquad (2.19)$$

Par conséquent, la force peut être exprimée comme suit :

$$\vec{F}(M) = Q\,\vec{E}(M) \qquad (2.20)$$

On conclut que la charge Q subit un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ somme vectorielle des champs $\vec{E_i}(M)$ génères par chacune des charges individuelles.

Théorème de superposition du champ électrique :

Le champ électrostatique total en un point M est la somme vectorielle des champs élémentaires crées par chacune des charges élémentaires présentes.

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{E_i}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i} \qquad (2.21)$$

avec :

$\vec{r_i} = \overrightarrow{AM_i}$ et $\overrightarrow{u_i}$ vecteur unitaire dirigé selon $\overrightarrow{AM_i}$

2.3.2. ENSEMBLE DE CHARGES PONCTUELLES : POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE

A partir de la relation :

$$dV = -\vec{E}(M).\vec{dl} \tag{2.22}$$

En prenant en considération le théorème de superposition, dans ce cas on a :

$$dV = -\vec{E}(M).\vec{dl} = -\sum_{i=1}^{N}\left[\overrightarrow{E_i}(M)\right].\vec{dl} = \sum_{i=1}^{N}\left[\overrightarrow{-E_i(M).dl}\right] = \sum_{i=1}^{N} dV_i \tag{2.23}$$

Sachant que la somme d'un ensemble de différentielles étant la différentielle de la somme :

$$dV = \sum_{i=1}^{N} dV_i = d\sum_{i=1}^{N} V_i \tag{2.24}$$

On obtient alors :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i} \tag{2.25}$$

La relation (2.25) est une somme algébrique où les signes des charges doivent être pris en considération.

2.4. ENERGIE ÉLECTROSTATIQUE

2.4.1. DÉFINITION

L'énergie électrostatique W d'un système de charges électriques, supposées initialement éloignées les unes des autres correspond au travail qu'il faut fournir pour amener ces charges à leurs positions finales.

2.4.2. CAS D'UNE CHARGE PONCTUELLE PLACÉE DANS UN CHAMP ELECTRIQUE

On considère un champ électrique $\vec{E}(M)$ et son potentiel associé V définis en tout point M de l'espace. L'énergie potentielle d'une charge q située en un point P se calcule comme suit :

L'énergie potentielle électrostatique est définie à une constante près comme c'est le cas de l'énergie potentielle de gravitation. On choisit l'énergie potentielle nulle à l'infini, où les charges électriques sont inexistantes. C'est donc de l'infini que l'on va amener la charge q.

On a $V_\infty = 0$ et $E_{P\infty} = W_\infty = 0$

A tout instant, la charge électrique est soumise à une force électrostatique donnée par :

$$\vec{F}(M) = q\,\vec{E}(M) \tag{2.26}$$

Le déplacement de la charge q nécessite une force $\vec{F}_{exp}$ de telle sorte qu'elle compense la force électrostatique. Dans ce cas, le déplacement se fait à une vitesse constante. En appliquant le principe d'inertie sur le système composé de la charge q :

$$\vec{F}(M) + \vec{F}_{exp} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{exp} = -q\vec{E}(M) \tag{2.27}$$

Le travail nécessaire pour effectuer le déplacement de la charge q est la somme des travaux élémentaires de la force $\vec{F}_{exp}$ le long du chemin qui mène la charge de l'infini à P. Le travail élémentaire de la force $\vec{F}_{exp}$ est :

$$dW_{exp} = \vec{F}_{exp}.\vec{dl} \tag{2.28}$$

$\vec{dl}$ étant le déplacement élémentaire de la charge q, le travail total s'écrit alors :

$$W_{exp} = \int_{\infty}^{P} \vec{F}_{exp}.\vec{dl} = \int_{\infty}^{P} -q\vec{E}(M).\vec{dl} = -q\int_{\infty}^{P} \vec{E}(M).\vec{dl} \tag{2.29}$$

A partir de 2.23 :

$$dV = -\vec{E}(M).\vec{dl}$$

D'où :

$$W_{exp} = +q\int_{\infty}^{P} dV = q\left[V(l) - V(\infty)\right] \tag{2.30}$$

L'énergie potentielle électrostatique d'une charge q située en un point P dans un champ électrostatique dont le potentiel V est défini comme suit :

$$W_{exp} = q\ V(P) \tag{2.31}$$

2.4.3. CAS DE PLUSIEURS DISTRIBUTIONS PONCTUELLES

Dans ce cas, chacune des charges est soumise à l'action du champ électrostatique créé par les autres charges. Initialement toutes les charges étaient éloignées les unes des autres et se trouvent toutes à l'infini, on procède comme suit :

On amène la charge q_1 de l'infini à A_1 : $W_1 = 0$ car $E=0$.

On amène la charge q_2 de l'infini à A_2 : En A_2 le potentiel V_2 créé par la charge q_1 est :

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}} \tag{2.32}$$

L'énergie potentielle de la charge q_1 est donc :

$$q_2\ V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_1} \tag{2.33}$$

La charge q_1 est située au point A_1, q_2 au point A_2, on amène q_3 de l'infini à A_3 où le potentiel est donné par :

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{23}} \tag{2.34}$$

L'énergie de la charge q_3 est alors :

$$q_3 V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{r_{23}} \tag{2.35}$$

Pour toutes les charges, l'énergie totale est donc :

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\sum_{j}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i\, q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i} q_i\, V_i \qquad (2.36)$$

Le terme 1/2 provient du fait que dans l'interaction entre les charges q_i et les charges q_j est comptée deux fois.

2.4.4. ENERGIE D'UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES

On se ramène à un ensemble de charges ponctuelles en divisant la charge totale en petits éléments de charges élémentaires dq, le calcul du travail s'effectue selon la nature de la distribution de charges comme suit :

Distribution volumique :

$$W = \frac{1}{2}\iiint \rho V d\tau \qquad (2.37)$$

avec ρ est la distribution volumique

Distribution surfacique :

$$W = \frac{1}{2}\iint_{s} \sigma V dS \qquad (2.38)$$

avec σ est la distribution superficielle

Distribution linéique :

$$W = \frac{1}{2}\int_{C} \lambda . V . dl \qquad (2.39)$$

avec λ est la distribution linéique

2.5. LE DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE

2.5.1. POTENTIEL ÉLECTROSTATIQUE CRÉÉ PAR DEUX CHARGES ÉLECTRIQUES

Un dipôle est un système électrique constitué par deux charges électriques ponctuelles de charges égales et de signes opposés, +q et –q situées l'une de l'autre à une distance d (Figure 2.4).

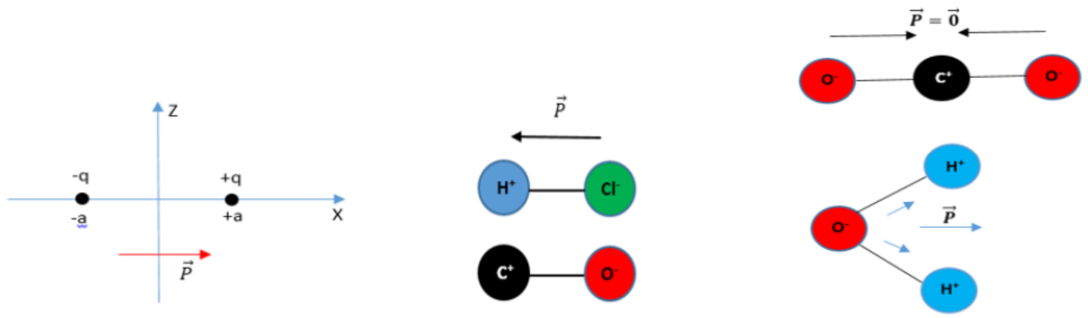


Figure 2.4: Exemples de dipôles électriques.

Les molécules de HCL, CO, H_2O, CO_2

Pour connaître l'effet électrostatique crée par ces deux charges autour d'elles nécessite le calcul du champ électrostatique. Cela se fait soit par l'application du principe de superposition en calculant la somme vectorielle des deux champs, soit par le calcul du potentiel.

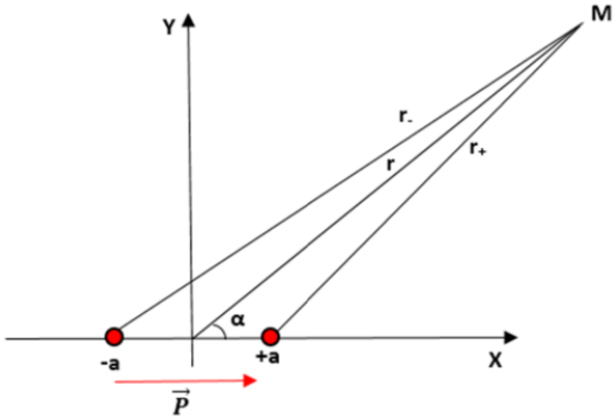


Figure 2.5

D'après ce qui précède, le potentiel créé en un point M repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) est simplement :

$$V(M) = V_{+q}(M) + V_{-q}(M)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \tag{2.40}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ \, r_-}\right) \tag{2.41}$$

Où l'on a choisi arbitrairement le potentiel nul à l'infini $V=0$. Lorsqu'on ne s'intéresse qu'à l'action électrostatique à grande distance, c'est à dire à des distances telles que $r \succ\succ a$, on effectue un développement limité de V. Au premier ordre en a/r, on obtient alors :

$$r+ = \left(\overrightarrow{r_+}.\overrightarrow{r_+}\right)^{1/2} \approx r\left(1+2\frac{a}{r^2}\vec{r}.\vec{i}\right)^{1/2} \approx r\left(1+2\frac{a}{r^2}\vec{r}.\vec{i}\right)^{1/2} \approx r + a\cos\alpha \tag{2.42}$$

$$r- = \left(\overrightarrow{r_-}.\overrightarrow{r_-}\right)^{1/2} \approx r\left(1-2\frac{a}{r^2}\vec{r}.\vec{i}\right)^{1/2} \approx r\left(1-2\frac{a}{r^2}\vec{r}.\vec{i}\right)^{1/2} \approx r - a\cos\alpha \tag{2.43}$$

D'où : $r_- - r_+ = 2a\cos\theta$ et $r_- \times r_+ = r^2$.

Par conséquent, le potentiel créé à grande distance par un dipôle électrique est donné par la relation suivante :

$$\vec{p} = qd\,\vec{i} = 2\,aq\,\vec{i}$$

$$V(M) = \frac{2aq\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}.\overrightarrow{u_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2.44}$$

2.5.2. CHAMP CRÉÉ PAR LE DIPÔLE

Pour calculer le champ électrostatique, il suffit d'utiliser l'expression $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{gradV}}$ en coordonnées cylindriques. On obtient alors :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_r = \dfrac{-\partial V}{\partial r} = \dfrac{2p\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ E_\theta = \dfrac{-\partial V}{r\partial\alpha} = \dfrac{p\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ E_z = \dfrac{-\partial V}{\partial z} = 0 \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

Remarque : le dipôle possède une symétrie de révolution autour de l'axe qui le porte. Par conséquent, le potentiel ainsi que le champ électrique possèdent donc également cette symétrie.

2.5.3. ENERGIE DU DIPÔLE PLACÉ DANS UN CHAMP ELECTRIQUE

Energie du dipôle placé dans un champ électrique est l'énergie nécessaire pour amener les charges + q et – q de l'infini à leurs positions respectives en B et A.

On a :

$$W = q\left(V_{final} - V_{initial}\right) \tag{2.46}$$

Pour $-q$ on a : $T_{\infty\to A} = -q\left(V_A - 0\right) = -q\,V_A$

Pour $+q$ on a : $T_{\infty\to B} = +q\left(V_B - 0\right) = -q\,V_B$

Donc : $W = q\left(V_B - V_A\right) = q\left(V_B - V_A\right)$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V \quad \text{et} \quad dV = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V.\vec{dl} \quad \Rightarrow \quad dV = -\vec{E}.\vec{dl}$$

$$V_A - V_B = \int_A^B -dV = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = \int_A^B Edl\cos\alpha = E\cos\alpha\int_A^B dl = E\cos\alpha\;a = \vec{E}.\overrightarrow{AB} \tag{2.47}$$

D'où :

$$W_{dipole} = q\left(V_A - V_B\right) = -q.E.AB = -\vec{P}.\vec{E} \qquad (2.48)$$

2.5.4. MOUVEMENT DU DIPÔLE DANS UN CHAMP ELECTRIQUE UNIFORME

Un dipôle placé dans un champ électrique est soumis à un couple de forces de même intensité, et de sens opposés. Ce couple est caractérisé par son moment $\vec{\Gamma}$ définit comme suit :

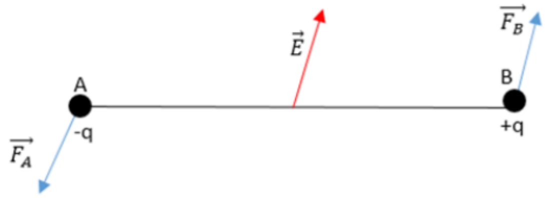


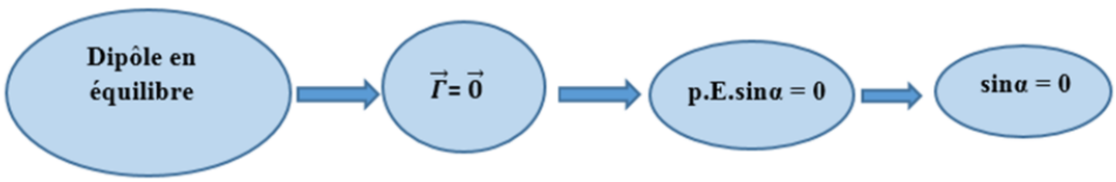
Figure 2.6

$$\begin{aligned}
\vec{\Gamma} &= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_B} \\
&= \overrightarrow{OA} \wedge \left(-q\vec{E}\right) + \overrightarrow{OB} \wedge \left(q\vec{E}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) \wedge \left(q\vec{E}\right) \\
&= q\left(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{E}\right) = q\overrightarrow{AB} \wedge \vec{E}
\end{aligned} \qquad (2.49)$$

Par conséquent :

$$\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E} = \left|\vec{P}\right|.\left|\vec{E}\right| \sin\left(\vec{P},\vec{E}\right) \qquad (2.50)$$

EQUILIBRE DU DIPÔLE :



$\alpha = 0$: équilibre stable du dipôle.
$\alpha = \pi$: équilibre instable du dipôle.

Lorsque le dipôle est en équilibre le couple de forces électriques tend à orienter ce dipôle de façon que son moment dipolaire $\vec{P}$ ait et le même sens que champ électrique $\vec{E}$

2.6. THÉORÈME DE GAUSS

On considère maintenant une charge ponctuelle q située en un point O de l'espace. Le flux du champ électrique $\vec{E}$ créé par cette charge à travers une surface élémentaire quelconque orientée est par définition :

$$d\Phi = \vec{E}.\vec{n}\,ds \tag{2.51}$$

Par convention, on oriente le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la surface dS vers l'extérieur. Ainsi, pour q > 0, le champ $\vec{E}$ est dirigé dans le même sens que $\vec{n}$ et l'on obtient un flux positif. A partir de l'expression du champ créé par une charge ponctuelle, on obtient alors :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.d\Omega \tag{2.52}$$

On remarque que la grandeur dΩ est sans unité, elle provient d'un quotient d'un élément de surface en m^2 divisé par le carrée d'une longueur en m^2. Elle est appelée angle solide. D'après l'équation (2.53), on obtient un flux dépendant directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface et non de sa distance r. Pour $d\Omega \geq 0$, q pouvant être positif ou négatif.

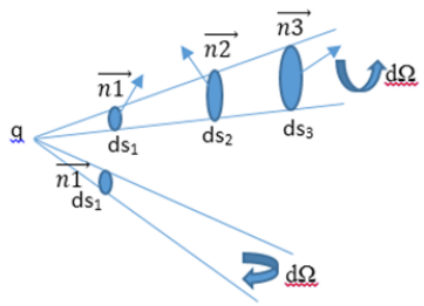


Figure 2.7

On a une charge q située à l'intérieur de la surface S orientée par le vecteur $\vec{n}$ enfermant ainsi un volume v, Pour le rayon 1, dans le cas du rayon 1 on a :

$$d\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \tag{2.53}$$

Par contre le rayon 2 traverse plusieurs fois la surface, avec des directions différentes. On aura alors une contribution au flux :

$$d\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{u}.\vec{n}_1}{r_1^2}ds_1 + \frac{\vec{u}.\vec{n}_2}{r_2^2}ds_2\,\frac{\vec{u}.\vec{n}_3}{r_3^2}ds_3\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(d\Omega - d\Omega + d\Omega\right) \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\, d\Omega \end{aligned} \tag{2.54}$$

En intégrant (2.49) sur toutes les directions, on obtient un flux total :

$$\Phi = \oint\!\!\oint_S \vec{E}.\vec{ds} = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{2.55}$$

Car l'intégrale de l'angle solide sur tout l'espace est telle que :

$$\Omega = \oint\!\!\oint_S d\Omega = 4\pi$$

En vertu du principe de superposition, ce résultat se généralise aisément à un ensemble quelconque de charges.

Enoncé du théorème de Gauss :

Le flux du champ électrique à travers une surface quelconque, fermée et orientée est égal, dans le vide, au produit de la charge Q_{int} par la constante $1/\varepsilon_0$.

$$\Phi = \oint\!\!\oint_S \vec{E}.\vec{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{2.56}$$

Remarque :

1. Du point de vue physique, le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrostatique et les sources du champ, à savoir les charges électriques.

2. Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile pour calculer le champ $\vec{E}$ lorsque celui-ci possède des propriétés de symétrie particulières. Celles-ci doivent en effet permettre de calculer facilement le flux Φ. Comme le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface S adaptée, c'est à dire respectant les propriétés de symétrie du champ, appelée « surface de Gauss ».

2.6.1. CHAMP ÉLECTRIQUE CRÉÉ PAR UN PLAN INFINI UNIFORMÉMENT CHARGÉ

On considère un plan infini Π portant une charge électrique par unité de surface σ. Pour utiliser le théorème de Gauss, il faut tout d'abord connaître les propriétés de symétrie du champ électrique $\vec{E}$. Tous les plans perpendiculaires au plan infini Π sont des plans de symétrie de celui-ci : $\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie, il est donc perpendiculaire à Π. Si ce plan est constitué par les vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j})$, on obtient alors $\vec{E} = Ez(x, y, z)\vec{k}$. Par ailleurs, l'invariance par translation selon les axes x et y fournit l'expression champ électrique $\vec{E} = Ez(z)\vec{k}$. Le plan Π est lui-même plan de symétrie, donc E(z) est impaire.

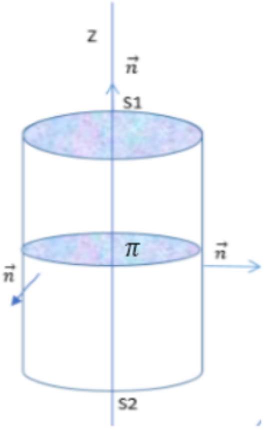


Figure 2.8

Etant donné que ces propriétés de symétrie sont vérifiées, la surface de Gauss la plus adaptée est par conséquent un cylindre de sections perpendiculaires au plan et situé à des hauteurs symétriques.

$$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_{s} \vec{E}.\vec{ds} = \oiint_{s1} \vec{E}.\vec{ds} + \oiint_{s2} \vec{E}.\vec{ds} + \oiint_{s_L} \vec{E}.\vec{ds} \\ &= E(z)S + E(-z)S + 0 = 2ES \\ &= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_{s} \sigma ds = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}\end{aligned} \tag{2.57}$$

Il s'ensuit que le champ électrostatique créé par un plan infini uniformément chargé vaut :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{2.58}$$

Remarque :

1. Le champ ne varie pas avec la distance, ce qui est naturel car le plan est supposé infini.
2. On peut encore appliquer ce résultat pour une surface quelconque chargée uniformément. Il suffit alors d'interpréter E comme le champ au voisinage immédiat de la surface : suffisamment près, celle-ci peut être assimilée à un plan infini.

2.6.2. CHAMP CRÉÉ PAR UNE SPHERE UNIFORMÉMENT CHARGÉE

On considère une sphère pleine de centre O et rayon R, chargée avec une distribution volumique de charges ρ. Cette distribution possédant une symétrie sphérique, le champ électrostatique qui en résulte aura la même symétrie, donc $\vec{E} = E_r \, \vec{ur}$.

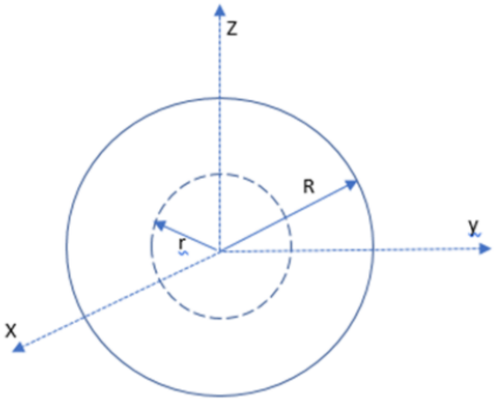


Figure 2.9

La surface de Gauss adaptée est simplement une sphère de rayon r et le théorème de Gauss donne la relation du flux comme suit :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\vec{ds} = \iint_S E(r)dS = E(r)\,4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dv \qquad (2.59)$$

Lorsque r < R, on obtient la relation suivante pour le champ électrique :

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \qquad (2.60)$$

Lorsque r > R, la sphère de Gauss enferme un volume V supérieur à celui de la sphère. Mais la distribution de charges n'est pas nulle pour toute sphère dont le rayon est inférieur à R, ce qui fournit la relation suivante pour le champ électrique :

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{\pi r^2 \varepsilon_0} \qquad (2.61)$$

Où Q est la charge totale portée par la sphère. On vient ainsi de démontrer, sur un cas simple, qu'une distribution de charges à symétrie sphérique produit à l'extérieur le même champ qu'une charge ponctuelle égale, située au centre O de la sphère.

2.7. EXERCICES

Exemple1 :

Trois charges électriques ponctuelles q_A , q_B et q_C sont placées aux points A(a,0), B (0 ,a) et C(-a,0) respectivement. On donne : $q_A = q = 2.10^{-9}$C, $q_B = -2q$, $q_C = 2q$ et a= 5 cm.

1. Calculer le potentiel électrique V créé par ces trois charges au point O.

2. Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ créé au point O. Représenter qualitativement $\vec{E}$.

3. En déduire la force électrostatique $\vec{F}$ exercée sur une charge $q' = (q' = -q)$placée en O.

4. Avec quelle énergie cinétique minimale doit on lancer de l'infini la charge q' pour qu'elle atteigne le point O ?

5. Calculer l'énergie interne U du système constitué par ces quatre charges.

Exemple2 :

Calculer le champ électrique et le potentiel produits par un filament électrique de longueur infinie portant une charge λ par unité de longueur.

Exemple3 :

Soit un disque de rayon R chargé uniformément en surface avec une densité surfacique σ > 0

1) Calculer le champ électrique E(M) en un point quelconque M sur l'axe du disque.

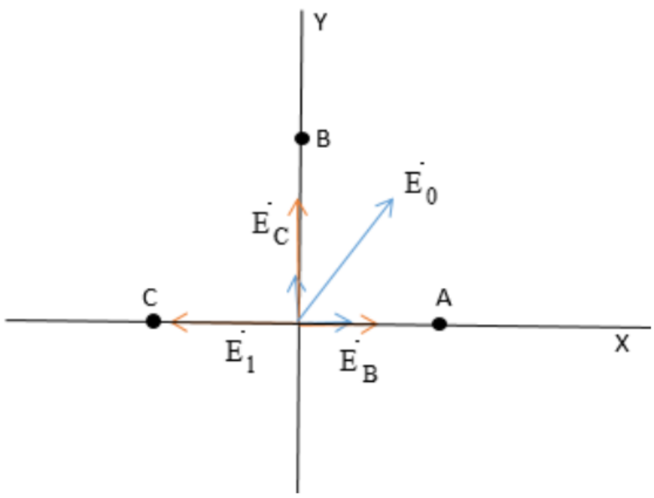
2) On fait tendre R vers l'infini. En déduire l'expression du champ E(M)

Exemple4 :

Calculer le champ électrique et le potentiel produits par un cylindre infini de rayon R, uniformément chargé avec une charge par unité de surface σ > 0.

2.8. CORRIGÉ

Exemple1 :



1. Le potentiel V_0 est la somme algébrique des potentiels :

$$V_0 = V_A + V_B + V_C = \frac{kq}{a} - \frac{2kq}{a} + \frac{2kq}{a} = \frac{kq}{a}$$

A.N :

$$V_0 = \frac{9.10^9.2.10^{-9}}{5.10^{-2}} = 360 \text{ V}$$

2. Le champ $\vec{E}_0$ est la somme vectorielle des champs tel que :

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = -\frac{kq}{a^2}\vec{i} + \frac{2kq}{a^2}\vec{j} + \frac{2kq}{a^2}\vec{i}$$

$$= \frac{kq}{a^2}\vec{i} + \frac{2kq}{a^2}\vec{j} = \frac{kq}{a^2}\left(\vec{i} + \vec{2j}\right)$$

$$E_0 = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

A.N :

$$\vec{E}_0 = 7200\left(\vec{i} + \vec{2j}\right) = 1.6\ 10^4\ \mathrm{V/m}$$

3. La force est exprimée par :

$$\vec{F} = q'\ \overrightarrow{E_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -q\frac{kq}{a^2}\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right) = -\frac{kq^2}{a^2}\left(\vec{i} + 2\vec{j}\right)$$

A.N :

$$F = 1.6\times10^{4}\times 2.10^{-9} = 3.2\times10^{-5}\ \mathrm{N}$$

4. Conservation de l'énergie totale :

$$\Delta E_C = -\Delta E_P$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\left[E_{Pf} - E_{Pi}\right]$$

$$0 - E_{Ci} = -\left[E_{Pf} - 0\right]$$

$$\Rightarrow \quad E_{Ci} = E_{Pf}$$

$$\Rightarrow \quad E_{Ci} = -q' V_0 = -(-q)\frac{kq}{a}$$

$$\Rightarrow \quad E_{Ci} = \frac{kq^2}{a}$$

A.N :

$$E_{Ci} = 7.2\times10^{-7}\ \mathrm{J}$$

5. l'énergie interne U du système :

$$U = k\left[\frac{q_A q_B}{\sqrt{2}\,a} + \frac{q_A q_C}{2a} + \frac{q_A q'}{a} + \frac{q_B q'}{a}\ \frac{q_C q_B}{\sqrt{2}\,a} + \frac{q_C q'}{a}\right]$$

$$= -\frac{6kq^2}{\sqrt{2}\,a}$$

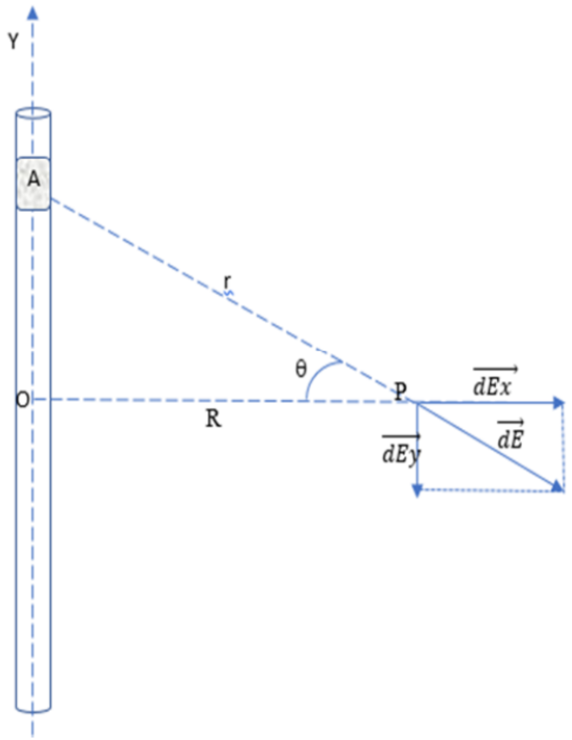
A.N :

$$U = -3.05\times10^{-6}\ \mathrm{J}$$

Exemple2 :

On considère le filament comme un cylindre dont le rayon de surface $r \ll L$, où $L \to \infty$. On place le filament sur un l'axe OY et on calcule le champ produit par un élément de longueur dy. Au point P situé sur l'axe (OX), l'élément dy est distant de r du point P. le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}$ est porté par $\overrightarrow{AP}$ qui est représenté par $\vec{r}$. $\overrightarrow{dE}$ se décompose en deux composantes $\overrightarrow{dEx}$ et $\overrightarrow{dEy}$.

Comme le problème est symétrique, on constate que la partie inférieure du filament produit un champ électrique opposé à celui produit par la partie supérieure.



$$E_x = \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} dE_x = \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} dE \cos\alpha \, d\alpha$$

avec :

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad dq = \lambda dy$$

D'autre part, on a :

aussi : $$y = R\tan\alpha \;\rightarrow\; dy = R\,(\tan\alpha)' = R\frac{d\alpha}{(\cos\alpha)^2}, \quad r = \frac{R}{\cos\alpha}$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} \frac{R d\alpha}{\cos^2\alpha}\,\frac{\cos^2\alpha\,\cos\alpha\,d\alpha}{R^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\,d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\sin\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\overrightarrow{u_x}$$

Le calcul du potentiel électrique :

On pose R=x, par conséquent :

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} = +\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

d'où :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x + C$$

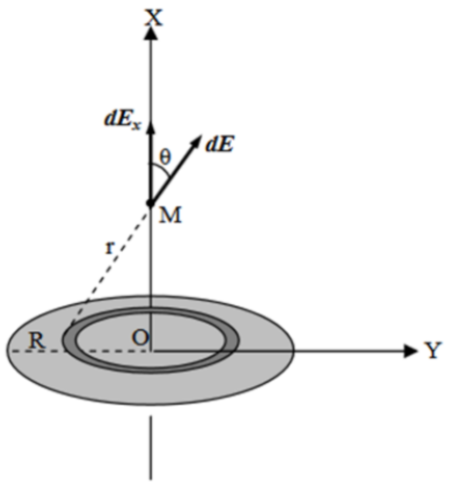
Calcul de la constante C :

$$V(1) = 0 \rightarrow C = 0 \rightarrow V(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln x$$

Exemple 3 :

Le calcul du champ électrique :

On choisit comme élément de surface dS une couronne circulaire comprise entre les cercles de rayons y et y+dy. L'élément de surface dS porte une charge dq = σ dS.



Par raison de symétrie (il s'agit d'une surface équipotentielle), le champ crée par cette couronne en un point M d'abscisse x est porté par ox et a pour expression :

$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = k\,\frac{\sigma dS}{r^2}\cos\theta$$

avec :

$$dS = 2\pi y\, dy, \quad \cos\theta = \frac{x}{r},\ r^2 = x^2 + y^2$$

d'où :

$$dE_x = k\frac{\sigma\, 2\pi\, y\, dy\, x}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\frac{y\, dy}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Le champ total est donc également porté par ox, est :

$$E = \int dE_x = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_0^R \frac{ydy}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[-\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^R$$

$$E = \int dE_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)}}\right]_0^R$$

Si on fait tendre R vers l'infini, on déduit :

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

2) Calcul du potentiel électrique :

D'après la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

En chaque point P on a un champ E = E(x), par conséquent :

$$E = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad V = \int E\, dx$$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{\left(R^2 + x^2\right)} + C$$

D'après la condition à x= 0, v $\rightarrow$0, la constante est nulle. Par conséquent :

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{\left(R^2 + x^2\right)}$$

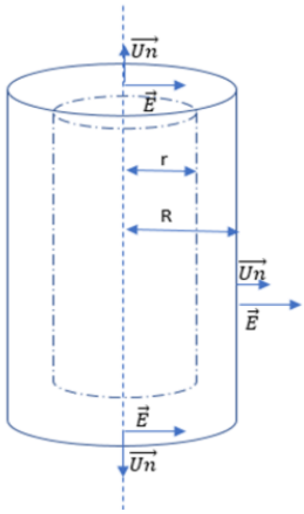
Exemple 4:

On considère un cylindre de rayon R et de longueur infini (voir figure …).

La symétrie du problème indique que le champ électrique est radial. Sur les deux bases, supérieur et inférieure le flux est nul.

$$\left(\vec{E}, \overrightarrow{U_n}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Le seul flux non nul est celui de la surface latérale. Pour le choix de la surface de Gauss de rayon de r et d'hauteur h, on a deux possibilités, soit une surface de rayon r supérieur à R ou r inférieur à R.



$$Q_{in}(r,h) = \begin{cases} 0 & r \le 0 \\ 2\pi Rh\sigma & r \ge 0 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\vec{E} = E(r)\,\overrightarrow{u_r}$$

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r \le R \\ \dfrac{\sigma R}{r\varepsilon_0} & r \ge R \end{cases}$$

$$V(r) = -\int E(r)dr = \begin{cases} C_1 & r \le R \\ -\dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r) + C_2 & r \ge R \end{cases}$$

En imposant le potentiel $V=V_0$ à $r=r_0$ avec $r_0 \geq R$.

$$V_0 = V(r_0) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r_0) + C_2 \Rightarrow C_2 = V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r_0)$$

Par conséquent :

$$r \geq R \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r) + V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln(r_0) = V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Comme V(r) est une fonction continue au point r=R, par conséquent :

$$\lim r \to R^- \ V(r) = \lim r \to R^+ \ V(r) \Rightarrow C_1 = V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Finalement :

$$V(r) = \begin{cases} V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{R}\right) & r \leq R \\ V_0 + \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right) & r \geq R \end{cases}$$