RÉSUMÉ DU COURS

Champ et potentiel crée par une distribution discrète de charges q_i :

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_i} \qquad \boxed{V(r) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i}}$$

Energie potentielle d'une distribution discrète de charges q_i :

$$\boxed{U_{\text{syst}} = \sum_i \sum_j U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}} \qquad (i \neq j)$$

Champ et potentiel crée par une distribution continue de charges :

a- <u>distribution linéique :</u> $dq = \lambda . dl$ (λ : densité linéique de charge $(C.m^{-1})$)

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda . dl}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda . dl}{r^3}\vec{r}} \qquad \boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda}{r} dl}$$

Pour une distribution uniforme $\lambda = Q/L = \text{Constante}$

b- <u>distribution surfacique :</u> $dq = \sigma . ds$ (σ : densité surfacique de charge $(C.m^{-2})$)

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma . ds}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma . ds}{r^3}\vec{r}} \qquad \boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\sigma}{r} ds}$$

Pour une distribution uniforme $\sigma = Q/S = \text{Constante}$

a- <u>distribution volumique :</u> $dq = \rho . d\tau$ (ρ : densité volumique de charge $(C.m^{-3})$)

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho . d\tau}{r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho . d\tau}{r^3}\vec{r}} \qquad \boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho}{r} d\tau}$$

Pour une distribution uniforme $\rho = Q/\tau = \text{Constante}$

SÉRIE DE TD N° 02

EXERCICE 01 :

1. Calculez le champ électrique crée au point M par deux charges identiques $Q/2$ placées aux points A et B séparées par une distances $2a$, comme le montre la *figure 1*.
2. Calculez le champ crée au point M par une charge Q distribuée uniformément sur un segment de droite de longueur $2a$ (densité de charge $\lambda > 0$), comme le montre la *figure 2*.
3. Comparez les deux résultats dans les cas où $y \gg a$ et $y = a$.

Figure 1

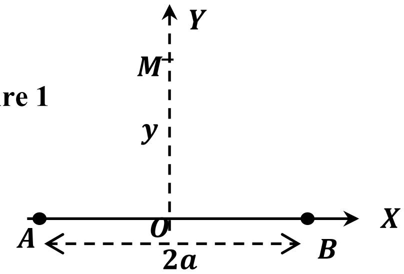
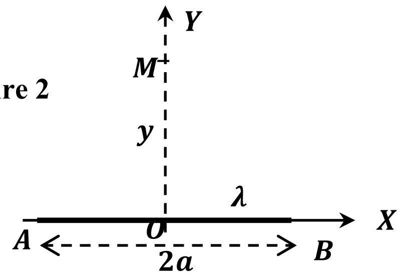


Figure 2



EXERCICE 02 :

Trouvez les vecteurs du champ électrique à partir des potentiels électriques suivants :

1. $V(r) = a.(x^2 - y^2)$
2. $V(r) = a.x.y$
3. $V(r) = a.(x^2 + y^2) + b.z^2$
4. $V(r) = \vec{a} \bullet \vec{r}$

a et b sont des constantes

$\vec{r} = x.\vec{e}_x + y.\vec{e}_y + z.\vec{e}_z$

$\vec{a} = a_x.\vec{e}_x + a_y.\vec{e}_y + a_z.\vec{e}_z$

EXERCICE 03 (*):

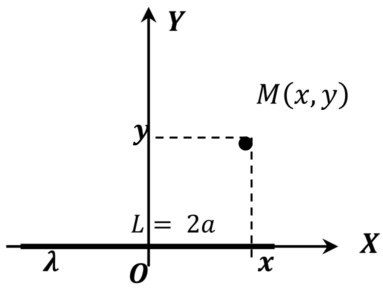
Trouvez les potentiels électriques à partir des vecteurs champs électriques suivants :

1. $\vec{E} = a.\left(y.\vec{e}_x + x.\vec{e}_y\right)$ avec $V(1,1) = 0$
2. $\vec{E} = a.y.\vec{e}_x + (a.x + b.z).\vec{e}_y + b.y.\vec{e}_z$ avec $V(1,3,1) = 0$

EXERCICE 04 (*):

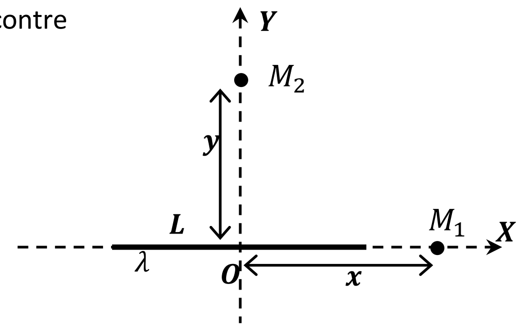
Considérons un segment de droite de longueur $L = 2a$ chargée uniformément avec une densité linéique λ.

1. Trouvez le champ électrique produit par cette distribution au point $M(x, y)$.
2. Trouvez le champ électrique en M quand la distance OM est très grande par rapport à L. Comparez cette expression avec le champ produit par une charge ponctuelle située en O.
3. Déterminez la direction du champ quand OM est très petit par rapport à L.



EXERCICE 05 (*):

Considérons un segment de droite de longueur L chargée uniformément avec une densité linéique $(\lambda > 0)$. Figure ci-contre



1. Calculer le potentiel crée au point M_1 ($V = 0$ à l'infini).
2. En déduire le champ électrique $\vec{E}_{M_1}(x)$ au point M_1.
3. Que devient $\vec{E}_{M_1}(x)$ quand $x \gg L$.
4. Calculez le potentiel au point M_2.

On donne $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + c^2}} = \ln\left(z + \sqrt{z^2 + c^2}\right)$

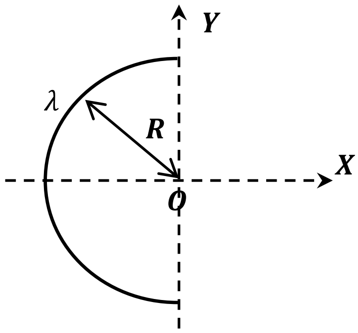
EXERCICE 06 :

Calculez le champ électrique crée par une droite infinie ayant une distribution linéaire λ uniforme $(\lambda > 0)$, au point située à une distance d de la droite.

EXERCICE 07 :

Soit une distribution uniforme de charges λ en forme d'un demi-cercle de rayon R.

Calculer l'expression du champ électrique crée au point O.



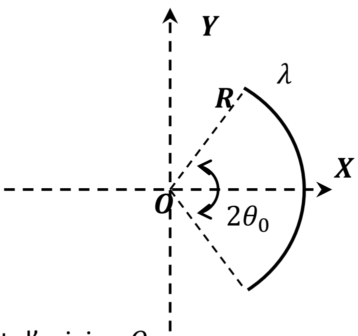
EXERCICE 08 (*):

Une tige ayant la forme d'un arc de cercle de rayon R est contenue dans le plan (XOY) comme le montre la figure ci-contre.

La densité de charge de la tige en fonction de λ est donnée par la relation $\lambda = \lambda_0.\cos(\theta)$ tel que $\lambda_0 = \text{constante}.$

θ est l'angle polaire (par rapport à l'axe OX)

Et l'angle $2\theta_0$ formé par la tige est centré sur l'axe OX.

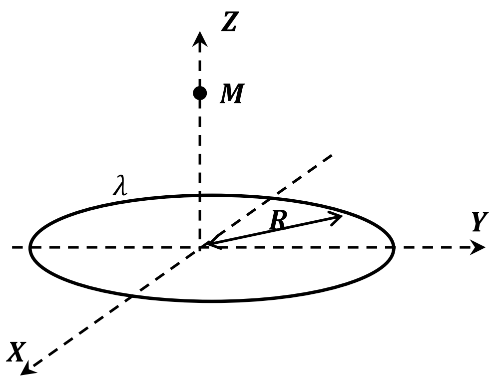


1. Montrez que la densité de charge λ est symétrique par rapport à l'axe OX.
2. Calculez le vecteur champ électrique $\vec{E}(O)$ crée par cette distribution au point d'origine O.
3. Calculez le potentiel électrostatique $V(O)$ crée par cette distribution au point d'origine O.

On donne : $2.\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$

EXERCICE 09 :

Une distribution de charges λ uniforme et circulaire de rayon R est contenu dans le plan (XOY) comme le montre la figure ci-contre.



1. Trouvez l'expression du champ électrique crée au point M.
2. Que devient cette expression quand $z \gg R$.
3. Quelle est la valeur maximale du champ électrique sur l'axe OZ ?

EXERCICE 10 (*):

I.

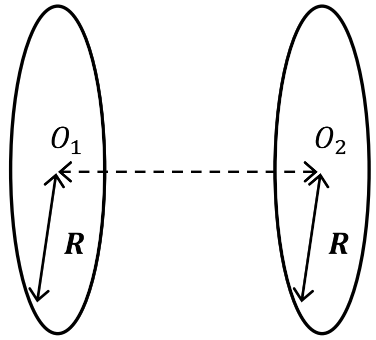
Soit un fil circulaire de centre O et de rayon R chargé positivement avec une densité uniforme λ.

1. Calculer le potentiel crée par cette distribution au centre du cercle.
2. Calculer le potentiel crée en un point M situé sur l'axe du cercle perpendiculaire à son plan et ayant une distance z par rapport à O. ($V = 0$ à l'infini)

II.

Deux anneaux circulaires de $R = 5\ cm$ chacune sont disposé comme le montre la figure ci-contre.

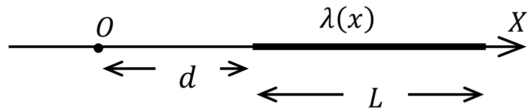
La distance $O_1O_2 = 12\ cm$. Et leurs charges respectives $q_1 = 8 \times 10^{-7}\ C$ et $q_2 = 5{,}8 \times 10^{-7}\ C$.



1. Calculer la différence de potentiel entre les deux centre des cercles.
2. Calculer le travail nécessaire pour déplacer une charge ponctuelle $q = 6 \times 10^{-9}\ C$ du centre d'un anneau à l'autre.

EXERCICE 11 :

Soit une tige droite de longueur L placée sur l'axe (OX), comme le montre la figure ci-contre. La tige est chargée avec une densité λ variable donnée par la loi :



$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{(x-d)}{d}$$

Tel que : d est la distance entre le bout de la tige et l'origine O et λ_0 est une constante positive.

1. Trouver le champ électrique crée au point O (Origine).

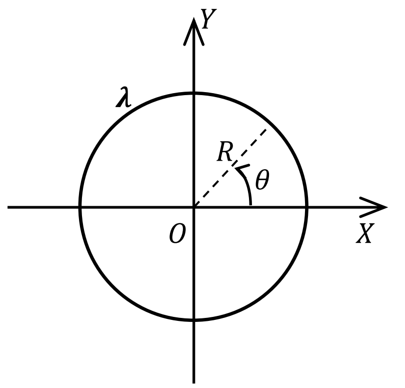
EXERCICE 12 (*):

Une tige ayant la forme d'un cercle de rayon R et de centre O est contenue dans le plan (XOY) comme le montre la figure ci-contre.

La densité de charge λ de la tige est donnée par la relation :

$\lambda = \lambda_0.\sin(\theta)$ tel que $\lambda_0 = \text{constante}$.

θ est l'angle polaire (par rapport à l'axe OX)



1. Calculez le potentiel électrique $V(O)$ crée par cette distribution au point d'origine O.
2. Calculez le vecteur champ électrique $\vec{E}(O)$ crée par cette distribution au point d'origine O.
3. Calculez le vecteur champ électrique $\vec{E}(O)$ crée au point d'origine O pour une densité de la forme $\lambda = \lambda_0.\cos(\theta)$.
4. Comparer les résultats des questions 2 et 3. Expliquer.

On donne : $2.\sin^2(\theta) = 1 - \cos(2\theta)$; $2.\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$; $\sin(2\theta) = 2.\sin\theta\,.\cos\theta$

EXERCICE 13 :

Un anneau circulaire de rayon R et de centre O est placé dans le plan (XOY). On charge l'anneau avec une densité linéaire λ tel que :

$$\lambda(\theta) = \lambda_0.\sin\theta \qquad \text{avec} \qquad \theta = (OX, R) \text{ angle polaire}$$

Trouvez l'expression du champ électrique crée au point $M(0,0,z)$.

EXERCICE 14 :

1. Trouvez le champ crée par un disque ayant une charge positive distribuée uniformément sur toute sa surface (σ : densité surfacique), en un point se trouvant à une hauteur h au dessus de son centre.
2. En déduire le champ crée par un plan infini chargée avec la même densité σ, en un point ayant une distance h par rapport au plan.

EXERCICE 15 (*):

Un disque, de centre O de rayon intérieur a et de rayon extérieur b, est chargée d'une densité surfacique non uniforme $\sigma = \rho_0 . r$ et placé dans le plan (XOY).

$\rho_0 = \text{constante}$ et r est la distance par rapport au centre de la distribution O.

1. Trouvez la charge totale Q en fonction de ρ_0, a et b.
2. Calculez le potentiel électrostatique V_O crée au point O.
3. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}_O$ créé par le disque au point O. Expliquer.
4. Calculer le champ électrostatique au point O, pour le même disque si la distribution est donnée par $\sigma = \rho_0 . r . \sin\theta$ (θ étant l'angle polaire).

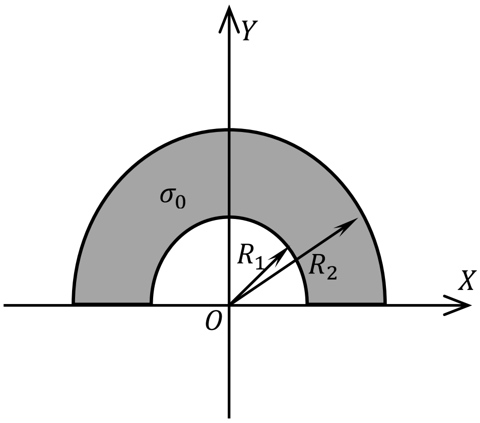
EXERCICE 16 :

Une distribution surfacique uniforme de densité σ_0 ayant la forme d'un demi-disque de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 est placée dans le plan (OXY) (figure ci-dessous).

1. Calculer le potentiel électrostatique V_O crée par cette distribution au point $O(0,0)$.
2. Calculer le vecteur champ électrostatique $\vec{E}_O$ crée par cette distribution au point $O(0,0)$.

Soit un disque complet de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 centré en $O(0,0)$ et portant une distribution surfacique $\sigma = \sigma_0 \frac{|y|}{y}$.

3. Déduire de la question 1. le potentiel électrostatique V'_O crée par ce disque en son centre $O(0,0)$.
4. Déduire de la question 2. le vecteur champ électrostatique $\vec{E}'_O$ crée par ce disque en son centre $O(0,0)$.



EXERCICE 17 (*):

1. Calculer le champ et le potentiel créés par une demi-sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et $z > 0$, chargé uniformément en surface (densité σ) au point O.
2. En déduire le champ créé par une sphère de rayon R centrée en O et portant une densité $\sigma = \sigma_0 \frac{|z|}{z}$.
3. Calculer le champ et le potentiel créés par une sphère de rayon R centrée en O et portant une densité surfacique $\sigma = \sigma_0 . \cos\theta$. (Angle θ définit par les coordonnées sphériques).

EXERCICE 18 :

1. Calculer le champ et le potentiel créés par une demi-sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et $z > 0$, chargé uniformément en volume (densité ρ) au point O.
2. Calculer le champ et le potentiel créés à l'origine O par une sphère de rayon R centrée en O et portant une densité volumique $\rho = \rho_0 . \cos\theta$. (Angle θ définit par les coordonnées sphériques).